

COMPOSITION D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

INTRODUCTION

Dans tout le problème, E_0 (resp. L^1) désigne l'espace vectoriel des fonctions (resp. classes de fonctions) continues et bornées sur $\mathbb{R}^2$ (resp. intégrables pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$), à valeurs complexes.

E_1 est l'ensemble des éléments de E_0 dont la classe appartient à L^1 ; comme c'est l'usage, on notera par une même lettre une classe de fonctions et un représentant de cette classe.

On pose :

$$\|f\|_\infty = \sup (\{ |f(u, v)| \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2 \}) \quad \text{pour } f \in E_0,$$

et

$$\|f\|_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} |f(u, v)| \, du \, dv \quad \text{si } f \in L^1;$$

on abrège en « p.p. » l'expression « presque partout », et en « $\iint$ » le signe « $\iint_{\mathbb{R}^2}$ ».

Si f est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ et si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $f_{a, b}$ la fonction définie par $f_{a, b}(x, y) = f(a + x, b + y)$; a étant > 0 , Δ_a représente l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $-a \leq x \leq a$ et $-a \leq y \leq a$.

On rappelle enfin que $\int_0^a \frac{\sin t}{t} \, dt$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand le réel a tend vers $+\infty$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$ vaut $\sqrt{\pi}$.

Les quatre parties sont dépendantes, mais on peut traiter chacune en admettant les résultats de celles qui précèdent.

PREMIÈRE PARTIE

1° a. Soient f et g appartenant à L^1 ; montrer — par exemple à l'aide du théorème de Fubini — que la quantité

$(f * g)(x, y) = \iint f(x - u, y - v) g(u, v) \, du \, dv$ est définie pour presque tout (x, y) , que $f * g \in L^1$ et que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Si $g \in E_1$, établir que $f * g$ appartient aussi à E_1 et majorer $\|f * g\|_\infty$ en fonction de $\|f\|_1$ et $\|g\|_\infty$.

b. f étant toujours dans L^1 , on pose $\widehat{f}(x, y) = \iint f(u, v) e^{i(ux + vy)} \, du \, dv$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; prouver que $\widehat{f} \in E_0$ et que, si $g \in L^1$, $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$.

2° a. Soit $\lambda > 0$; pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et $a > 0$, on pose

$$I_{u,v}(a) = \iint_{\Delta_a} \frac{e^{i(ux+vy)} \sin \lambda x \sin \lambda y}{xy} dx dy$$

Mettre $I_{u,v}(a)$ sous forme du produit de deux intégrales simples; montrer qu'il est borné indépendamment de (u, v, a) et que, lorsque a tend vers $+\infty$, $I_{u,v}(a)$ tend vers : π^2 si $(u, v) \in \overset{\circ}{\Delta}_\lambda$ (intérieur de Δ_λ) et 0 si $(u, v) \notin \Delta_\lambda$.

b. Lorsque $f \in L^1$, déduire du a. la limite de

$$\iint_{\Delta_a} \hat{f}(x, y) \frac{\sin \lambda x \sin \lambda y}{xy} dx dy$$

quand a tend vers $+\infty$.

c. On suppose que $f \in E_1$ et que $\hat{f} = 0$. Établir que $f(0,0) = 0$, puis que $f(a, b)$ est nul pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (on pourra utiliser la fonction $f_{a,b}$).

3° f désigne un élément de L^1 .

a. Montrer que $\|f_{a,b} - f\|_1$ tend vers 0 quand (a, b) tend vers $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ (on pourra, par exemple, approcher f par des fonctions continues à support compact).

b. Prouver que, si $f * g = 0$ pour tout $g \in E_1$, alors $f = 0$ p.p.

c. Déduire des résultats précédents que, si $\hat{f} = 0$, alors $f = 0$ p.p.

4° K est un compact de $\mathbb{R}^2$ et μ_K sa fonction caractéristique.

a. Vérifier que, pour y (resp. x) réel fixé, $\hat{\mu}_K(x, y)$ est une fonction analytique de x (resp. y).

Montrer que, si la fonction $\hat{\mu}_K$ est nulle sur un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, elle l'est alors sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. A quelle condition sur K en est-il ainsi?

b. Application : On suppose que $\overset{\circ}{K}$ n'est pas vide.

Soit $f \in L^1$, telle que $\int_{t(K)} f(u, v) du dv$ soit nulle pour toute translation t du plan affine $\mathbb{R}^2$; démontrer qu'alors f est nulle presque partout.

5° Soient K' et K'' deux compacts de $\mathbb{R}^2$, « réguliers » en ce sens que chacun est l'adhérence de son intérieur.

On suppose que, pour toute droite affine L , $L \cap K'$ et $L \cap K''$ ont la même longueur (pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$).

a. Établir que $\hat{\mu}_{K'}(x, y) = \hat{\mu}_{K''}(x, y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (on pourra commencer par le cas où $x = 0$).

b. En déduire que $\overset{\circ}{K''}$ est inclus dans K' , puis que $K' = K''$.

DEUXIÈME PARTIE

On note S l'ensemble des fonctions $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ qui ont la propriété suivante : $P(x, y) \frac{\partial^{k+l} \psi}{\partial x^k \partial y^l}(x, y)$ est borné sur $\mathbb{R}^2$ pour tous k, l entiers ≥ 0 et tout polynôme $P \in \mathbb{C}[x, y]$.

1° ψ désigne, dans cette question, un élément de S .

a. Vérifier que S est inclus dans L^1 ; démontrer que ψ est indéfiniment différentiable et appartient à S (on pourra montrer que, si l'on pose

$$\psi_1(u, v) = \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v), \text{ on a } x \hat{\psi}(x, y) = i \hat{\psi}_1(x, y).$$

b. Si $\omega \in S$, prouver que

$$\iint \psi\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}\right) \hat{\omega}(u, v) du dv = \iint \omega\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}\right) \hat{\psi}(u, v) du dv \quad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

Calculer explicitement $\hat{\omega}(x, y)$ pour la fonction $\omega(u, v) = e^{-u^2 - v^2}$.

c. Dédire de ce qui précède que $\psi(0,0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \hat{\psi}(x, y) dx dy$, puis exprimer de manière analogue $\psi(a, b)$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Établir que l'application $\psi \mapsto \hat{\psi}$ définit une bijection de S sur lui-même.

2° Soit $f \in L^1$.

a. Montrer qu'il existe une fonction $\rho \in S$ telle que :

$$\hat{\rho}(x, y) = 1 \text{ si } (x, y) \in \Delta_1 \text{ et } \hat{\rho}(x, y) = 0 \text{ si } (x, y) \notin \Delta_2.$$

Pour $\lambda > 0$ et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on note :

$$\rho_\lambda(u, v) = \frac{1}{\lambda^2} \rho\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}\right) \text{ et } h_\lambda(u, v) = \hat{f}(0,0) \rho_\lambda(u, v) - (f * \rho_\lambda)(u, v).$$

b. Démontrer que $\|h_\lambda\|_1$ tend vers 0 quand $\lambda \rightarrow +\infty$ et que $\|f * \rho_\lambda - f\|_1$ tend vers 0 quand $\lambda \rightarrow +\infty$.

c. Dédire du premier résultat de b que, pour $\delta > 0$, il existe un voisinage V de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une fonction $h \in L^1$ tels que

$$\|h\|_1 < \delta \text{ et } \hat{h}(x, y) = \hat{f}(0,0) - \hat{f}(x, y) \text{ pour } (x, y) \in V.$$

Énoncer et prouver un résultat analogue, où $(0,0)$ est remplacé par un point quelconque (a, b) de $\mathbb{R}^2$.

3° Dans la suite de cette partie, on fixe une fonction $\varphi \in E_0$.

a. Vérifier que $f * \varphi$ conserve un sens pour tout $f \in L^1$, que $f * \varphi$ appartient alors à E_0 , mais plus nécessairement à L^1 .

Montrer que $(f * g) * \varphi = f * (g * \varphi)$ pour f et g appartenant à L^1 .

b. On pose :

$$I_\varphi = \{f \in L^1 / f * \varphi = 0\},$$

$$Z_\varphi = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / \hat{f}(a, b) = 0 \text{ pour tout } f \in I_\varphi\}.$$

Établir que I_φ est un sous-espace vectoriel fermé de L^1 , stable pour $*$, et que Z_φ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

4° On suppose, dans le reste de cette partie, que Z_φ est vide.

a. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, expliquer pourquoi il existe un voisinage V de (a, b) , $f \in I_\varphi$ et $h \in L^1$ tels que :

$$\hat{f}(a, b) = 1, \|h\|_1 < 1 \text{ et } \hat{h}(x, y) = 1 - \hat{f}(x, y) \text{ pour } (x, y) \in V.$$

b. Soit g un élément de L^1 , tel que $\hat{g}$ soit à support compact, inclus dans V . On définit la suite de fonctions (g_n) par : $g_0 = g$ et $g_{n+1} = h * g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \|g_n\|_1$ est convergente et que la fonction $g_\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ est définie presque partout.

Calculer g_∞ en fonction de $\hat{g}$ et $\hat{h}$ uniquement.

c. Prouver que $g = g_\infty * f$ p.p. et que g appartient à I_φ .

En déduire que, si ψ appartient à S et $\hat{\psi}$ est à support compact, alors $\psi \in I_\varphi$.

5° Démontrer que $I_\varphi = L^1$ (on pourra d'abord vérifier que ρ_λ appartient à I_φ pour tout $\lambda > 0$), puis que $\varphi = 0$.

TROISIÈME PARTIE

Pour tout nombre complexe w , on note F_w la fonction définie par $F_w(z) = \exp \left[\frac{w}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right]$ pour $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(w) z^n$ le développement de Laurent de F_w au point 0.

1° a. Pour quelles valeurs de z la série ci-dessus converge-t-elle vers $F_w(z)$? Comment peut-on calculer $J_n(w)$ en fonction de F_w ?

b. Soit Γ le cercle de centre O, de rayon 1, dans le plan complexe, orienté dans le sens trigonométrique; montrer que :

$$J_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{w}{2} \right)^{n+2k} \int_{\Gamma} z^{-n-k-1} e^z dz$$

pour $w \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

c. Lorsque $n \in \mathbb{N}$, expliciter les coefficients de la série entière du b.; quel est son rayon de convergence?

2° a. Prouver que $\frac{d}{dw} (w^n J_n(w)) = w^n J_{n-1}(w)$ pour $w \in \mathbb{C}$ et $n \geq 1$.

b. Établir que :

$$J_n(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - w \sin \theta) d\theta$$

pour $w \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

c. Montrer que l'équation $J_1(x) = 0$ a, au moins, deux racines réelles > 0 ; on notera désormais J l'ensemble des nombres de la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des zéros réels > 0 de la fonction J_1 .

3° a. Soient r un réel > 0 et $D(r)$ le disque fermé de centre O et de rayon r dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Démontrer que $\hat{\mu}_{D(r)}(x, y) = 2\pi \int_0^r J_0(\rho \sqrt{x^2 + y^2}) \rho d\rho$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; en déduire que, si $(x, y) \neq (0, 0)$, $\hat{\mu}_{D(r)}(x, y)$ vaut $\frac{2\pi r}{\sqrt{x^2 + y^2}} J_1(r \sqrt{x^2 + y^2})$.

Quelle est la valeur de $\hat{\mu}_{D(r)}(0, 0)$?

b. Soient K un compact de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi \in E_0$, tels que $\mu_K * \varphi = 0$.

Montrer que, pour tout $(a, b) \in Z_\varphi$, on a $\hat{\mu}_K(a, b) = 0$ (Z_φ a été défini au 3° de la deuxième partie).

4° Application.

a. Soit $\varphi \in E_0$, ayant la propriété suivante :

(1) il existe deux réels > 0 , r_1 et r_2 tels que $\frac{r_1}{r_2} \notin J$ et que

$\iint_D \varphi(x, y) dx dy$ soit nulle pour tout disque D , de centre quelconque et de rayon $r \in \{r_1, r_2\}$.

Prouver que φ est identiquement nulle.

b. Vérifier que la conclusion de a. tombe en défaut si l'on ne suppose pas que $\frac{r_1}{r_2} \notin J$ (on pourra, par exemple, montrer que la fonction $\varphi(x, y) = \sin y$ a une intégrale nulle sur tout disque ayant pour rayon l'un quelconque des zéros réels > 0 de la fonction J_1).

5° Si f appartient à L^1 et vérifie la propriété (1) du a., est-elle nulle presque partout?

QUATRIÈME PARTIE

On note $\mathcal{O}$ le groupe des déplacements affines du plan $\mathbb{R}^2$; si K est un compact de $\mathbb{R}^2$, une fonction $\varphi \in E_0$ est dite *K-inerte* lorsque $\iint_{d(K)} \varphi(x, y) dx dy$ est nulle pour tout $d \in \mathcal{O}$.

On dit que K est *descriptif* lorsque 0 est la seule fonction K -inerte dans E_0 .

1° Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$.

a. On suppose que $\hat{\mu}_K(0, 0) \neq 0$ et que $\hat{\mu}_K$ n'est, dans $\mathbb{R}^2$, identiquement nulle sur aucun cercle de centre 0.

Démontrer qu'alors K est descriptif.

b. Pour x et y complexes, on pose encore

$$\hat{\mu}_K(x, y) = \iint \mu_K(u, v) e^{i(ux + vy)} du dv.$$

Prouver que la conclusion de a. demeure, si l'on suppose seulement que $\hat{\mu}_K(0, 0) \neq 0$ et que $\hat{\mu}_K$ n'est identiquement nulle sur aucun des

$$\Gamma_r = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / x^2 + y^2 = r^2\} \quad \text{pour } r > 0.$$

2° a. Montrer qu'aucun disque fermé n'est un compact descriptif.

b. Établir, par contre, que le compact délimité par une ellipse, non circulaire et non réduite à un segment, est descriptif.

c. Qu'en est-il pour un carré?

3° a. Soient $a < b$ et $c > 0$ trois nombres réels, et T le compact délimité par le triangle $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, c)$.

$r > 0$ étant fixé, on pose : $x_t = t$ et $y_t = -it\sqrt{1 - \frac{r^2}{t^2}}$ pour $t \geq r$.

Calculer explicitement $\hat{\mu}_T(x_t, y_t)$ et démontrer qu'il existe un nombre complexe $k \neq 0$, indépendant de t , tel que la fonction $\hat{\mu}_T(x_t, y_t)$ soit équivalente à $\frac{k}{t^2} e^{ct}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

b. Soit K_0 un compact dont tous les points ont une ordonnée ≤ 0 ; prouver que $\hat{\mu}_{K_0}(x_t, y_t)$ reste borné lorsque $t \rightarrow +\infty$.

c. Établir que $K_0 \cup T$ est descriptif.

4° Démontrer que tout compact convexe, d'intérieur non vide, dont la frontière est une ligne polygonale, est descriptif.

5° Soit K un compact convexe, d'intérieur non vide, dont la frontière Γ est un arc de classe C^1 par morceaux.

On suppose que Γ a, au moins, un point anguleux C , c'est-à-dire tel que les deux demi-tangentes en C à Γ soient distinctes.

Démontrer que K est descriptif.