

# Agrégation de mathématiques

Composition d'analyse

1984

## NOTATIONS.

Dans tout le problème,  $\Omega$  désignera un ouvert borné connexe non vide de  $\mathbb{R}^2$ , dont la frontière  $\partial\Omega$  est une courbe  $C^\infty$  par morceaux. On notera  $x = (x_1, x_2)$  les points de  $\mathbb{R}^2$ . On rappelle que l'opérateur de Laplace (ou laplacien)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

s'écrit en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , et pour  $r \neq 0$ , sous la forme

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

On note  $L_{loc}^1(\Omega)$  l'ensemble des classes de fonctions mesurables, à valeurs réelles, qui sont intégrables (pour la mesure de Lebesgue  $dx$ ) dans tout ouvert  $\Omega'$  relativement compact dans  $\Omega$  ( $\Omega' \subset \Omega$ ); on a  $L^2(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$ .

On désigne par  $C_0^k(\Omega)$ ,  $0 \leq k \leq \infty$ , l'ensemble des fonctions réelles définies sur  $\Omega$ , de classe  $C^k$  et à support compact dans  $\Omega$ . On note  $\text{supp}(f)$  le support de la fonction  $f$ . On rappelle que  $C_0^k(\Omega)$  est dense dans  $L^1(\Omega)$  pour  $0 \leq k \leq \infty$ . On utilisera de même les notations  $L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $C_0^k(\mathbb{R}^2)$ , ...

Soit  $a$  une constante réelle; on dit qu'une fonction  $u$  de  $L_{loc}^1(\Omega)$  est une *solution faible* de l'équation  $(\Delta + a)u = 0$  dans  $\Omega$  (ou encore qu'elle vérifie  $(\Delta + a)u = 0$  au sens faible dans  $\Omega$ ) si, pour toute fonction  $\varphi$  de  $C_0^\infty(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} u(x)(\Delta\varphi(x) + a\varphi(x)) dx = 0.$$

Si  $u$  est dans  $C^2(\Omega)$ , et si  $\Delta u(x) + au(x) = 0$  pour tout  $x$  de  $\Omega$ , on dira que  $u$  est une *solution classique* de l'équation  $(\Delta + a)u = 0$  dans  $\Omega$ . On notera  $\nabla u(x)$  le vecteur (gradient de  $u$ )

$$\nabla u(x) = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) \right).$$

On pose aussi  $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ ,  $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x - x_0\| < R\}$ ,

$$S(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x - x_0\| = R\} \quad \text{et} \quad \bar{B}(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x - x_0\| \leq R\} \quad (\text{où } R > 0).$$

On rappelle enfin les notations suivantes :

- pour  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $\alpha_1! = \alpha_1! \alpha_2!$ ,
- pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$  et  $\partial^\alpha u(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\alpha_2} u(x)$ .

## BUT DU PROBLÈME.

Ce problème étudie certaines propriétés des solutions (quand elles existent) de l'équation  $(\Delta + a)u = 0$  dans  $\Omega$ . Dans la première partie, on étudie les propriétés de régularité dans  $\Omega$  des solutions faibles éventuelles de  $(\Delta + a)u = 0$ . Dans la deuxième partie, on étudie la géométrie locale de l'ensemble  $u^{-1}(0)$  où  $u$  est une solution faible d'une équation  $(\Delta + a)u = 0$ . La troisième partie est consacrée à la recherche de couples  $(a, u) \in \mathbb{R} \times H$  tels que  $u$  soit une solution faible de l'équation  $(\Delta + a)u = 0$  ( $u \neq 0$ ), où  $H$  est un certain espace de fonctions. La quatrième partie est une partie de synthèse où l'on étudie des propriétés géométriques semi-globales de l'ensemble  $u^{-1}(0)$ , où  $u$  est une solution faible d'une équation  $(\Delta + a)u = 0$ .

NOTA. — Les trois premières parties du problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres (quitte à admettre certains résultats).

1° a) M

complexe z

(1)

où ' désigne

1° b) M

réel, noté j,

1° c) S

est  $C^\infty$  dan

2° Soit

2° a) M

est définie

2° b) I

3° Soit

3° a) I

3° b) I

$\mathcal{R}$

Soit U le

Montr

séparément

$z_2 \mapsto E_k(z$

$\{z_1 \in \mathbb{C} : (z$

4° Pot

de Lebesgu

4° a) I

4° b) I

(On pourra

5° Le

faible de l'

dans  $\Omega$ . So

telle que  $\beta$ :

fonctions c

5° a)

$\mathbb{R}^2$ ; montr

5° b)

On choisit

## PREMIÈRE PARTIE.

1° a) Montrer que la somme  $J(z)$  de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{4^n (n!)^2}$  est une fonction entière de la variable complexe  $z$  et qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$(1) \quad zf''(z) + f'(z) + zf(z) = 0$$

où ' désigne la dérivation par rapport à la variable complexe  $z$ .

1° b) Montrer que la fonction  $J(s)$ , obtenue par restriction à  $\mathbb{R}$  de la fonction du 1° a), a un et un seul zéro réel, noté  $j_0$ , entre 0 et  $\sqrt{8}$  (on pourra situer ce zéro par rapport à 2).

1° c) Soit  $R > 0$ . Montrer que la fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$e(x) = e(x_1, x_2) = J\left(\frac{j_0}{R} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

est  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^2$  et qu'elle vérifie  $(\Delta + \frac{j_0^2}{R^2})e(x) = 0$ ,  $e(x) = 0$  si  $x \in S(O, R)$  et  $e(x) > 0$  si  $x \in B(O, R)$ .

2° Soit  $C_0 = \{z \in \mathbb{C}, z \notin \mathbb{R}_-\}$ . On désigne par  $\text{Log}(z)$  la détermination principale du logarithme dans  $C_0$ .

2° a) Montrer que la fonction

$$Y(z) = \text{Log}(z)J(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) (-1)^n \frac{z^{2n}}{4^n (n!)^2}$$

est définie et holomorphe sur  $C_0$  et qu'elle y vérifie l'équation différentielle (1) du 1° a).

2° b) Établir que  $\lim zY(z) = 0$  et  $\lim zY'(z) = 1$ , où les limites sont prises pour  $z \in C_0$ ,  $z$  tendant vers 0.

3° Soit  $k > 0$  un réel fixé. On pose

$$E_k(x) = E_k(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} Y(k\sqrt{x_1^2 + x_2^2}).$$

3° a) Montrer que  $E_k$  est une fonction  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  et qu'elle y vérifie  $(\Delta + k^2)E_k(x) = 0$ .

3° b) Pour  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ , on pose  $z = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$ ,

$$\mathcal{R}(z) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \mathcal{I}(z) = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad |z|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 = \mathcal{R}(z)^2 + \mathcal{I}(z)^2.$$

Soit  $U$  le voisinage de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  dans  $\mathbb{C}^2$  défini par  $U = \{z \in \mathbb{C}^2 : \mathcal{I}(z) < \mathcal{R}(z)\}$ .

Montrer que  $E_k$  peut se prolonger en une fonction, encore notée  $\tilde{E}_k$ , de  $U$  dans  $\mathbb{C}$  qui soit continue sur  $U$  et séparément holomorphe en chacune des variables  $z_1, z_2$  sur  $U$  [c'est-à-dire : pour  $z_1$  (resp.  $z_2$ ) fixé, la fonction  $z_2 \mapsto \tilde{E}_k(z_1, z_2)$  (resp.  $z_1 \mapsto \tilde{E}_k(z_1, z_2)$ ) est holomorphe dans l'ouvert  $\{z_2 \in \mathbb{C} : (z_1, z_2) \in U\}$  (resp.  $\{z_1 \in \mathbb{C} : (z_1, z_2) \in U\}$ ].

4° Pour  $\psi$  dans  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$  et  $\varphi$  dans  $C^\infty_0(\mathbb{R}^2)$ , on pose  $(\psi * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(y)\varphi(x-y) dy$  où  $dy$  est la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^2$ .

4° a) Montrer que  $E_k$  est dans  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$  et que pour toute  $\varphi$  dans  $C^\infty_0(\mathbb{R}^2)$ ,  $E_k * \varphi$  est  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

4° b) Montrer que pour toute  $\varphi$  de  $C^\infty_0(\mathbb{R}^2)$  et pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^2$ , on a

$$(\Delta + k^2)(E_k * \varphi)(x) = (E_k * (\Delta + k^2)\varphi)(x) = \varphi(x).$$

(On pourra se ramener au cas  $x = 0$ ; intégrer sur un domaine  $|x| \geq \varepsilon$ , passer en polaires et intégrer par parties.)

5° Le nombre  $k$  étant fixé, on pose, pour simplifier,  $E = E_k$  et  $P = \Delta + k^2$ . Soit  $u$  dans  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  une solution faible de l'équation  $Pu = 0$  dans  $\Omega$ . On se donne  $x_0$  dans  $\Omega$  et  $R > 0$  tels que le disque  $\bar{B}(x_0, 2R)$  soit contenu dans  $\Omega$ . Soit  $\alpha$  dans  $C^\infty_0(\Omega)$  identiquement égale à 1 sur  $B(x_0, 2R)$ . Soit  $\beta$  dans  $C^\infty_0(B(0, 2\varepsilon))$  une fonction *paire* telle que  $\beta$  soit identiquement égale à 1 sur  $B(0, \varepsilon)$  où l'on choisit  $\varepsilon$  tel que  $2\varepsilon < R$  [on admettra l'existence de telles fonctions  $\alpha$  et  $\beta$ ]. On pose enfin  $F_1 = \beta E$  et  $F_2 = (1 - \beta)E$ .

5° a) Montrer que  $F_1$  est dans  $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  et dans  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ , et qu'elle est nulle en dehors d'un compact de  $\mathbb{R}^2$ ; montrer que  $F_2$  est dans  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

5° b) Montrer que pour toute  $\varphi$  de  $C^\infty_0(\Omega)$ , avec  $\text{supp } \varphi \subset B(x_0, R)$ , on a

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = \int_{\Omega} \alpha(x)u(x)P(F_1 * \varphi)(x) dx + \int_{\Omega} \alpha(x)u(x)P(F_2 * \varphi)(x) dx.$$

On choisit maintenant  $\varphi$  comme ci-dessus, c'est-à-dire  $\varphi \in C^\infty_0(B(x_0, R))$ .

5° c) Montrer que  $\text{supp}(F_1 * \varphi) \subset B(x_0, 2R)$  et que

$$\int_{\Omega} \alpha(x)u(x)P(F_1 * \varphi)(x) dx = 0.$$

5° d) Montrer que  $\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = \int_{\Omega} [(\alpha u) * PF_2](x)\varphi(x) dx$ ; en déduire que  $u$  est dans  $C^\infty(B(x_0, R))$ . En conclure que toute solution faible  $u$  de  $Pu = 0$  dans  $\Omega$  est  $C^\infty$  dans  $\Omega$  (c'est-à-dire  $u$  est égale presque partout à une fonction  $C^\infty$  encore notée  $u$ ), et que  $Pu = 0$  au sens classique.

6° On reprend les notations du 5°. On se propose de démontrer que  $u$  est analytique en la variable  $(x_1, x_2)$  dans  $\Omega$ , c'est-à-dire pour tout  $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$  de  $\Omega$ , il existe  $R > 0$  tel que si  $|x_1 - x_1^0| < R$  et  $|x_2 - x_2^0| < R$  alors,

$$u(x_1, x_2) = \sum_{p, q \geq 0} a_{pq}(x_1 - x_1^0)^p(x_2 - x_2^0)^q.$$

6° a) On pose  $v = P(\alpha u)$ . Pour  $x \in B(x_0, R)$ , montrer que

$$u(x) = \int_{\Omega} E(x - y)v(y) dy$$

et en déduire que l'on a alors

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(x_0, 2R)} E(x - y)v(y) dy$$

pour tout  $x \in B(x_0, R)$ .

6° b) Avec les notations du 3° b), et en se ramenant au cas  $x_0 = 0$ , montrer que la formule

$$u(z) = \int_{|y| \geq 2R} E(z - y)v(y) dy,$$

prolonge à l'ouvert  $V$  de  $\mathbb{C}^2$ , défini par  $V = \{z \in \mathbb{C}^2 : \mathcal{R}(z) < R \text{ et } \mathcal{I}(z) < R\}$ , la fonction  $u(x)$  en une fonction, encore notée  $u$ , continue sur  $V$  et séparément holomorphe en  $(z_1, z_2)$  dans  $V$ .

6° c) Toujours avec l'hypothèse  $x_0 = 0$ , montrer qu'il existe des nombres  $r_j, R_j, j = 1, 2$  tels que pour  $|z_j| < r_j < R_j$  on ait

$$u(z_1, z_2) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{|\zeta_1|=r_1} \int_{|\zeta_2|=r_2} \frac{u(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2$$

et que

$$u(z_1, z_2) = \sum_{p, q \geq 0} a_{p,q} z_1^p z_2^q.$$

En conclure qu'une solution faible  $u$  de l'équation  $Pu = 0$  dans  $\Omega$  y est analytique.

DEUXIÈME PARTIE.

Dans toute cette partie,  $\lambda$  est un réel positif ou nul et  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  est une solution faible de  $(\Delta + \lambda)u = 0$  dans  $\Omega$ , c'est-à-dire pour toute  $\varphi$  de  $C^\infty_0(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} u(x)(\Delta\varphi(x) + \lambda\varphi(x)) dx = 0.$$

On dit qu'une fonction  $C^\infty$   $v$  s'annule à l'ordre  $k, 0 \leq k \leq +\infty$  en  $x_0$  si toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à  $k$  de  $v$  s'annulent en  $x_0$  et si au moins une dérivée de  $v$  d'ordre  $(k + 1)$  ne s'annule pas en  $x_0$ .

Dans cette partie, on utilise les résultats de régularité établis dans la première partie (I.5° d) et I.6° c).

1° a) Montrer que la fonction  $u$  ne peut pas s'annuler à l'ordre infini en un point  $x_0$  de  $\Omega$  sans être identiquement nulle.

1° b) Montrer que si la fonction  $u$  s'annule à l'ordre  $(k - 1)$  en  $x_0 \in \Omega$ , et si on pose

$$u_k(x) = \sum_{|\alpha|=k} \partial^\alpha u(x_0) \frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!}$$

(premier terme homogène non nul du développement de Taylor en  $x_0$ ) alors  $\Delta u_k = 0$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

On suppose maintenant que  $u$  s'annule à l'ordre  $(k - 1)$  en  $x_0 \in \Omega, k \geq 1$ .

2° a) constante

2° b)

au voisin

2° c)

3° s

$u(x) = t$

3° d

où les c

Mo

droites

3°

difféom

ii)

que l'oi

Montre

$g_1, \dots$

ou..., o

(iii)

$x_2 = x$

$C^1$ , do

3°

Or

réelles,

pour  $u$

où dx

O

complé

réel (H

E° l'er

P

O

contin

compé

E

2° a) Montrer, en utilisant le fait que le polynôme  $u_k$  est une fonction harmonique dans  $\mathbb{R}^2$ , qu'il existe une constante complexe  $\zeta$  telle que l'on ait

$$u_k(x_1, x_2) = \operatorname{Re} [\zeta(z - z_0)^k] \quad \text{où} \quad z = x_1 + ix_2, \quad z_0 = x_1^0 + ix_2^0.$$

2° b) En déduire l'existence de constantes strictement positives  $K_1$  et  $K_2$  telles que

$$|u(x)| \leq K_1 \|x - x_0\|^k \quad \text{et} \quad \|\nabla u(x)\| \geq K_2 \|x - x_0\|^{k-1}$$

au voisinage de  $x_0$ , où

$$\nabla u(x) = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) \right) \quad \text{et} \quad \|(x_1, x_2)\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}.$$

2° c) Montrer que les points  $x$  tels que  $u(x) = 0$  et  $\nabla u(x) = 0$  sont isolés dans  $\Omega$ .

3° Soit  $x_0 \in \Omega$  un point où  $u(x_0) = 0$  et soit  $(k-1)$  l'ordre d'annulation de  $u$  en  $x_0$ . On écrit  $u(x) = u_k(x) + v(x)$  avec les notations du 1° b).

3° a) Montrer, en se ramenant au cas  $x_0 = 0$  et en choisissant bien les coordonnées, que l'on peut écrire :

$$u_k(x_1, x_2) = (x_2 - \alpha_1 x_1)(x_2 - \alpha_2 x_1) \dots (x_2 - \alpha_k x_1)$$

où les constantes  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  sont réelles, distinctes.

Montrer que les  $k$  droites ainsi obtenues forment un système équiangulaire (c'est-à-dire l'angle de deux droites consécutives est constant et égal à  $\pi/k$ ).

3° b) (i) Montrer que l'application  $\varphi : (x_1, t) \mapsto (x_1, x_2)$  avec  $x_2 = tx_1$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$  et que c'est un difféomorphisme du demi-plan  $\{x_1 > 0\}$  (resp.  $\{x_1 < 0\}$ ) sur lui-même.

ii) Montrer qu'il existe un voisinage de 0, de la forme  $D = \{|x_1| < R, |tx_1| < R\}$  et une fonction  $f(x_1, t)$ , que l'on cherchera comme somme d'une série entière sur  $D$ , tels que

$$u \circ \varphi(x_1, t) = x_1^k f(x_1, t).$$

Montrer que  $f(0, \alpha_j) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial t}(0, \alpha_j) \neq 0$  pour  $j = 1, \dots, k$ . En déduire qu'il existe  $\varepsilon > 0$  et des fonctions  $g_1, \dots, g_k, C^\infty$  sur  $] -\varepsilon, \varepsilon[$ , telles que pour  $|x_1| < \varepsilon$ ,  $f(x_1, t) = 0$  soit équivalent à  $t = g_1(x_1)$ , ou  $t = g_2(x_1)$ , ou..., ou  $t = g_k(x_1)$ .

(iii) Montrer que dans  $0 < x_1 < \varepsilon$  (resp.  $-\varepsilon < x_1 < 0$ ), on a  $u(x_1, x_2) = 0$  si, et seulement si,  $x_2 = x_1 g_1(x_1)$  ou... ou  $x_2 = x_1 g_k(x_1)$ . En déduire que  $u^{-1}(0)$  est constitué, près de 0, de  $k$  branches de courbes  $C^1$ , dont les tangentes en 0 forment un système équiangulaire.

3° c) Montrer que si  $u(x_0) = 0$ , alors  $u$  change nécessairement de signe au voisinage de  $x_0$ .

### TROISIÈME PARTIE.

On rappelle que  $\Omega$  est un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^2$ . Sur l'espace  $U(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$  des fonctions à valeurs réelles,  $C^\infty$ , à support compact dans  $\Omega$ , on introduit les deux produits suivants, ainsi que les normes associées : pour  $u, v \in U(\Omega)$ ,

$$(u, v)_0 = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \quad \text{et} \quad \|u\|_0 = (u, u)_0^{1/2}$$

$$(u, v)_1 = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \quad \text{et} \quad \|u\|_1 = (u, u)_1^{1/2}$$

où  $dx$  est la mesure de Lebesgue et où  $\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)$  désigne le produit scalaire des deux vecteurs  $\nabla u(x)$  et  $\nabla v(x)$ .

On rappelle que  $L(\Omega) = L^2(\Omega)$  est le complété de  $U(\Omega)$  pour la norme  $\|\cdot\|_0$ . On désignera par  $H(\Omega)$  le complété de  $U(\Omega)$ , dans  $L(\Omega)$ , pour la norme  $\|\cdot\|_1$ . On désignera par  $i$  l'inclusion continue de l'espace de Hilbert réel  $(H(\Omega), (\cdot, \cdot)_1)$  dans l'espace de Hilbert réel  $(L(\Omega), (\cdot, \cdot)_0)$ . Étant donné un espace vectoriel  $E$ , on désignera par  $E^\circ$  l'ensemble  $E^\circ = E \setminus \{0_E\}$ .

Pour  $u \in H(\Omega)$ , on pose  $Q(u) = \|u\|_1^2 - \|u\|_0^2$  et on introduit, pour  $u \in H^\circ(\Omega)$ , le quotient

$$R(u) = R_\Omega(u) = \frac{Q(u)}{\|u\|_0^2}.$$

On admettra sans démonstration le résultat suivant : l'inclusion  $i : H(\Omega) \mapsto L(\Omega)$  est une application linéaire continue et compacte, c'est-à-dire l'image par  $i$  d'une partie bornée de  $H(\Omega)$  pour la norme  $\|\cdot\|_1$  est relativement compacte dans  $L(\Omega)$  pour la norme  $\|\cdot\|_0$ .

Enfin, on notera pour simplifier  $U$  pour  $U(\Omega)$ ,... quand aucune confusion ne sera à craindre.

1° a) Montrer que les bornes inférieures  $\inf \{R(u), u \in U^*\}$  et  $\inf \{R(u), u \in H^*\}$  existent et sont égales; on note  $\bar{\lambda}_1$  leur valeur commune.

1° b) Soit  $\{u_n\}$  une suite faiblement convergente dans H. Montrer que la suite  $\{i(u_n)\}$  de L est faiblement convergente dans L.

1° c) Montrer l'existence d'une suite  $\{u_n\}$  de  $H^*$  telle que  $\|u_n\|_1^2 \leq \bar{\lambda}_1 + 1 + \frac{1}{n}$ . En déduire qu'il existe un élément  $u$  de  $H^*$  tel que pour tout  $\varphi$  de H on ait

$$(u, \varphi)_1^2 \leq (\bar{\lambda}_1 + 1)\|\varphi\|_1^2.$$

1° d) Montrer que  $u$  vérifie  $R(u) = \bar{\lambda}_1$ .

1° e) Montrer que  $\{u \in H^* : R(u) = \bar{\lambda}_1\} \cup \{0\} = E_1$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $m_1$ .

2° Montrer, en utilisant les méthodes du 1°, que l'on peut construire trois suites :

$$\begin{aligned} &\bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_3 < \dots, \quad \text{avec } \bar{\lambda}_i \text{ nombre réel positif ou nul,} \\ E_1, E_2, E_3, \dots, &\quad \text{avec } E_i \text{ } \mathbb{R}\text{-sous-espace vectoriel de dimension finie de L,} \\ & m_1, m_2, m_3, \dots, \quad \text{avec } m_i = \dim E_i, \end{aligned}$$

avec en outre les deux propriétés suivantes :

(i) pour  $i \neq j$ ,  $E_i$  et  $E_j$  sont orthogonaux dans  $(L, (\cdot, \cdot)_0)$ ;

(ii) pour tout  $u \in E_i$ , pour tout  $\varphi \in H$ , on a  $q(u, \varphi) = \bar{\lambda}_i(u, \varphi)_0$  où  $q(u, v) = (u, v)_1 - (u, v)_0$  pour  $u, v \in H$ .

Dans la suite du problème, on écrira la suite  $\{\bar{\lambda}_i, m_i\}$  sous la forme d'une seule suite de nombres réels positifs ou nuls  $\{\lambda_i\}$ ,  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$ , obtenue en répétant  $m_i$  fois chaque  $\bar{\lambda}_i$ ; ainsi, si  $m_1 = 1, m_2 = 2$  et  $m_3 = 3$ , on écrira  $(\bar{\lambda}_1, 1), (\bar{\lambda}_2, 2), (\bar{\lambda}_3, 3) \dots$  sous la forme

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5 \leq \lambda_6 \dots \quad \text{avec} \quad \lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \lambda_2 = \lambda_3 = \bar{\lambda}_2, \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \bar{\lambda}_3.$$

On dit que la suite  $\{\lambda_i\}$  est la suite des valeurs propres (avec multiplicités) du laplacien  $\Delta$  dans  $H(\Omega)$  [la terminologie sera justifiée au 3° c)]. On appellera  $\lambda_i(\lambda_i(\Omega))$  si on veut spécifier le domaine  $\Omega$  la  $i^{\text{ième}}$  valeur propre de  $\Delta$  dans  $H(\Omega)$ . L'espace propre associé sera l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , de dimension finie, noté  $E_{\lambda_i}$ , des  $u$  de  $H(\Omega)$  tels que  $q(u, \varphi) = \lambda_i(u, \varphi)_0$  pour tout élément  $\varphi$  de  $H(\Omega)$ . Si  $\dim E_{\lambda_i} = 1$ , on dira que la valeur propre  $\lambda_i$  est simple.

3° a) Montrer qu'il existe une suite  $\{e_i\}_{i \geq 1}$  d'éléments de H telle que :

(i) la famille  $\{e_i\}$  est orthonormale dans L;

(ii)  $R(e_i) = \lambda_i, i \geq 1$ .

3° b) Montrer que la suite  $\{\lambda_i\}$  tend vers  $+\infty$  et que la famille  $\{e_i\}$  est complète dans L.

3° c) Montrer que pour  $i \geq 1, e_i$  est une solution faible de l'équation  $(\Delta + \lambda_i)u = 0$  dans  $\Omega$ .

4° Soit  $H_k = \{u \in H : (u, e_i)_0 = 0, 1 \leq i \leq k\}$ . Pour un sous-espace vectoriel  $L_k$  de dimension  $k$  de H,  $L_k^* = L_k \setminus \{0\}$ , on pose  $\alpha(L_k) = \sup \{R(v), v \in L_k^*\}$ .

Enfin, on pose  $\Lambda_k = \inf \{\alpha(L_k) : L_k \text{ sous-espace vectoriel de dimension } k \text{ de H}\}$ .

4° a) Montrer qu'étant donné  $k \geq 1$ , on peut trouver un vecteur non nul dans  $L_k \cap H_{k-1}$ . En déduire que  $\Lambda_k \geq \lambda_k$ .

4° b) Montrer que  $\Lambda_k = \lambda_k$ .

4° c) Soit  $\Omega_1, \Omega_2$  deux ouverts bornés non vides de  $\mathbb{R}^2$ , avec  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ . Comparer les valeurs propres  $\lambda_i(\Omega_1)$  et  $\lambda_i(\Omega_2)$  pour  $i \geq 1$  fixé.

5° Soit A un ensemble dénombrable. Soient  $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A}$  une famille de réels positifs ou nuls et  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$  une famille d'éléments de H qui soit orthonormée complète dans L et telles que, pour tout  $\alpha \in A$  et tout  $\varphi$  de H  $q(f_\alpha, \varphi) = \mu_\alpha(f_\alpha, \varphi)_0$ . Montrer que les ensembles  $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$  et  $\{\lambda_k, k \geq 1\}$  sont égaux.

6° Dans cette question, on pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : si la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  est  $C^\infty$  par morceaux et si  $u, C^1$  au voisinage de  $\bar{\Omega}$ , vérifie  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ , alors  $u \in H(\Omega)$ .

Soit  $\Omega_{a,b}$  le rectangle défini par  $0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b$ . On se propose de déterminer les valeurs propres du laplacien  $\Delta$  dans  $H(\Omega_{a,b})$ . Pour cela, on cherche des couples  $(u, \lambda) \in C^2(\bar{\Omega}_{a,b}) \times \mathbb{R}_+$ , avec  $u$  nulle sur  $\partial\Omega_{a,b}$ , tels que

$$(*) \quad (\Delta + \lambda)u = 0 \quad \text{dans } \Omega_{a,b}.$$

6° a) Montrer que la famille  $(e_{m,n}, \lambda_{m,n}), m, n \in \mathbb{N}^*$ , définie par

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad e_{m,n}(x_1, x_2) = \sin \frac{\pi m x_1}{a} \sin \frac{\pi n x_2}{b}$$

vérifie (\*).

6° b) Montrer que la famille  $\{e_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{N}^0}$  est complète dans  $L^2(\Omega_{a,b})$  [on pourra se ramener par parité au cas des séries de Fourier].

6° c) Dédurre de ce qui précède les valeurs propres du laplacien  $\Delta$  dans  $H(\Omega_{a,b})$ .

6° d) Toutes les valeurs propres de  $\Omega_{1,1}$  sont-elles simples ?

6° e) Donner un exemple de domaine du type  $\Omega_{a,b}$  dont toutes les valeurs propres soient simples.

7° Montrer que l'on a  $\lambda_1(\Omega) > 0$  pour tout ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ .

#### QUATRIÈME PARTIE.

On rappelle que  $\Omega$  est un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^2$ . On reprend les notations qui suivent le III.2°.

Si  $\lambda$  est une valeur propre du laplacien  $\Delta$  dans  $H(\Omega)$ , on note  $E_\lambda$  l'espace propre correspondant, que l'on peut considérer comme un sous-espace de  $C^\infty(\Omega)$  à cause du II. Quand on écrira  $u \in E_\lambda$ , on entendra implicitement  $E_\lambda \neq \{0\}$  (c'est-à-dire  $\lambda$  valeur propre de  $\Delta$ ) et  $u \neq 0$ .

Dans cette partie, on admettra sans démonstration les deux résultats suivants :

(i) Si  $u \in E_{\lambda_1(\Omega)}$ , alors  $u$  ne s'annule pas dans  $\Omega$ ;

(ii) Si  $u \in E_\lambda$  et si  $\Omega'$  est une composante connexe de  $\Omega \setminus u^{-1}(0)$ , alors  $\lambda_1(\Omega') = \lambda$ .

1° Montrer, en utilisant le résultat (i) ci-dessus, que l'on a toujours  $\dim E_{\lambda_1(\Omega)} = 1$  et que si  $\lambda > \lambda_1(\Omega)$  et  $u \in E_\lambda$ , alors  $u$  s'annule dans  $\Omega$ .

2° a) Montrer que pour tout déplacement  $\tau$  de  $\mathbb{R}^2$ , on a  $\lambda_1(\tau(\Omega)) = \lambda_1(\Omega)$ .

2° b) Montrer que pour tous  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  et  $R > 0$ , on a  $\lambda_1(B(x, R)) = \frac{\lambda_1(B(0,1))}{R^2}$ .

On suppose maintenant que  $\lambda > \lambda_1(\Omega)$ .

3° Soit  $B(x, r)$  une boule contenue dans  $\Omega$ . Montrer que si  $r > \sqrt{\mu/\lambda}$ , où  $\mu = \lambda_1(B(0,1))$  et si  $u \in E_\lambda$ , alors  $B(x, r) \cap u^{-1}(0) \neq \emptyset$ .

Dans toute la suite du problème, on désigne par  $R$  un nombre réel strictement positif et par  $\alpha$  un réel strictement positif petit par rapport à  $R$ , par exemple  $\alpha = 10^{-10} R$ , tels qu'il existe un point  $x_0$  de  $\Omega$  pour lequel  $B(x_0, R + \alpha) \subset \Omega$ . Le point  $x_0$  et les nombres  $R$  et  $\alpha$  sont choisis une fois pour toutes.

4° a) Montrer qu'il existe un nombre  $\lambda_0 > 0$  tel que si  $\lambda \geq \lambda_0$  et si  $u \in E_\lambda$ , alors  $B(x_0, R) \cap u^{-1}(0) \neq \emptyset$ .

4° b) On pose désormais  $r = 2\sqrt{\mu/\lambda}$  où  $\mu = \lambda_1(B(0,1))$ .

Montrer qu'il existe des valeurs propres  $\lambda$  de  $\Delta$  dans  $H(\Omega)$  telles que  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $2r < \alpha$ . On choisit une fois pour toutes une telle valeur propre  $\lambda$  et une fonction  $u \in E_\lambda$ . Montrer qu'il existe une famille  $B(x_i, r/2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$  de boules deux à deux disjointes, contenues dans  $\Omega$ , de centres  $x_i \in u^{-1}(0) \cap B(x_0, R - r)$  pour  $1 \leq i \leq l$  et telles que

$$B(x_0, R - 2r) \subset \bigcup_{i=1}^l B(x_i, 2r).$$

4° c) Montrer qu'il existe une constante strictement positive  $C$ , qui ne dépend ni de  $\Omega$ , ni de  $\lambda$  et telle que le nombre  $l$  de boules construites au 4° b) vérifie  $l \geq \frac{C}{r^2} \text{Vol}(B(x_0, R))$ , où  $\text{Vol}$  désigne l'aire.

5° Montrer que  $u^{-1}(0) \cap B(x_0, R)$  est réunion d'un ensemble discret fini et d'une famille d'arcs  $C^1$  de  $\mathbb{R}^2$ , de longueur totale finie.

6° Montrer qu'il ne peut pas exister de courbe fermée,  $C^1$  par morceaux  $\gamma$  qui vérifie  $\gamma \subset u^{-1}(0)$  et  $\gamma \subset B(x_i, r/4)$  où  $B(x_i, r/4)$  est une boule de rayon  $r/4$  centrée en l'un des points  $x_i$  du 4° b).

7° Montrer qu'il existe une constante strictement positive  $D$ , qui ne dépend ni de  $\Omega$ , ni de  $\lambda$  et telle que la longueur de  $u^{-1}(0) \cap B(x_0, R)$  vérifie

$$\text{long}(u^{-1}(0) \cap B(x_0, R)) \geq D \text{Vol}(B(x_0, R)) \sqrt{\lambda}.$$

8° Peut-on remplacer l'ouvert  $B(x_0, R)$  des questions précédentes par un ouvert  $\omega$  plus général ?