Notations, définitions et rappels

- Soient S^1 le cercle : $\{z \in \mathbf{C},\ |z| = 1\}$, D le disque : $\{z \in \mathbf{C},\ |z| < 1\}$. On note $\mathcal{C}$ la $\mathbf{C}$-algèbre des fonctions continues de S^1 dans $\mathbf{C}$, $\mathcal{C}^*$ le groupe des inversibles de cette algèbre, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$ qui ne s'annulent pas sur S^1. L'algèbre $\mathcal{C}$ est munie de la norme uniforme sur S^1, définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}, \qquad |\varphi|_\infty = \max\ \left\{|\varphi(z)|\ ;\ z \in S^1\right\}.$$

- Si n est dans $\mathbf{Z}$, soit e_n l'élément de $\mathcal{C}$ défini par :

$$\forall z \in S^1, \quad e_n(z) = z^n.$$

- Si f est une fonction de S^1 dans $\mathbf{C}$, on note $\tilde{f}$ la fonction 2π-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad \tilde{f}(t) = f(e^{it}).$$

  Selon l'usage, on identifie deux fonctions f_1 et f_2 de S^1 dans $\mathbf{C}$ telles que les fonctions $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ soient mesurables au sens de Lebesgue et coïncident sur le complémentaire d'une partie négligeable de $[-\pi, \pi]$. On note L^1 (resp. L^2) l'ensemble des (classes de) fonctions f de S^1 dans $\mathbf{C}$ telles que $\tilde{f}$ soit intégrable (resp. de carré intégrable) au sens de Lebesgue sur $[-\pi, \pi]$. Pour f dans L^1, soit :

$$\int f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,\mathrm{d}t.$$

  L'application qui à f dans L^1 associe $|f|_1 = \displaystyle\int |f|$ est une norme sur L^1.

- Si f est dans L^1, on note $\hat{f}$ la fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \qquad \hat{f}(n) = \int f e_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\ e^{-int}\,\mathrm{d}t.$$

  On rappelle que $\hat{f}$ est nulle si et seulement si f est l'élément nul de L^1.

- Pour f_1 et f_2 dans L^2, on notera $\langle f_1, f_2\rangle = \displaystyle\int (\overline{f_1} \times f_2)$, définissant ainsi un produit scalaire hermitien sur L^2. La norme associée à $\langle\ ,\ \rangle$ est notée $|\ |_2$. Si f est dans L^2, alors :

$$|f|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2\,\mathrm{d}t}.$$

- On rappelle que L^2 est contenu dans L^1, avec de plus :

$$\forall f \in L^2, \qquad |f|_1 \leq |f|_2.$$

- On rappelle également que L^2 est un espace de Hilbert complexe dont $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne.
- Si E est un espace vectoriel et F un sous-espace de E, on dit que F est de *codimension finie dans E* si et seulement si l'espace quotient E/F est de dimension finie. La dimension de E/F est alors appelée *codimension de F dans E*, notée $\operatorname{codim}_E(F)$.
  On rappelle par ailleurs que tout supplémentaire de F dans E est isomorphe à E/F. Si G est un tel supplémentaire, F est donc de codimension finie dans E si et seulement si G est de dimension finie, et on a alors : $\operatorname{codim}_E(F) = \dim G$.
- Dans la fin de ces rappels, $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace de Hilbert complexe.
- Si V est un sous-espace de H, on note $V^\perp$ l'orthogonal de V ; le sous-espace $V^\perp$ est un supplémentaire de V dans H si et seulement si V est fermé dans H.

– On note $\mathcal{L}(H)$ la $\mathbf{C}$-algèbre des endomorphismes continus de H. Les éléments de $\mathcal{L}(H)$ sont appelés *opérateurs* de l'espace H. Si T_1 et T_2 sont dans $\mathcal{L}(H)$, on abrège $T_2 \circ T_1$ en T_2T_1. On note I l'identité de H, c'est-à-dire le neutre multiplicatif de $\mathcal{L}(H)$. L'algèbre $\mathcal{L}(H)$ est munie de la norme subordonnée définie par :

$$\forall T \in \mathcal{L}(H), \qquad \|T\| = \sup\left\{\frac{|T(x)|}{|x|},\ x \in H \setminus \{0\}\right\},$$

où $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ désigne la norme du vecteur x de H.

– Pour tout élément T de $\mathcal{L}(H)$ il existe un unique T^* dans $\mathcal{L}(H)$ tel que :

$$\forall (x, y) \in H^2, \qquad \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle .$$

– On rappelle enfin les relations suivantes, valables pour tout T de $\mathcal{L}(H)$:

$$\ker T^* = \mathrm{Im}\ T^{\perp}, \qquad \overline{\mathrm{Im}\ T^*} = \ker T^{\perp}.$$

Objectif du problème, dépendance des parties

– Le but du problème est d'associer à tout élément φ de $\mathcal{C}$ un endomorphisme continu T_φ d'un espace de Hilbert et d'étudier T_φ.

– La partie **I** démontre une formule de Jensen relative aux éléments de $H(D)$. La partie **II** détermine les composantes connexes par arcs de $\mathcal{C}^*$. La partie **III** introduit l'espace de Hardy H^2, la partie **IV** les opérateurs de Toeplitz T_φ. Les parties **V** et **VI** étudient respectivement les opérateurs compacts et les opérateurs de Fredholm d'un espace de Hilbert et appliquent les résultats obtenus aux T_φ ; elles aboutissent notamment à la caractérisation des φ de $\mathcal{C}$ tels que T_φ soit inversible.
– La partie **I** n'est utilisée que dans la partie **III**. La partie **II** n'est utilisée que dans la partie **VI**. La partie **III** n'est utilisée que dans la partie **IV**.

I. Formule de Jensen

1. (a) Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Ecrire le polynôme $X^{2n} - 1$ comme produit de polynômes irréductibles unitaires de $\mathbf{C}[X]$, puis de $\mathbf{R}[X]$.
En déduire, si r est dans $]1, +\infty[$, une expression simple de :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - 2r\cos(k\pi/n) + r^2).$$

(b) Soit r dans $]1, +\infty[$. En utilisant éventuellement la question précédente, établir les égalités :

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2r\cos t + r^2)\, \mathrm{d}t = 2\pi \ln r,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\left|1 - re^{it}\right|\right)\, \mathrm{d}t = 2\pi \ln r.$$

(c) Justifier l'existence de :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\left|1 - e^{it}\right|\right)\, \mathrm{d}t,$$

puis montrer que cette intégrale est nulle.

(d) Soient a dans $\mathbf{C}^*$, r dans $\mathbf{R}^{+*}$ avec : $|a| \leq r$. Calculer l'intégrale :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\left|a - re^{it}\right|\right) \, \mathrm{d}t.$$

2. Ici, F est une fonction holomorphe sur D telle que $F(0) \neq 0$. On fixe r dans $]0,1[$ et on note $D_r = \{z \in \mathbf{C},\ |z| \leq r\}$. On rappelle (théorème des zéros isolés) que F n'a qu'un nombre fini de zéros comptés avec multiplicités dans D_r. On note $a_1, \ldots, a_p$ ces zéros comptés avec multiplicités.

   Montrer l'égalité :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\left|F(re^{it})\right|\right) \, \mathrm{d}t = \ln\left(|F(0)|\right) + \sum_{i=1}^{p} \ln\left(\frac{r}{|a_i|}\right).$$

   Indication. On pourra utiliser, sans démonstration, l'existence d'une fonction G holomorphe sur un voisinage de D_r telle que :

$$\forall z \in D_r, \qquad F(z) = \prod_{i=1}^{p} (z - a_i)\, e^{G(z)}.$$

   La formule précédente implique l'inégalité ci-après, utilisée en **III**.3.(c) :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\left|F(re^{it})\right|\right) \, \mathrm{d}t \geqslant \ln\left(|F(0)|\right).$$

II. Composantes connexes par arcs de $\mathcal{C}^*$

Si φ est dans $\mathcal{C}^*$, on appelle *relèvement de* φ toute application continue θ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telle que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad \varphi\left(e^{it}\right) = e^{\theta(t)}.$$

L'ensemble des relèvements de φ est noté $R(\varphi)$.

1. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point, f et g deux fonctions continues de I dans $\mathbf{C}$ telles que :

$$\forall t \in I, \qquad e^{f(t)} = e^{g(t)}.$$

   Montrer que la fonction $f - g$ est constante.

2. Soient φ dans $\mathcal{C}^*$, A dans $\mathbf{R}^{+*}$. Pour n dans $\mathbf{N}^*$ et k dans $\{0, \ldots, n-1\}$, on note $u_{k,n}$ la fonction continue de $[-A, A]$ dans $\mathbf{C}^*$ définie par :

$$\forall t \in [-A, A], \qquad u_{k,n}(t) = \frac{\varphi\left(e^{i(k+1)t/n}\right)}{\varphi\left(e^{ikt/n}\right)}.$$

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe n dans $\mathbf{N}^*$ tel que :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad \forall t \in [-A, A], \qquad \left|\varphi\left(e^{i(k+1)t/n}\right) - \varphi\left(e^{ikt/n}\right)\right| < \varepsilon.$$

(b) Montrer qu'il existe n dans $\mathbf{N}^*$ tel que :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, \qquad \forall t \in [-A, A], \qquad |u_{k,n}(t) - 1| < 1.$$

En déduire que pour tout k de $\{0, \ldots, n-1\}$ il existe une fonction continue $v_{k,n}$ de $[-A, A]$ dans $\mathbf{C}$ telle que :

$$\forall t \in [-A, A], \qquad u_{k,n}(t) = e^{v_{k,n}(t)}.$$

Indication. On rappelle qu'il existe une (unique) fonction continue L de $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-$ dans la bande $\{z \in \mathbf{C},\ |Im\ (z)| < \pi\}$ vérifiant :

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-, \qquad e^{L(z)} = z.$$

(c) Montrer qu'il existe une fonction continue θ_A de $[-A, A]$ dans $\mathbf{C}$ telle que :

$$\forall t \in [-A, A], \qquad \varphi(e^{it}) = e^{\theta_A(t)}.$$

(d) Conclure que $R(\varphi)$ n'est pas vide.

3. (a) Si φ est dans $\mathcal{C}^*$, θ dans $R(\varphi)$ et t dans $\mathbf{R}$, montrer que le réel

$$\frac{\theta(t + 2\pi) - \theta(t)}{2i\pi}$$

est un entier relatif indépendant du couple (θ, t) de $R(\varphi) \times \mathbf{R}$. L'entier ainsi défini est appelé *degré de* φ et noté $\deg(\varphi)$.

(b) Calculer le degré de φ dans les cas suivants :
i) $\varphi = e_n$ où $n \in \mathbf{Z}$,
ii) $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$ où φ_1 et φ_2 sont dans $\mathcal{C}^*$ (réponse en fonction des degrés de φ_1 et φ_2),
iii) φ est un élément de $\mathcal{C}^*$ à valeurs dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-$.

(c) Soient φ_1 et φ_2 dans $\mathcal{C}^*$ telles que : $|\varphi_1 - \varphi_2| < |\varphi_1|$. Montrer :

$$\deg(\varphi_1) = \deg(\varphi_2).$$

Indication. On pourra considérer φ_2/φ_1.

(d) Montrer que l'application deg qui à φ associe $\deg(\varphi)$ est continue sur $\mathcal{C}^*$ muni de la topologie provenant de la norme $|\ |_\infty$.

4. Pour n dans $\mathbf{Z}$, soit $\mathcal{C}_n^*$ l'ensemble des φ de $\mathcal{C}^*$ de degré n.
Montrer que les $\mathcal{C}_n^*$ sont les composantes connexes par arcs de $\mathcal{C}^*$ (toujours muni de la topologie provenant de $|\ |_\infty$).
Indication. Pour φ dans $\mathcal{C}_0^*$, on pourra considérer θ dans $R(\varphi)$ et, pour s dans $[0, 1]$, H_s l'application définie sur S^1 par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad H_s(e^{it}) = e^{s\theta(t)}.$$

III. Espace de Hardy H^2

On note H^2 le sous-espace de L^2 constitué des f telles que :

$$\forall n \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}, \qquad \hat{f}(n) = 0.$$

1. Montrer que H^2 est un sous-espace fermé de L^2 dont $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base hilbertienne.

   Dans la suite, l'espace H^2 est muni de la structure d'espace de Hilbert induite par celle de L^2. On note Π le projecteur orthogonal de L^2 sur H^2.

   Si f est dans L^2, exprimer la décomposition de $\Pi(f)$ sur $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

2. Soit f dans H^2. Justifier que le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \hat{f}(n)\ z^n$$

   est supérieur ou égal à 1.

   Pour z dans D, soit :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(n)\ z^n.$$

   Pour r dans $[0,1[$, soit f_r la fonction définie sur S^1 par :

$$\forall z \in S^1, \qquad f_r(z) = F(rz).$$

   Prouver que $|f_r - f|_2$ tend vers 0 lorsque r tend vers 1.

3. Soit f un élément non nul de H^2. Le but de cette question est de démontrer que l'ensemble des t de $[-\pi,\pi]$ tels que $f(e^{it}) = 0$ est de mesure de Lebesgue nulle. Quitte à multiplier f par e_{-m} où m est le plus petit i de $\mathbf{N}$ tel que : $\hat{f}(i) \neq 0$, on peut supposer $\hat{f}(0) \neq 0$ et c'est ce qu'on fait désormais. On fixe ε dans $]0,1[$.

   (a) Montrer que $\ln(|f| + \varepsilon)$ appartient à L^1.

   (b) Si r est dans $[0,1[$, t dans $\mathbf{R}$, établir :

$$\left|\ln\left(|f_r(e^{it})| + \varepsilon\right) - \ln\left(|f(e^{it})| + \varepsilon\right)\right| \leqslant \frac{|f_r(e^{it}) - f(e^{it})|}{\varepsilon}.$$

   (c) En utilisant l'inégalité obtenue à la fin de **I**, établir :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\left|f(e^{it})\right| + \varepsilon\right)\,\mathrm{d}t \geqslant \ln\left(\left|\hat{f}(0)\right|\right).$$

   (d) Conclure.

IV. Opérateurs de Toeplitz

Soit φ dans $\mathcal{C}$.

1. (a) Si f est dans H^2, vérifier que $\Pi(\varphi \times f)$ est un élément de H^2.

   Dans la suite, on note T_φ l'application de H^2 dans lui-même qui à f associe $\Pi(\varphi \times f)$. Il est clair que T_φ est un endomorphisme de H^2.

   Vérifier que T_φ appartient à $\mathcal{L}(H^2)$; T_φ est appelé *opérateur de Toeplitz* de symbole φ.

   (b) Si i et j sont dans $\mathbf{N}$, exprimer $\langle e_i, T_\varphi(e_j)\rangle$ à l'aide de $\hat{\varphi}$.

   L'application qui à φ associe T_φ est-elle injective ?

   (c) Montrer la relation : ${T_\varphi}^* = T_{\overline{\varphi}}$.

2. On suppose que φ n'est pas l'application nulle. On fixe f dans $\ker T_\varphi$, g dans H^2, on pose : $u = \varphi \times f \times \overline{g}$.

   (a) Montrer que u est dans L^1 et que $\hat{u}$ est nulle sur $\mathbf{N}$.

(b) On suppose désormais que g est dans $\ker T_\varphi^*$. En considérant $\overline{u}$, montrer que u est l'élément nul de L^1.

(c) Conclure en utilisant la question **III**.3 que l'un au moins des deux opérateurs T_φ et T_φ^* est injectif.

Si T_φ n'est pas injectif, montrer que son image est dense dans H^2.

Dans les parties **V** *et* **VI**, $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *est un espace de Hilbert complexe. On adopte les notations rappelées au début du problème et on note* B *la boule fermée de centre* 0 *et de rayon* 1 *de* H.

V. Opérateurs compacts et opérateurs de Toeplitz

Un élément T de $\mathcal{L}(H)$ est dit *compact* si et seulement si $\overline{T(B)}$ est une partie compacte de H. On note $\mathcal{K}(H)$ l'ensemble des T de $\mathcal{L}(H)$ vérifiant cette propriété, $\mathcal{K}_0(H)$ l'ensemble des T de $\mathcal{L}(H)$ dont l'image est de dimension finie.

1. (a) Montrer que $\mathcal{K}(H)$ est un idéal bilatère de l'algèbre $\mathcal{L}(H)$ contenant $\mathcal{K}_0(H)$.

   (b) Montrer que $\mathcal{K}(H)$ est fermé dans $\mathcal{L}(H)$.

   Indication. On rappelle qu'une partie X *de* H *est d'adhérence compacte si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *on peut recouvrir* X *par une réunion finie de boules fermées de rayon* ε.

2. Dans cette question, H est l'espace de Hilbert H^2, $\mathcal{P}$ le sous-espace de $\mathcal{C}$ engendré par la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$.

   (a) Si φ_1 et φ_2 sont dans $\mathcal{P}$, montrer que $T_{\varphi_1}T_{\varphi_2} - T_{\varphi_1\times\varphi_2}$ est dans $\mathcal{K}_0(H^2)$.

   (b) Si φ_1 et φ_2 sont dans $\mathcal{C}$, montrer que $T_{\varphi_1}T_{\varphi_2} - T_{\varphi_1\times\varphi_2}$ est dans $\mathcal{K}(H^2)$.

3. Soit K dans $\mathcal{K}(H)$.

   (a) Montrer que $\ker(I+K)$ est de dimension finie.

   (b) Montrer que $\mathrm{Im}\ (I+K)$ est fermé dans H.

   Indication. Soient y *dans* H *adhérent à* $\mathrm{Im}\ (K+I)$, $(x_n)_{n\geq O}$ *une suite d'éléments de* H *telle que :* $K(x_n)+x_n \to y$, *et, pour tout* n *de* $\mathbf{N}$, x_n' *la projection orthogonale de* x_n *sur* $\ker(K+I)^\perp$. *En raisonnant par l'absurde et en considérant* $u_n = x_n'/|x_n'|$, *montrer que* $(x_n')_{n\geq 1}$ *est bornée. Conclure.*

   (c) Montrer que K^* appartient à $\mathcal{K}(H)$.

   Indication. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ *une suite d'éléments de* B, Γ *l'adhérence de* $K(B)$ *dans* H, *et, pour tout* n *de* $\mathbf{N}$, f_n *la fonction de* Γ *dans* $\mathbf{C}$ *qui à* x *associe* $\langle x_n, x\rangle$. *En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer qu'il existe une suite strictement croissante* $(n_k)_{k\geq 0}$ *d'entiers naturels telle que* $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ *converge uniformément sur* Γ. *En déduire que* $(K^*(x_{n_k}))_{k\geq 0}$ *converge dans* H.

   (d) Montrer que $\mathrm{Im}\ (I+K)$ est de codimension finie dans H.

VI. Opérateurs de Fredholm et opérateurs de Toeplitz

Soit T dans $\mathcal{L}(H)$. On dit que T est de *Fredholm* si et seulement s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

i) l'espace $\ker T$ est de dimension finie,

ii) l'espace $\mathrm{Im}\ T$ est fermé et de codimension finie dans H.

On note $\mathcal{F}(H)$ l'ensemble des T de $\mathcal{L}(H)$ vérifiant ces propriétés. Si T est dans $\mathcal{F}(H)$ on appelle *indice de* T et on note $\mathrm{ind}\ (T)$ l'entier relatif :

$$\dim(\ker T) - \mathrm{codim}_H(\mathrm{Im}\ T).$$

On remarquera que si T est un élément inversible de $\mathcal{L}(H)$, alors T appartient à $\mathcal{F}(H)$ et a pour indice 0.

1. (a) Soient V et W deux sous-espaces de H tels que $V \subset W$ et que V soit fermé et de codimension finie dans H. Montrer que W est fermé et de codimension finie dans H.

   (b) Soit T dans $\mathcal{L}(H)$. On suppose qu'il existe S_1 et S_2 dans $\mathcal{L}(H)$ tels que $K_1 = S_1T - I$ et $K_2 = TS_2 - I$ appartiennent à $\mathcal{K}(H)$. Montrer que T est dans $\mathcal{F}(H)$.

2. Dans cette question, H est l'espace de Hilbert H^2, φ un élément de $\mathcal{C}^*$. Montrer que T_φ est dans $\mathcal{F}(H^2)$.

   Indication. On pourra utiliser les questions **V**.*2.(b),* **VI**.*1(b) et considérer la fonction* $1/\varphi$.

3. On se propose d'établir une réciproque de la question **VI**.1.(b) ci-dessus.

   Soit T dans $\mathcal{F}(H)$. On note T_0 l'application linéaire de $\ker T^\perp$ dans Im T obtenue en restreignant T à $\ker T^\perp$, P le projecteur orthogonal de H sur Im T. Il est clair que T_0 est un isomorphisme de $\ker T^\perp$ sur Im T. Or, tout isomorphisme linéaire continu d'un espace de Banach sur un autre est un homéomorphisme (théorème de Banach) ; il en résulte que T_0^{-1} est continu, ce que l'on ne demande pas de justifier davantage.

   Soit S l'élément $T_0^{-1}P$ de $\mathcal{L}(H)$. Reconnaître les éléments $ST - I$ et $TS - I$ de $\mathcal{L}(H)$ et montrer en particulier qu'ils appartiennent à $\mathcal{K}_0(H)$.

   Des questions **VI**.1.(b) et **VI**.3 il résulte qu'un élément de $\mathcal{L}(H)$ est dans $\mathcal{F}(H)$ si et seulement s'il est "inversible modulo $\mathcal{K}(H)$ " ou "inversible modulo $\mathcal{K}_0(H)$". Ceci prouve en particulier que si T_1 et T_2 sont dans $\mathcal{F}(H)$, T_2T_1 est dans $\mathcal{F}(H)$, ce que l'on ne demande pas de justifier davantage.

4. Le but de cette question est d'établir que $\mathcal{F}(H)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(H)$ et que la fonction ind est localement constante sur $\mathcal{F}(H)$.

   Soient T dans $\mathcal{F}(H)$, S dans $\mathcal{L}(H)$ telle que $K = ST - I$ et $L = TS - I$ soient dans $\mathcal{K}_0(H)$, J dans $\mathcal{L}(H)$ vérifiant : $\|J\| \times \|S\| < 1$.

   (a) Montrer qu'il existe K' et L' dans $\mathcal{K}_0(H)$ tels que :

   $$S(T+J) = (I+SJ)(I+K') \quad , \quad (T+J)S = (I+L')(I+JS).$$

   En déduire que $T+J$ est dans $\mathcal{F}(H)$, ce qui justifie bien le caractère ouvert de $\mathcal{F}(H)$.
   Indication. On pourra utiliser la question **VI**.*1(b) et le fait que si* U *est un élément de* $\mathcal{L}(H)$ *tel que* $\|U\| < 1$, *alors* $I+U$ *est inversible dans l'algèbre* $\mathcal{L}(H)$.

   (b) On admet les deux résultats suivants, qui peuvent être prouvés de manière entièrement algébrique :

   i) si T_1 et T_2 sont dans $\mathcal{F}(H)$, alors : $\mathrm{ind}(T_2T_1) = \mathrm{ind}(T_1) + \mathrm{ind}(T_2)$,

   ii) si K est dans $\mathcal{K}_0(H)$, $\mathrm{ind}(I+K) = 0$.

   Montrer que :
   $$\mathrm{ind}(T+J) = \mathrm{ind}(T).$$

   La fonction ind est donc localement constante sur $\mathcal{F}(H)$.

5. Dans cette question, H est l'espace de Hilbert H^2.

   (a) Montrer que si φ est dans $\mathcal{C}^*$, on a :

   $$\mathrm{ind}(T_\varphi) = -\deg(\varphi).$$

   (b) Si φ est dans $\mathcal{C}^*$, préciser la dimension de $\ker T_\varphi$ et la codimension de Im T_φ dans H^2.

   (c) Quels sont les éléments φ de $\mathcal{C}$ tels que T_φ soit un élément inversible de l'algèbre $\mathcal{L}(H^2)$?