

## TEXTE DE L'ÉPREUVE D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

*Il est rappelé aux candidats :*

— qu'il sera tenu le plus grand compte, dans l'appréciation des copies, du soin apporté à la présentation, de la clarté et de la précision des démonstrations ;

— qu'ils doivent respecter les notations fixées par l'énoncé.

On note  $\mathbf{C}$  le plan complexe,  $z = x + iy$  un point quelconque de  $\mathbf{C}$  ( $x = \operatorname{Re} z$  et  $y = \operatorname{Im} z$  sont réels),  $r$  le module de  $z$  et  $\bar{z}$  le conjugué  $x - iy$  de  $z$ .

Soit  $D$  le demi-plan  $y > 0$  de  $\mathbf{C}$ . Pour tout élément  $z$  de  $D$ , on pose  $z = re^{i\theta}$  avec  $0 < \theta < \pi$ . Si  $F$  est une application de  $D$  dans  $\mathbf{C}$ , on note, lorsqu'elles existent,  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$  ... les dérivées partielles de l'application  $(x, y) \mapsto F(x + iy)$  et  $\frac{\partial F}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$  ... les dérivées partielles de l'application  $(r, \theta) \mapsto F(re^{i\theta})$ .

Toutes les fonctions considérées dans ce texte sont supposées continues, sauf peut-être en un nombre fini de points. Si  $f$  est une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$ , on appellera  $\mathfrak{E}$  la condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt < +\infty .$$

Conformément à l'usage,  $\mathbf{C}[X]$  désigne l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans  $\mathbf{C}$ . Un élément quelconque  $P$  de  $\mathbf{C}[X]$  est noté  $\sum p_j X^j$ . Toutes les suites considérées dans le problème sont indexées dans  $\mathbf{N}$  (ensemble des entiers naturels zéro compris).

### I

Soit  $k$  l'application de  $D \times \mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  définie par

$$k(z, t) = \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}} \right)$$

Si  $f$  est une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$ , on note  $Kf$  l'application de  $D$  dans  $\mathbf{C}$  définie par  $Kf(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(z, t) f(t) dt$ , lorsque cette intégrale est convergente pour tout  $z$  appartenant à  $D$ .

a. Si  $f$  satisfait à  $\mathfrak{E}$ , démontrer que  $Kf$  existe, que  $Kf$  est indéfiniment continûment dérivable par rapport aux variables  $x$  et  $y$  et qu'on a :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) Kf = 0 .$$

b. L'application  $f$  vérifiant toujours  $\mathfrak{E}$ , on la suppose continue au point  $t_0$  de  $\mathbf{R}$ ; démontrer qu'on a :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ y > 0}} Kf(z) = f(t_0) .$$

## II

a. Soit  $F$  une fonction définie dans le demi-plan  $y \geq 0$  de  $\mathbf{C}$  et à valeurs dans  $\mathbf{C}$ . On suppose que  $F$  est continue, que sa restriction à  $D$  est holomorphe et que  $F$  vérifie  $\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ y \geq 0}} \frac{F(z)}{z} = 0$ .

Démontrer que, pour tout  $z$  de  $D$ , on a

$$F(z) = \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} k(z, t) F(t) dt.$$

b. Expliciter  $Kf$  pour  $f(t) = \text{Log} |t - \alpha|$ , où  $\alpha$  est un complexe arbitraire (on pourra d'abord supposer  $\text{Im} \alpha < 0$  et utiliser II a. en choisissant  $F$  de sorte, qu'on ait  $\text{Re} F(t) = \text{Log} |t - \alpha|$  pour  $t \in \mathbf{R}$ ).

Démontrer que, pour tout polynôme  $P$  à coefficients complexes et pour tout  $z$  non réel, on a :

$$(1) \quad \text{Log} |P(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{+x} \frac{|y| \text{Log} |P(t)|}{(x-t)^2 + y^2} dt.$$

c. Pour quelles valeurs du réel  $\sigma$  l'intégrale  $\int_{-x}^{+x} \frac{|t|^\sigma}{1+t^2} dt$  est-elle convergente? Pour ces valeurs de  $\sigma$  expliciter  $Kf$  lorsque  $f$  est la fonction  $t \mapsto |t|^\sigma$ .

Vérifier en particulier qu'on a, pour tout  $r$  strictement positif, :

$$(2) \quad \int_{-r}^{+r} \frac{r |t|^\sigma}{r^2 + t^2} dt = c(\sigma) r^\sigma$$

et donner la valeur de  $c(\sigma)$ . (On pourra dans le cas  $0 < \sigma < 1$

appliquer II a. à la fonction  $z \mapsto \left(\frac{z}{i}\right)^\sigma = r^\sigma e^{i\sigma\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$ ).

## III

a. On considère l'opérateur différentiel  $\delta = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} = r \frac{\partial}{\partial r}$ ;  $\delta \circ \delta$  est noté  $\delta^2$ . Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$  vérifiant  $\mathcal{E}$ . Pour tout réel  $\lambda$  strictement positif, on note  $f_\lambda$  l'application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$  définie par  $f_\lambda(t) = f(\lambda t)$ .

Démontrer qu'au sens de la convergence simple on a :

$$\delta^2 Kf = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \neq 1}} \left[ \frac{1}{(\lambda-1)^2} K \left( f_\lambda + f_{\frac{1}{\lambda}} - 2f \right) \right]$$

b. Exprimer l'opérateur différentiel  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  en fonction de  $\delta$  et  $\frac{\partial}{\partial \theta}$ .

Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  vérifiant  $\mathcal{E}$ . On suppose que les deux fonctions  $t \mapsto f(e^t)$  et  $t \mapsto f(-e^t)$  sont convexes; démontrer qu'on a :  $\frac{\partial^2 Kf}{\partial \theta^2} \leq 0$ .

c. On suppose que  $f$  est une fonction paire vérifiant les hypothèses de III b. Démontrer que, pour tout  $r$  fixé strictement positif, la fonction  $\theta \rightarrow Kf(re^{i\theta})$  admet un maximum atteint pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

#### IV

Dans cette question,

•  $W$  désigne une application paire de  $\mathbf{R}$  dans  $[1, +\infty[$ , vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Log } W(t)}{1+t^2} dt < +\infty$$

et telle que la fonction  $t \rightarrow \text{Log } W(e^t)$  soit convexe; on pose pour tout  $r$  strictement positif  $\mu(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r \text{Log } W(t)}{r^2+t^2} dt$  et,

pour tout élément  $j$  de  $\mathbf{N}$ ,  $M_j = \sup_{r>0} \frac{r^{j+\frac{1}{2}}}{e^{\mu(r)}}$ .

•  $P = \sum p_j X^j$  est un élément de  $\mathbf{C}[X]$  satisfaisant à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |P(t)|^2 (W(t))^{-1} dt \leq 1.$$

a. Prouver que, pour tout réel  $u$  et tout réel strictement positif  $v$ , on a :

$$uv \leq e^{u-1} + v \text{Log } v$$

b. Démontrer l'existence d'un réel  $C$  indépendant de  $P$  et  $W$  tel que pour tout  $z$  non réel on ait

$$|P(z)| \leq C |y|^{-\frac{1}{2}} e^{\mu(r)}$$

On utilisera l'égalité

$$\begin{aligned} \text{KLog}|P|(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(z,t) \text{Log} |(P(t))^2 (W(t))^{-1}| dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{KLog} W(z) \end{aligned}$$

et on appliquera les résultats des questions II et III ainsi que l'inégalité IVa., où il est suggéré de remplacer  $u$  par  $\text{Log} |(P(t))^2 (W(t))^{-1}|$ .

c. Dédurre de IVb. l'existence d'un réel  $H$ , indépendant de  $P$  et  $W$ , tel que, pour tout  $j$ , on ait :  $|p_j| \leq \frac{H}{M_j}$ .

#### V

$W$  désigne toujours par  $W$  une application satisfaisant aux hypothèses de IV. On suppose en outre que, pour tout élément  $j$  de  $\mathbf{N}$ , on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^j}{W(t)} = 0.$$

Les notations de IV sont conservées.

a. Démontrer qu'il existe une suite  $(P_n)$  de polynômes  $P_n = \sum p_{nj} X^j$  satisfaisant aux conditions :

(i)  $P_n$  est de degré  $n$

$$(ii) \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(t) P_n(t) (W(t))^{-1} dt = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

b. Dédurre de IV que, pour tout élément  $j$  de  $\mathbf{N}$ , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |p_{nj}|^2 \leq \left( \frac{H}{M_j} \right)^2$$

c. Soit  $(b_n)$  une suite complexe satisfaisant à :  $\sum_0^{+\infty} |b_n|^2 < +\infty$ .

Démontrer que la série  $\sum_0^{+\infty} b_n P_n(z)$  est convergente dans  $\mathbf{C}$  et que sa somme est une fonction entière de  $z$  (c'est-à-dire holomorphe dans le plan complexe  $\mathbf{C}$  tout entier).

d. Soit  $(a_j)$  une suite complexe satisfaisant à :  $\sum_0^{+\infty} \left| \frac{a_j}{M_j} \right| < +\infty$ .

Démontrer l'existence d'une suite unique  $(b_n)$  de complexes telle qu'on ait  $\sum_0^{+\infty} |b_n|^2 < +\infty$  et que la fonction  $f = \sum_0^{+\infty} b_n P_n$  vérifie pour tout  $j$   $\int_{-\infty}^{+\infty} t^j f(t) (W(t))^{-1} dt = a_j$ .

## VI

Dans cette question on note

•  $\rho$  un réel strictement positif et  $\sigma = \frac{1}{\rho}$  son inverse;

•  $S^\rho$  l'ensemble des suites complexes  $(a_n)$  telles qu'il existe un réel  $c$  strictement positif (dépendant de la suite) pour lequel on a :

$$\sup_{n \geq 0} [c^{-n} n^{-\rho n} |a_n|] < +\infty$$

•  $S^\rho$  l'ensemble des applications  $f$  indéfiniment dérivables de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$  telles qu'il existe un réel  $c$  strictement positif (dépendant de  $f$ ) pour lequel on a :

$$\sup_{\substack{n \geq 0 \\ x \in \mathbf{R}}} [c^{-n} n^{-\rho n} |f^{(n)}(x)|] < +\infty$$

•  $W_A$  l'application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  :  $t \mapsto W_A(t) = \exp\left(\frac{|t|}{A}\right)^\sigma$ , associée à un réel  $A$  strictement positif quelconque  $\left(\sigma = \frac{1}{\rho}\right)$ .

a. Soit  $g$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$  satisfaisant à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 (W_A(t))^{-1} dt < +\infty$$

Le nombre  $x$  étant réel, on pose :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g(t) (W_A(t))^{-1} dt .$$

Démontrer qu'on définit ainsi une application  $f$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$ , qui est élément de  $S^\rho$  et qui, pour tout entier positif ou nul, satisfait à :

$$f^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t) (W_A(t))^{-1} dt$$

(on rappelle que  $\Gamma(u) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{u-1} dt$  et  $\left(\frac{u}{e}\right)^u \sqrt{\frac{2\pi}{u}}$  sont équivalents lorsque  $u$  tend vers  $+\infty$ ).

b. On suppose désormais  $\rho > 1$ . L'application  $W_A$  vérifie alors les hypothèses de IV et V.

Calculer

$$\mu_A(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r \operatorname{Log} W_A(t)}{r^2 + t^2} dt \quad (\text{utiliser II c.})$$

Démontrer

$$M_j(A) = \sup_{r>0} \left[ r^{j+\frac{1}{2}} \exp(-\mu_A(r)) \right] = \left[ \gamma A \left( j + \frac{1}{2} \right)^\rho \right]^{j+\frac{1}{2}}$$

où  $\gamma$  est un nombre qu'on calculera.

c. Dédurre de Vd. que, pour tout élément  $(a_n)$  de  $S^\rho$ , il existe un élément  $f$  de  $S^\rho$  tel que, pour tout  $n$ , on ait :  $f^{(n)}(0) = a_n$ .

(On cherchera  $f$  de la forme :  $x \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itz} g(t) (W_A(t))^{-1} dt$ , en choisissant  $A$  et  $g$  convenablement).

## RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE

Le texte donné propose l'étude et la résolution d'un cas particulier du problème des moments :

- construire,  $(a_n)$  étant une suite donnée de nombres réels ou complexes, une fonction  $f$  qui satisfait pour tout  $n$  à condition  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt = a_n$  et vérifie des inégalités du type

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} e^{|t|^\sigma} |f(t)| < +\infty \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|t|^\sigma} |f(t)| dt < +\infty ;$$

ou bien de façon équivalente

- construire,  $(\alpha_n)$  étant une suite donnée, une fonction  $g$  indéfiniment dérivable qui satisfait pour tout  $n$  à la condition  $g^{(n)}(0) = \alpha_n$  et dont les dérivées successives vérifient des inégalités données du type

$$|g^{(n)}(t)| \leq C A^n n!^s \quad \text{pour tout } t,$$

$C, A$  et  $s$  étant des constantes données.

Les paragraphes I, II, III et IV sont des préliminaires, qui introduisent et permettent d'utiliser la méthode du majorant harmonique.