

R.L.I.

Note

Prog.  
Sens

## COMPOSITION D'ANALYSE

Sujet (durée : 6 heures)

### PRÉAMBULE

On tient à préciser qu'aucune démonstration faisant intervenir une convergence, une continuité, une dérivabilité sous le signe  $\int$ , (Resp.  $\iint$ ) ne sera prise en considération si les théorèmes invoqués ne sont pas énoncés avec précision au moins une fois dans la copie.

### NOTATIONS

● On désigne respectivement par  $\mathbb{R}$ ,  $\overline{\mathbb{R}}$ ,  $\mathbb{C}$  le corps des réels, la droite réelle achevée, le corps des complexes. On identifie  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$  de sorte que si  $(x, y)$  est élément de  $\mathbb{R}^2$  on pose :

$$z = x + iy = (x, y)$$

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

● Dans tout le problème on considère un entier  $s$  ( $s \geq 1$ ); pour tout élément  $z$  de  $\mathbb{C}$  et tout élément  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$  de  $\mathbb{C}^s$  on pose :

$$P_s(z, \lambda) = z^s + \lambda_1 z^{s-1} + \dots + \lambda_s.$$

et  $P'_s(z, \lambda) = s z^{s-1} + \lambda_1 (s-1) z^{s-2} + \dots + \lambda_{s-1}.$

Pour  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}^s$ , on note  $(r_1, \dots, r_s)$  la suite des racines du polynôme  $P_s(z, \lambda)$ , de sorte que :

$$P_s(z, \lambda) = \prod_{j=1}^{j=s} (z - r_j);$$

on note  $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$  l'ensemble de ses racines distinctes, de sorte que :

$$P_s(z, \lambda) = \prod_{j=1}^{j=k} (z - z_j)^{s_j}$$

où l'entier  $s_j$  ( $s_j \geq 1$ ) représente l'ordre de multiplicité de  $z_j$ .

● Soient  $p$  un entier ( $p \geq 1$ ) et  $F$  une application de  $\mathbb{C}^p$  dans  $\mathbb{C}$ , on dit que  $F$  est de classe  $C^r$  si et seulement si  $F$  est  $r$  fois continûment différentiable en tant qu'application de  $\mathbb{R}^{2p}$  dans  $\mathbb{C}$ ; on dit que  $F$  est de classe  $C^\infty$  si et seulement si elle est de classe  $C^r$  pour tout  $r$ .

● Les opérateurs différentiels  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  et  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  sont notés respectivement  $\frac{\partial}{\partial z}$  et  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ .

Pour  $p$  et  $q$  entiers naturels on pose :

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial \bar{z}^q} = \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^p \circ \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^q.$$

### DÉFINITIONS

Soit  $F$  une application de  $\mathbb{C}^p$  dans  $\mathbb{C}$  supposée de classe  $C^\infty$ ; soit  $a$  un point de  $\mathbb{C}^p$ , soit  $r$  un entier ( $r \geq 0$ ); on dit que  $F$  est  $r$ -plate au point  $a$  si et seulement si  $F$  s'annule en  $a$  ainsi que toutes ses différentielles jusqu'à l'ordre  $r$  inclus. On dit que  $F$  est plate en  $a$  si et seulement si, pour tout entier  $r$ ,  $F$  est  $r$ -plate en  $a$ .

Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{C}^p$ , on dit que  $F$  est  $r$ -plate (Resp. plate) sur  $X$  si et seulement si  $F$  est  $r$ -plate (Resp. plate) en chaque point de  $X$ .

Dans tout le problème  $f$  est une application de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  et  $g$  une application de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ .

L'objet du problème est d'établir une identité de division de  $f$ , (Resp.  $g$ ) par le polynôme  $P_s(z, \lambda)$ , (Resp.  $P_s(x, \lambda)$ ) et d'étudier comment le quotient et le reste définis à cette occasion dépendent de  $\lambda$ .

On note  $\Delta$  l'opérateur différentiel  $\frac{\partial^{p-1}}{\partial \lambda^\alpha \partial \bar{\lambda}^\beta \partial \eta^\gamma}$

où  $\partial \lambda^\alpha$  (Resp :  $\partial \bar{\lambda}^\beta$ ) est mis pour

$$\partial \lambda_1^{\alpha_1} \dots \partial \lambda_s^{\alpha_s} \quad (\text{Resp : } \partial \bar{\lambda}_1^{\beta_1} \dots \partial \bar{\lambda}_s^{\beta_s})$$

R.I.I

Note

$$\text{En posant } Q(x, \eta, \lambda) = \left| \frac{P'_s(x + \eta i, \lambda)}{P_s(x + \eta i, \lambda)} \right|^2$$

démontrer que :

Prog  
Sens

a. On a : pour tout  $(\eta, \lambda)$  dans  $\Omega$  et tout  $x$  réel :

$$\Delta Q(x, \eta, \lambda) = \frac{A(x, \eta, \lambda)}{|P_s(x + \eta i, \lambda)|^{2p}}$$

où  $A$  est un polynôme en  $x, \eta, \lambda_1, \dots, \lambda_s, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_s$  dont le degré en  $x$  est au plus  $2ps - 2$ .

b. L'application  $\sigma$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$ .

c. Pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s$  et tout triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , il existe un réel  $C_K$  tel que :

$$\forall (\eta, \lambda) \in \Omega \cap K \quad |\Delta \sigma(\eta, \lambda)| \leq C_K \left( 1 + \frac{1}{\delta(\eta, \lambda)^{2ps}} \right)$$

## DEUXIÈME PARTIE

Sauf au 4°, on a fixé  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}^s$  et on écrit  $P(z)$  au lieu de  $P_s(z, \lambda)$ .

1° a. Soit  $s_0$  un entier ( $s_0 \geq 1$ ); en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, démontrer qu'il existe une unique application de classe  $C^\infty$ , notée  $Q_0$ , de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , et un unique polynôme  $R_0$  de degré au plus  $s_0 - 1$ , tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = R_0(t) + t^{s_0} Q_0(t)$$

b. Démontrer qu'il existe une application de classe  $C^\infty$  notée  $Q$ , de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , et un polynôme  $R$  de degré au plus  $s - 1$  tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = P(t) Q(t) + R(t)$$

Démontrer que le couple  $(Q, R)$  est unique si et seulement si  $P$  a toutes ses racines réelles.

2° Soient  $m$  et  $n$  deux entiers ( $m \geq 1, n \geq 1$ ), démontrer que l'application  $w : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad w(z) = \frac{z^{n+m}}{z^n}$$

se prolonge de manière unique en une application  $w_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^{m-1}$ .

3° a. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction d'une variable réelle, démontrer l'égalité :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall h \in \mathbb{C}$$

$$f(z+h) = f(z) + \sum_{1 \leq p+q \leq r} \frac{h^p \bar{h}^q}{p! q!} \frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p \partial \bar{z}^q}(z) +$$

$$(r+1) \sum_{p+q=r+1} \frac{h^p \bar{h}^q}{p! q!} E_{p,q}(z, h)$$

$$\text{où } E_{p,q}(z, h) = \int_0^1 (1-t)^r \frac{\partial^{r+1} f}{\partial z^p \partial \bar{z}^q}(z+th) dt$$

b. On suppose l'application  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  plate sur l'ensemble  $Z$  des zéros de  $P$ .

Démontrer qu'il existe une unique application de classe  $C^\infty$ , notée  $Q$ , de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ , et un unique polynôme  $R$  de degré au plus  $s - 1$  tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = P(z) Q(z) + R(z)$$

c. Démontrer que si  $f$  est holomorphe,  $Q$  l'est aussi.

d. Démontrer que le résultat de b. subsiste si l'on suppose seulement que  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  est, pour tout  $j$  ( $1 \leq j \leq k$ )  $(s_j - 1)$ -plate au point  $z_j$ .

4° Soit  $F$  une application de classe  $C^\infty$ , de  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$  dans  $\mathbb{C}$ ; on suppose  $F$  plate sur l'ensemble  $X$  des couples  $(z, \lambda)$  vérifiant  $P_s(z, \lambda) = 0$ .

Démontrer que pour tout entier naturel  $r$  ( $r \geq 1$ ) l'application :

$$(z, \lambda) \mapsto \frac{F(z, \lambda)}{(P_s(z, \lambda))^r}$$

de  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s \setminus X$  dans  $\mathbb{C}$  se prolonge de façon unique en une application de  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$  dans  $\mathbb{C}$ , de classe  $C^\infty$ .

*Indication :* on commencera par démontrer que l'application :

$$\Phi : (z, \lambda_1, \dots, \lambda_s) \mapsto (z, \lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}, P_s(z, \lambda))$$

de  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$  dans lui-même est un changement de variable  $C^\infty$ , c'est-à-dire une application bijective de classe  $C^\infty$  ainsi que sa réciproque.

### TROISIÈME PARTIE

Pour tout réel  $\xi$  on note :  $I(\xi) = \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{1 + |\xi|}, \frac{1}{1 + |\xi|} \right]$

et  $A$  la partie de  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$  formée par les triplets  $(\xi, \lambda, y)$  tels que  $y$  appartienne à  $I(\xi)$ .

On note  $\rho_0$  une application de  $\overline{\mathbb{R}}$  dans  $[0, 1]$ , de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , paire, et vérifiant :

$$\forall t \in [8s^3, +\infty] \quad \rho_0(t) = 0$$

$$\forall t \in [0, 4s^3] \quad \rho_0(t) = 1$$

L'existence de  $\rho_0$  est admise.

1° a. Démontrer que l'application :

$$(\xi, \lambda, \eta) \mapsto \rho_0 \left( \frac{\sigma(\eta, \lambda)}{1 + |\xi|} \right)$$

de  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$  est de classe  $C^\infty$  en  $(\lambda, \eta)$  et que ses différentielles sont continues à tout ordre en  $(\xi, \lambda, \eta)$ .

b. Soit  $\Psi$  l'application de  $A$  dans  $\mathbb{R}^+$  définie par :

$$\forall (\xi, \lambda, y) \in A \quad \Psi(\xi, \lambda, y) = 4(1 + |\xi|) \int_y^{\frac{1}{1 + |\xi|}} \rho_0 \left( \frac{\sigma(\eta, \lambda)}{1 + |\xi|} \right) d\eta.$$

Démontrer que pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}^s$  et tout réel  $\xi$  on a :

$$\Psi \left( \xi, \lambda, \frac{1}{2(1 + |\xi|)} \right) \geq 1.$$

Prouver que  $\Psi$  est continue, qu'elle est de classe  $C^\infty$  sur  $\overset{\circ}{A}$  en  $(\lambda, y)$ , et que ses différentielles sont continues à tout ordre en  $(\xi, \lambda, y)$  sur  $\overset{\circ}{A}$ .

2° Soit  $\alpha$  un réel,  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ; soit  $\rho_1$  une application de  $\mathbb{R}^+$  dans  $[0, 1]$  de classe  $C^\infty$ , vérifiant :

$$\forall t \in [0, \alpha] \quad \rho_1(t) = 0$$

$$\forall t \in [1 - \alpha, +\infty[ \quad \rho_1(t) = 1$$

L'existence de  $\rho_1$  est admise.

On note  $\rho$  l'application de  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$  définie par :

$$(\xi, \lambda, y) \mapsto \rho(\xi, \lambda, y) \text{ avec :}$$

i.  $\rho$  est paire en  $y$

ii. si  $0 \leq y < \frac{1}{2(1 + |\xi|)}$   $\rho(\xi, \lambda, y) = 1$

iii. si  $y \in I(\xi)$   $\rho(\xi, \lambda, y) = \rho_1(\Psi(\xi, \lambda, y))$

iv. si  $y > \frac{1}{1 + |\xi|}$   $\rho(\xi, \lambda, y) = 0$

a. Prouver que  $\rho$  est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$  par rapport à  $(\lambda, y)$ , chacune de ses différentielles étant continue par rapport à  $(\xi, \lambda, y)$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$ .

b. Prouver l'existence d'un ouvert contenant  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \{0\}$  sur lequel  $\rho$  est constante égale à 1.

Prouver que  $\rho(\xi, \lambda, y)$  est nul dès que  $|y\xi| \geq 1$ .

c. Démontrer l'existence d'un ouvert contenant l'ensemble :

$$\{(\xi, \lambda, y) \mid \xi \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}^s, y \in \mathbb{R} \text{ et } (y, \lambda) \notin \Omega\}$$

sur lequel  $\frac{\partial \rho}{\partial y}$  est nulle.

d. Démontrer que pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$  et tout triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de  $\mathbb{N}^s \times \mathbb{N}^s \times \mathbb{N}$ , il existe un réel  $D_K$  et un entier naturel  $q$  tels que :

$$\forall (\xi, \lambda, y) \in \mathbb{R} \times K \quad \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|+\gamma} \rho}{\partial \lambda^\alpha \partial \bar{\lambda}^\beta \partial y^\gamma} (\xi, \lambda, y) \right| \leq D_K (1 + |\xi|^q)$$

#### QUATRIÈME PARTIE

On suppose dans cette partie que  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est de classe  $C^\infty$  et est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

On admet l'existence d'une fonction  $\hat{g}$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , continue telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x \mapsto |x^n \hat{g}(x)| \text{ est bornée sur } \mathbb{R}$$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \hat{g}(\xi) d\xi.$$

On définit alors  $F$  de  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$  dans  $\mathbb{C}$  par :

$$\forall (z, \lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^s \quad F(z, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi, \lambda, y) e^{iz\xi} \hat{g}(\xi) d\xi$$

où on a posé  $z = x + iy$ ; et où  $\rho$  est l'application définie à III, 2°.

1° Démontrer que  $F$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$  et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^s \quad g(x) = F(x, \lambda).$$

2° Démontrer que  $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$  est plate en tout point  $(z, \lambda)$  tel que  $z \in \mathbb{R}$

3°  $F_z(z, \lambda) = 0$ .

4° Soit  $D$  le disque fermé dans  $\mathbb{C}$  de centre  $\omega$  et de rayon  $R$  ( $R > 0$ ); démontrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \cap \overset{\circ}{D}, \forall \lambda \in \mathbb{C}^s$$

$$F(t, \lambda) = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\omega + Re^{i\theta}, \lambda)}{\omega + Re^{i\theta} - t} e^{i\theta} d\theta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z, \lambda) \frac{dx dy}{z - t}$$

5° Prouver l'existence de polynômes  $R_j(u, \lambda)$  tels que l'on ait l'identité de fractions rationnelles :

$$\frac{1}{u - z} = \frac{P_s(z, \lambda)}{P_s(u, \lambda)} \frac{1}{u - z} + \sum_{j=1}^{j=s} \frac{R_{j-1}(u, \lambda)}{P_s(u, \lambda)} z^{s-j}$$

et démontrer l'existence d'une fonction  $Q : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^\infty$ , et d'un polynôme en  $t$

$$R(t, \lambda) = a_1(\lambda) t^{s-1} + \dots + a_s(\lambda)$$

de classe  $C^\infty$  en  $(t, \lambda)$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s$  tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^s \quad g(t) = P_s(t, \lambda) Q(t, \lambda) + R(t, \lambda).$$