

UNIVERSITÉ DE POITIERS
MATHÉMATIQUES

40. AVENUE DU RECTEUR PINEAU
86022 POITIERS FRANCE
TÉL. 49 46 26 30
POSTE 671

*Agreg 1989-1990
Devoir d'analyse à
remettre le 8 novembre*

6240

COMPOSITION D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

PRÉAMBULE

On note \mathbb{R} le corps des réels. Les espaces vectoriels considérés sont réels et non réduits au vecteur nul.

Si E et F sont deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F , muni de la norme usuelle :

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad \|u\| = \sup \left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E \text{ et } x \neq 0 \right\}.$$

PRÉLIMINAIRES

Les résultats des deux dernières questions de cette partie pourront être utilisés dans la suite du problème, même s'ils n'ont pas été démontrés.

Soit γ une application continue de $[0, 1]$ dans un espace vectoriel normé E . On dit que γ est dérivable en 0 si et seulement si

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} \text{ existe ; on la note alors } \gamma'(0).$$

Tournez la page S. V. P.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de E , x_0 un point de Ω et f une application continue sur Ω , à valeurs dans F . On dit que f est *quasi différentiable* en x_0 si et seulement si il existe une application linéaire u de E dans F telle que, pour toute application γ continue de $[0, 1]$ dans Ω , dérivable en 0, vérifiant $\gamma(0) = x_0$, l'application $f \circ \gamma$ est dérivable en 0 et $(f \circ \gamma)'(0) = u(\gamma'(0))$.

1° a. Montrer que si f , continue sur Ω , est quasi différentiable en x_0 , l'application linéaire u est unique. On l'appelle la *quasi-différentielle de f en x_0* et on la note $qf(x_0)$.

b. Montrer que si f , continue sur Ω , est différentiable en x_0 , elle y est quasi différentiable et que $qf(x_0) = df(x_0)$, où $df(x_0)$ désigne la différentielle de f en x_0 .

c. Énoncer et justifier un théorème relatif à la composition des applications quasi différentiables.

2° On suppose, dans cette question seulement, qu'il existe un réel k tel que

$$\forall (x, y) \in \Omega^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

Montrer que s'il existe u linéaire de E dans F telle que pour tout vecteur a de E ,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} = u(a),$$

alors f est quasi différentiable en x_0 .

3° Montrer que si f , continue sur Ω , est quasi différentiable en x_0 , alors $qf(x_0)$ est continue de E dans F .

4° Lorsque E est de dimension finie, montrer que toute application f , continue sur Ω , et quasi différentiable en x_0 , est différentiable en x_0 .

E désignant un espace vectoriel normé, on s'intéresse aux problèmes \mathcal{P} et \mathcal{Q} suivants :

- \mathcal{P} { déterminer l'ensemble P des éléments de E où l'application de E dans \mathbb{R} :
 $x \mapsto \|x\|$, est différentiable, et calculer $df(x_0)$ pour x_0 dans P ;
- \mathcal{Q} { déterminer l'ensemble Q des éléments de E où l'application de E dans \mathbb{R} :
 $x \mapsto \|x\|$, est quasi différentiable, et calculer $qf(x_0)$ pour x_0 dans Q .

I

A

Soient $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, et $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans E . On considère les trois normes :

$$\|x\|_{\infty} = \sup \{ |x_i| ; 1 \leq i \leq n \};$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|;$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1° Résoudre, avec soin, le problème \mathcal{P} pour E muni successivement de chacune de ces trois normes.

2° Préciser dans chaque cas les composantes connexes de P (on en indiquera en particulier le nombre).

B

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $E^* = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ son dual, normé (cf. PRÉAMBULE). On note B et S (resp. B^* et S^*) la boule unité fermée et la sphère unité de E (resp. E^*).

Pour chaque x_0 de S , on note L_{x_0} l'ensemble des formes linéaires φ , appartenant à S^* , telles que

$$(1) \quad \forall x \in B, \quad \varphi(x) \leq \varphi(x_0) = 1.$$

On admet que, pour tout x_0 de S , cet ensemble L_{x_0} n'est pas vide.

Toute application l , de S dans S^* , qui, à tout x_0 de S , associe un élément l_{x_0} de L_{x_0} est appelée *fonction de dualité*.

On dit que B est *lisse* en x_0 ($x_0 \in S$) si et seulement si L_{x_0} est de cardinal 1.

On dit que B est *strictement convexe* en x_0 (x_0 élément de S) si et seulement si $B \setminus \{x_0\}$ est convexe.

1° Soit $l : S \rightarrow S^*$ une fonction de dualité. Démontrer que si B est lisse en x_0 , alors B^* est strictement convexe en l_{x_0} .

2° Démontrer que, si pour toute fonction de dualité l , B^* est strictement convexe en l_{x_0} , alors B est lisse en x_0 .

3° Soient (x, y) un élément de S^2 , et λ un réel strictement positif tel que $x + \lambda y$ soit non nul. Soit $z = \frac{x + \lambda y}{\|x + \lambda y\|}$. Démontrer que, pour toute fonction de dualité l :

$$l_x(y) \leq \frac{\|x + \lambda y\| - 1}{\lambda} \leq l_z(y).$$

4° Soient x_0 un élément de S et l une fonction de dualité. Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

- a. B est lisse au point x_0 ,
- b. l est continue au point x_0 ,
- c. la norme est différentiable au point x_0 .

II

1° Résoudre les problèmes \mathcal{P} et \mathcal{Q} lorsque E est un espace euclidien qui n'est pas de dimension finie.

2° Soit F l'espace vectoriel des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels, qui convergent vers 0. On le norme en posant : $\|x\|_\infty = \sup \{ |x_n| ; n \in \mathbb{N} \}$.

Résoudre les problèmes \mathcal{P} et \mathcal{Q} pour F . Quelles sont les composantes connexes de P et Q ?

3° Soit G l'espace vectoriel des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série de terme général $|x_n|$ converge. On le norme en posant :

$$\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|.$$

Tournez la page S. V. P.

a. Résoudre le problème \mathcal{Q} pour G . L'ensemble Q est-il ouvert? Préciser ses composantes connexes.

b. Résoudre le problème \mathcal{P} pour G .

III

Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , normé par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sup \{ |x(t)| ; t \in [0, 1] \}.$$

1° Montrer que si l'application de E dans $\mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$, est quasi différentiable en x_0 , l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R} : t \mapsto |x_0(t)|$, n'atteint son maximum qu'en un seul point.

2° a. Soient a et b deux éléments de E . Montrer que l'application de \mathbb{R} dans $\mathbb{R} : \lambda \mapsto \|a + \lambda b\|$ admet, en tout point, une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

b. Soit x_0 un élément de E tel que l'application : $t \mapsto |x_0(t)|$ n'atteigne son maximum qu'en un seul point t_0 .

Soient a un élément de E et λ un réel; on note t_λ la borne supérieure de l'ensemble des éléments de $[0, 1]$ où l'application : $t \mapsto |x_0(t) + \lambda a(t)|$ atteint son maximum.

Montrer que $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} t_\lambda = t_0$.

c. En déduire la solution du problème \mathcal{Q} pour E . L'ensemble Q est-il ouvert? Quelles sont ses composantes connexes?

3° Résoudre le problème \mathcal{P} pour E .

