Agrégation 1958. Analyse

– I –

1. Soient t et z deux variables complexes indépendantes.
   (a) Donner les développements en série entière de z des fonctions e^{zt} et $e^{\frac{z}{t}}$.
   (b) En déduire un développement de $g(z,t) = e^{z\left(t+\frac{1}{t}\right)}$ suivant les puissances négatives, nulles et positives de t :
$$g(z,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(z)\ t^n$$
   Pour quelles valeurs de z et de t ce développement est-il valable ?
   (c) Comparer $f_n(z)$ et $f_{-n}(z)$.
   (d) Vérifier que l'on a, pour $n \geq 0$:
$$f_n(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^{n+2m}}{m!\,(n+m)!} \tag{1}$$
2. On définit $a_n(z)$ par l'égalité :
$$f_n(z) = \frac{z^n}{n!}\left(1 + a_n(z)\right) \tag{2}$$
   (a) Montrer que $a_n(z)$ tend vers 0, quand n tend vers l'infini, uniformément pour $|z| \leq M$ où M est un nombre positif quelconque.
   (b) Montrer également que, z et z' étant deux nombres dont le module est inférieur à M et c un nombre positif arbitraire, il est possible de déterminer un nombre N ne dépendant que de M et de c tel que l'inégalité $n > N$ entraîne :
$$|a_n(z) - a_n(z')| \leq c\,|z - z'| \tag{3}$$
3. Montrer que les fonctions $f_n(z)$ sont holomorphes pour tout z et s'expriment par les intégrales :
$$f_n(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z,t)\, t^{n-1} dt \tag{4}$$
   où γ désigne une courbe convenable du plan de la variable t.
4. Vérifier que $f_n(z)$ satisfait à l'équation différentielle :
$$z^2 f_n''(z) + z f_n'(z) - \left(4z^2 + n^2\right) f_n(z) = 0 \tag{5}$$
5. Montrer que si la série $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n t^n$ converge uniformément vers $g(z,t)$ pour $|t| = r > 0$, z étant fixé, on a $c_n = f_n(z)$ quel que soit n.
6. En supposant seulement que $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n t^n$ converge vers $g(z,t)$ pour deux valeurs de t de modules distincts, peut-on conclure aux égalités $c_n = f_n(z)$?

– II –

Dans cette partie, ainsi que dans la quatrième, on se propose d'étudier les séries de la forme :

$$\sum_0^\infty a_n f_n(z) \tag{6}$$

où les a_n désignent des coefficients numériques et où les $f_n(z)$ sont les fonctions définies par (1).

1. Montrer que ces séries possèdent en général un « rayon de convergence » $R \geq 0$ jouissant de propriétés analogues à celui d'une série entière. Exprimer R à l'aide de la suite des a_n.
2. On suppose dorénavant $R > 0$; pour $|z| < R$, la série (6) converge ; soit $h(z)$ sa somme. Montrer que $h(z)$ est holomorphe pour $|z| < R$.
3. On veut examiner si, réciproquement, toute fonction $k(z)$ holomorphe dans un cercle ayant l'origine pour centre est la somme d'une série (6).
   (a) Dans ce but, montrer d'abord l'égalité pour m entier positif :
   $$z^n = \frac{n!}{2i\pi}\int_{\gamma'} u^{n-1} e^{\frac{z}{u}} du \tag{7}$$
   où γ' désigne une courbe convenable du plan de la variable u.
   (b) En faisant le changement de variable $u = \dfrac{t}{t^2+1}$ et en utilisant le développement de u^n en série entière de t, montrer la formule :
   $$z^n = \sum_{p=0}^\infty (-1)^p (n+2p)\frac{(m+p-1)!}{p!} f_{m+2p}(z) \tag{8}$$
   Cette formule est-elle valable pour $m = 0$?
   (c) Quel est le domaine de validité de la représentation de $k(z)$ par une série (6) ? Cette représentation est-elle unique ?
   (d) Donner les valeurs des coefficients a_n relatifs aux fonctions $k(z) = e^{cz}$ où c désigne un nombre indépendant de z.
   (e) Pourrait-on, à partir de là, retrouver la formule (8) ?
   (f) Effectuer les calculs correspondants, pour $m = 0$ et $m = 1$.

– III –

Cette partie est indépendante des précédentes. On se propose d'y établir certaines propriétés des séries entières qu'on étendra, dans **IV**, aux séries (6). On sait que, si la série $\sum_{n=0}^\infty b_n$ converge, la série $\sum_{n=0}^\infty b_n x^n$ converge uniformément pour $0 \leq x \leq 1$ et que, en particulier, il en résulte l'égalité :

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^\infty b_n x^n = \sum_{n=0}^\infty b_n \tag{9}$$

le symbole $x \to 1^-$ signifiant que x tend vers 1 par valeurs inférieures à 1.

1. Montrer, en utilisant un développement en série entière classique, que le premier membre de (9) peut exister bien que la série figurant au second membre diverge.
2. En supposant que chaque nombre b_n soit astreint à la seule condition :

$$n\,|b_n| \leq 1 \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{10}$$

et en posant :

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \varphi\,(x)\,, \text{ pour } 0 \leq x < 1$$

démontrer l'égalité :

$$\left|\varphi\,(x) - \sum_{n=0}^{\infty} b_n\right| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{p} + \ln\,(1-x) + 2\int_0^x \frac{u^n}{1-u} du \tag{11}$$

En déduire l'inégalité suivante, où A désigne une constante absolue :

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\varphi\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{n}{2} b_p\right| \leq A \tag{12}$$

3. A-t-on, dans les mêmes conditions :

$$\limsup_{x\to 1^-} \left|\varphi(x) - \frac{E\,(x)}{2} b_p\right| \leq A$$

dans laquelle $E\,(x)$ désigne la partie entière du nombre $\dfrac{1}{1-x}$?
4. Montrer que l'égalité $\lim\limits_{n\to\infty} nb_n = 0$ implique l'égalité :

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\varphi(x) - \frac{E\,(x)}{2} b_p\right) = 0$$

– IV –

Adapter aux séries (6) les diverses propriétés énoncées ou démontrées en **III** dans le cas des séries entières. Il sera utile de démontrer d'abord l'égalité :

$$\lim_{x\to R^-} \left(\sum_0^{\infty} a_n f_n\,(x) - \sum_0^{\infty} a_n f_n\,(R) \left(\frac{x}{R}\right)^n\right) = 0$$

valable lorsque l'ensemble des nombres $a_n f_n\,(R)$ est borné supérieurement où R désigne le « rayon de convergence » supposé positif de la série (6) considérée.

– V –

On considère l'équation fonctionnelle :

$$\psi(x) = \lambda \int_0^1 t e^{-n\left|\ln\left(\frac{x}{t}\right)\right|} \psi(t)\, dt \; 0 < x \leq 1 \tag{13}$$

où λ désigne un nombre réel fixe et n un entier positif ; $\psi(x)$ est une fonction inconnue qu'on suppose bornée et intégrable pour $\varepsilon \leq x \leq 1$ quel que soit $\varepsilon > 0$ et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 |\psi(t)|\, dt$ ait un sens. Il pourra être commode de décomposer l'intervalle d'intégration $(0, 1)$ en les intervalles partiels $(0, x)$ et $(x, 1)$.

1. Déduire successivement de l'équation (13) et des conditions imposées à $\psi(x)$ que :
   (a) $\psi(x)$ est continue pour $0 < x \leq 1$;
   (b) $\psi(x)$ tend vers 0 avec x. On posera $\psi(0) = 0$;
   (c) $\psi(x)$ a une dérivée pour $0 < x < 1$ ainsi qu'une dérivée à droite et une dérivée à gauche respectivement pour $x = 0$ et $x = 1$.
   (d) $\psi(x)$ a une dérivée seconde pour $0 < x < 1$.
2. Montrer en outre que $\psi(x)$ satisfait à l'équation différentielle :
$$x^2\psi'' + x\psi' + \left(2\lambda n x^2 - n^2\right)\psi = 0 \tag{14}$$
3. En déduire les conséquences suivantes :
   (a) Si $f_{n-1}\left(i\sqrt{\dfrac{n\lambda}{2}}\right) \neq 0$, l'équation (13) n'admet que la solution banale identiquement nulle.
   (b) Si $f_{n-1}\left(i\sqrt{\dfrac{n\lambda}{2}}\right) = 0$, l'équation (13) admet la solution $\psi(x) = C f_n\left(ix\sqrt{\dfrac{n\lambda}{2}}\right)$ où C désigne une constante arbitraire.
4. On veut établir que la condition précédente est réalisable. Pour cela :
   (a) montrer d'abord que $f_{n-1}(x)$ a une infinité de zéros qui ne peuvent d'ailleurs pas être réels non nuls ;
   (b) désignant par a et b deux constantes, former les équations différentielles satisfaites par $u(x) = f_{n-1}(ax)$ et $v(x) = f_{n-1}(bx)$ et en déduire que $x(u'v - uv')$ est une primitive de $4\left(a^2 - b^2\right)xuv$.
   (c) Enfin, en considérant l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x f_{n-1}(ax)\, f_{n-1}(bx)\, dx$pour des valeurs convenables de a et b, montrer que l'hypothèse de l'existence de zéros de $f_{n-1}(x)$ non imaginaires purs conduit à une contradiction.