1° On propose d'abord de démontrer l'existence de couples de « tétraèdres » $\alpha\beta\gamma\delta$ et $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ tel que chacun d'eux soit inscrit dans l'autre.

On prend les quatre points α, β, γ, δ comme sommets d'un repère; quelles conditions doivent vérifier les coordonnées de quatre points α', β', γ', δ' pour que ces points soient situés respectivement dans les plans $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$? Ces conditions étant remplies, montrer que les relations exprimant que les quatre points α', β', γ', δ' ne sont pas coplanaires et que les points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont situés respectivement dans les plans $\beta'\gamma'\delta'$, $\gamma'\delta'\alpha'$, $\delta'\alpha'\beta'$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ sont compatibles et admettent une infinité de solutions.

On désignera par μ un tel couple de tétraèdres.

2° Démontrer que les transformations S du type Σ peuvent être caractérisées par le fait que la trace de la matrice associée (F) est nulle.

Comment peut-on déterminer les « tétraèdres » (θ) correspondant à une transformation Σ?

Que peut-on dire d'un point M et de ses « itérés » M_1, M_2, M_3, M_4 par une transformation Σ?

3° Étudier de même les transformations S du type Σ'.

4° Il existe des transformations S qui sont à la fois du type Σ et du type Σ'; soit Σ_0 une telle transformation. En donner un exemple (on pourra utiliser un couple de tétraèdres μ).

Quelle est la forme du polynôme caractéristique de la matrice (F_0) associée à une transformation Σ_0? Que peut-on dire d'un point M et de ses « itérés » par une Σ_0?

Que pensez-vous du carré d'une transformation Σ_0?

Analyse.

5584. — Les parties IV et V sont indépendantes.

Notations. — $\mathcal{C}$: corps des nombres complexes.

$a_{ij} \in \mathcal{C}$; $\overline{a_{ij}}$: conjugué de a_{ij}; $|a_{ij}|$: module de a_{ij}.

$A = [(a_{ij})]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$: matrice $n \times n$ à termes complexes a_{ij}.

$A^* = [(\overline{a_{ji}})]$: matrice adjointe de A (transposée de la conjuguée).

$$\|A\| = \left(\sum a_{ij}\overline{a_{ij}}\right)^{\frac{1}{2}}, \ (i, j = 1, 2, \ldots, n) : \text{norme de } A.$$

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii} : \text{trace de } A.$$

$|A|$ = dét. A : déterminant de A.

$$AB = [(c_{ij})], \ c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}b_{kj} : \text{produit des matrices A et B.}$$

I. — 1° Vérifier que $\|A\|$ est effectivement une norme sur l'ensemble des matrices A considéré comme espace vectoriel sur $\mathcal{C}$.

2° Démontrer l'inégalité $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

3° Établir l'égalité $\|A\|^2 = \operatorname{tr}(AA^*) = \operatorname{tr}(A^*A)$.

4° Dans le cas où $A = A^*$ (matrice hermitienne), exprimer $\|A\|$ en fonction des valeurs propres de A.

II. — On suppose que les termes a_{ij} de la matrice A sont des fonctions à valeurs complexes de la variable complexe z. La matrice est alors

$$A(z) = [(a_{ij}(z))].$$

1° Lorsque les fonctions $a_{ij}(z)$ sont continues, on pose $\int_\gamma A(z)\,dz = \left[\left(\int_\gamma a_{ij}(z)\,dz\right)\right]$, où γ est un chemin différentiable du plan de la variable complexe.

Démontrer l'inégalité $\left\|\int_\gamma A(z)\,dz\right\| \leqslant \int_\gamma \|A(z)\|\,ds$, s désignant l'abscisse curviligne du point d'affixe z sur γ.

2° Lorsque les fonctions $a_{ij}(z)$ sont dérivables, on pose $\dfrac{dA}{dz} = A'(z) = [(a'_{ij}(z))]$.

Vérifier la formule de dérivation d'un produit :

$$(AB)' = A'B + AB'.$$

3° Lorsque les fonctions $a_{ij}(z)$ sont holomorphes dans un ouvert D du plan de la variable complexe, on dit que la matrice $A(z)$ est holomorphe dans D. Énoncer et démontrer la formule intégrale de Cauchy relative à une matrice $A(z)$ holomorphe dans D. Écrire et justifier le développement de $A(z)$ en série de Taylor dans un disque ouvert $|z - z_0| < \rho$ contenu dans D.

III. — On se propose d'étudier l'équation différentielle matricielle du second ordre

$$\frac{d}{dx}(A(x)Y') + B(x)Y = 0, \tag{1}$$

dans laquelle $A(x)$ et $B(x)$ sont deux matrices $n \times n$, données, à termes *complexes* $a_{ij}(x)$ et $b_{ij}(x)$, fonctions continues de la variable *réelle* x pour $x \geqslant a$. Y est la fonction matricielle inconnue, complexe et $n \times n$, Y' sa dérivées par rapport à x. On suppose la matrice $A(x)$ régulière $(|A(x)| \neq 0)$.

1° La résolution de l'équation (1) équivaut à celle du système différentiel matriciel

$$\begin{cases} Y' = A^{-1}Z \\ Z' = -BY, \end{cases} \tag{2}$$

système dont on cherche par la méthode des approximations successives une solution satisfaisant aux conditions initiales :

$$Y(a) = 0; \qquad Z(a) = E \quad \text{(matrice unité)}.$$

Démontrer que cette solution est unique et donnée par

$$Y(x) = \lim_{m=+\infty} Y_m(x), \qquad Z(x) = \lim_{m=+\infty} Z_m(x),$$

où $Y_m(x)$ et $Z_m(x)$ sont définis par les formules suivantes :

$$Y_0(x) = 0; \qquad Z_0(x) = E;$$

$$Y_{m+1}(x) = \int_a^x A^{-1}(u)Z_m(u)\,du; \qquad Z_{m+1}(x) = E - \int_a^x B(u)Y_m(u)\,du. \tag{3}$$

(On montrera que la série de terme général $Y_{m+1} - Y_m$ et la série de terme général $Z_{m+1} - Z_m$ sont uniformément convergentes pour $a \leqslant x \leqslant b$, en donnant une majoration convenable de $\|Y_{m+1} - Y_m\|$ et $\|Z_{m+1} - Z_m\|$.)

2° On suppose, en outre, les matrices A et B *hermitiennes* $(A = A^*, B = B^*)$. Démontrer que la solution (Y, Z) trouvée au 1° vérifie la relation

$$Y^*Z - Z^*Y = 0.$$

En déduire pour la solution correspondante de (1) :

$$Y^*AY' - Y'^*AY = 0.$$

3° Que peut-on dire de l'équation (1) et du système (2) lorsque la variable x est remplacée par une variable complexe z, les matrices $A(z)$ et $B(z)$ étant supposées holomorphes dans un ouvert D du plan de la variable complexe contenant le point a, $A(z)$ étant toujours régulière?

IV. — Dans cette partie, on suppose la variable x réelle, les matrices $A(x)$ et $B(x)$ *réelles* et continues pour $x \geqslant a$, *symétriques* et inverses l'une de l'autre :

$$AB = E.$$

On note $Y = S(a, x; B)$, $Z = C(a, x; B)$ les solutions déterminées au III, 1°. Ces solutions vérifient donc le système différentiel :

$$S' = BC, \quad C' = -BS; \qquad S(a) = 0, \quad C(a) = E. \tag{4}$$

1° Établir les relations

$$S^*C - C^*S = 0 \qquad \text{et} \qquad C^*C + S^*S = E. \tag{5}$$

En déduire ensuite

$$SC^* - CS^* = 0, \qquad CC^* + SS^* = E. \tag{5'}$$

Montrer que $\|S\|$ et $\|C\|$ sont bornées par $n^{\frac{1}{2}}$ pour $x \geqslant a$.

2° Démontrer que, si la matrice $B(x)$ est permutable avec son intégrale,

$$I = \int_0^x B(u)\,du,$$

les fonctions S et C sont données par les séries

$$S = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} I^{2p+1} \quad \text{et} \quad C = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} I^{2p}.$$

(On pourra vérifier que les fonctions Y_m et Z_m définies au III, 1° coïncident avec les sommes partielles de ces séries.)

3° Montrer qu'une condition suffisante pour que la matrice symétrique $B(x)$ soit permutable avec son intégrale I est

$$B(x) = U^*\Delta(x)U,$$

où $\Delta(x)$ est une matrice diagonale et U une matrice *constante* orthogonale $(U^*U = E)$.

Démontrer que cette condition est nécessaire pour $n = 2$.

V. — On revient au cas général du système (2), dans lequel les matrices $A(x)$ et $(B(x)$ sont toujours réelles et continues pour $x \geqslant a$, symétriques, mais non inverses. Elles sont, en outre, *définies positives.* Y et Z désignent encore la solution particulière satisfaisant aux conditions $Y(a) = 0$, $Z(a) = E$. On veut établir une condition suffisante pour que les déterminants $|Y|$ et $|Z|$ ne s'annulent ni l'un ni l'autre pour $x > a$ (non oscillation du système).

1° α) En supposant l'existence d'un zéro de $|Z| = \text{dét } Z$, montrer qu'il existe un zéro minimal $b > a$.

β) On pose $K = YZ^{-1}$. Démontrer que K est symétrique et définie positive pour $a < x < b$. (On pourra utiliser la dérivée $K' = A^{-1} + KBK$.)

γ) Démontrer que $\int_a^b \operatorname{tr}(BK)\, du = +\infty$.

On pourra d'abord établir la relation $|Z(x)| = \exp \int_a^x - \operatorname{tr}(BK)\, du$ comme conséquence de l'identité

$$|Z|' = \operatorname{tr}(Z'Z^{-1})|Z|.$$

2° Soit $\rho(x) = \sup(\operatorname{tr} A^{-1}, \operatorname{tr} B)$. En supposant

$$(6) \qquad \int_a^{+\infty} \rho(x)\, dx = \theta < \frac{\pi}{2},$$

démontrer que tr K est majoré pour $x \geqslant a$ par $\operatorname{tg} \theta$.

En déduire que $\int_a^x \operatorname{tr}(BK)\, du$ est majoré par $\theta \operatorname{tg} \theta$.

On pourra vérifier et utiliser les majorations

$$\operatorname{tr}(BK) \leqslant \operatorname{tr} B \operatorname{tr} K, \quad \operatorname{tr}(KBK) \leqslant \operatorname{tr} B (\operatorname{tr} K)^2.$$

3° Démontrer, en conclusion, que la condition (6) est compatible avec l'existence d'un zéro de $|Y|$ pour $x > a$.

Mathématiques appliquées.

Le candidat voudra bien indiquer, en tête de sa composition, les tables numériques qu'il aura été amené à utiliser.

5585. — Le plan étant rapporté à un repère orthonormé dont les axes sont $x'Ox$ et $y'Oy$, on propose d'étudier les courbes intégrales C de l'équation différentielle du premier ordre

$$(E) \qquad \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{4xy}{x^2 - 2xy - y^2 - 1},$$

x et y étant des variables réelles.

I. — (*Les questions posées dans cette partie I doivent être traitées sans intégrer l'équation.*)

1° La forme de l'équation fait-elle apparaître l'existence d'une symétrie pour l'ensemble des courbes C ?

2° Soit γ_k le lieu des points des courbes C en lesquels la tangente a une pente donnée k. Reconnaître les courbes γ_k (courbes isoclines) et la famille qu'elles constituent.

3° Déterminer le lieu des points d'inflexion des courbes C, ainsi que l'enveloppe des tangentes aux courbes C en leurs points d'inflexion.

II. — 1° L'intégration de l'équation (E) est équivalente à l'intégration du système

$$(E') \qquad \begin{cases} 2\, dx = (1 - x^2 + 2xy + y^2)\, dt \\ 2\, dy = (1 - x^2 - 2xy + y^2)\, dt, \end{cases}$$

où t est une variable réelle.