

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Les candidats sont donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Rappels et notations

Ce problème, constitué de six parties, a pour objet d'étudier l'opérateur d'intégration et ses itérés sur l'espace des fonctions continues et sur l'espace des fonctions de carré intégrable.

La première partie contient des préliminaires qui seront utilisés à partir de la partie III.

La deuxième partie porte sur les fonctions Gamma et Bêta, utiles notamment dans la partie V, et sur un calcul d'équivalent d'une intégrale qui sera utilisé dans la partie VI.

La troisième partie est consacrée à l'étude de l'opérateur d'intégration sur l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$. On montre en particulier qu'il est compact.

La partie IV est consacrée à l'étude de l'opérateur d'intégration sur l'espace des fonctions de carré intégrable sur $[0, 1]$. On calcule sa norme.

Dans la partie V, on introduit un semi-groupe d'opérateurs sur $L^2(0, 1)$ dont on montre qu'il est constitué d'opérateurs compacts.

Dans la partie VI, on caractérise l'appartenance de ces opérateurs à la classe de Hilbert-Schmidt.

Dans tout le sujet, on note \mathbb{N} l'ensemble des entiers positifs ou nuls.

Tous les espaces vectoriels considérés dans le problème sont des \mathbb{C} -espaces vectoriels.

L'ensemble $C([0, 1])$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues (ou de classe \mathcal{C}^0) sur $[0, 1]$ à valeurs complexes. On le munit de la norme : $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [0, 1]\}$.

Pour un entier $k \geq 1$, on dit qu'une fonction f , définie sur $[0, 1]$ et à valeurs complexes, est de classe \mathcal{C}^k sur $[0, 1]$ lorsque f est dérivable sur $[0, 1]$ et sa dérivée f' est de classe \mathcal{C}^{k-1} sur $[0, 1]$. Dans ce cas, on note, $f^{(0)} = f$ et $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$.

Soient a, b, p des nombres réels tels que $a < b$ et $p \geq 1$. On note $L^p(a, b)$ l'espace des fonctions f de $[a, b]$ dans \mathbb{C} , mesurables sur $[a, b]$ (par rapport à la mesure de Lebesgue) et telles que

$$\int_a^b |f(t)|^p dt < +\infty.$$

On effectue l'identification classique suivante : $f = 0$ dans $L^p(a, b)$ si f est nulle presque partout, autrement dit si l'ensemble $\{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\}$ est de mesure nulle. Avec cette identification, on a une norme sur $L^p(a, b)$, définie par

$$\|f\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Le plus souvent, on considérera $a = 0$, $b = 1$ et $p = 2$. Dans ce cas, on note $\|f\|_2 = \|f\|_{L^2(0,1)}$. Cette norme provient du produit scalaire (hermitien) défini, pour tous $f, g \in L^2(0,1)$, par

$$\langle f, g \rangle_2 = \langle f, g \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

On rappelle que $L^2(0,1)$ muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, la fonction e_k est définie par $e_k(t) = e^{2i\pi kt}$, pour tout $t \in [0,1]$. On rappelle que la famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ constitue une base hilbertienne de $L^2(0,1)$, et on notera les coefficients de Fourier associés $\hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle_2$ pour $f \in L^2(0,1)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Pour s réel positif ou nul, p_s est la fonction continue sur $[0,1]$ définie, pour tout $x \in]0,1]$, par $p_s(x) = x^s = e^{s \ln(x)}$.

Si X est un espace de Banach et $T : X \rightarrow X$ est une application linéaire continue, la norme de T est définie par

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_X : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $T^n = T \circ T \circ \dots \circ T$ (T composé n fois), et $T^0 = \text{Id}$ est l'application identité sur X .

On rappelle que si $T : X \rightarrow X$ est une application linéaire continue sur un espace de Banach X , on dit que T est compacte si l'ensemble $\{T(x) : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$ est relativement compact, c'est-à-dire si sa fermeture est un compact de X .

Si H est un espace de Hilbert et si $T : H \rightarrow H$ est une application linéaire continue, alors il existe une unique application linéaire continue $T^* : H \rightarrow H$ telle que, pour tous $h_1, h_2 \in H$,

$$\langle T(h_1), h_2 \rangle_H = \langle h_1, T^*(h_2) \rangle_H.$$

L'application T^* s'appelle l'adjoint de T et on a alors $(T^*)^* = T$.

On rappelle que tout espace de Hilbert H séparable admet une base hilbertienne $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I. Préliminaires

Les questions 1, 2, 3, 4 et 5 de cette partie sont indépendantes.

1. Pour $n, m \in \mathbb{N}$, calculer

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2}\right) dx.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $\lambda > 0$.

(a) À quelle condition sur λ a-t-on $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$?

- (b) Déterminer les fonctions complexes g de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$ telles que

$$\lambda g'' + g = 0 \quad \text{et} \quad g(1) = g'(0) = 0.$$

3. Soit $f \in C([0, 1])$. Pour $x \in [0, 1]$, on définit $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Cette question concerne la dérivabilité de F sur $[0, 1]$ dont la démonstration est demandée à la question b).

- (a) Donner sans justification l'expression de F' en fonction de f .

- (b) En utilisant un taux d'accroissement, démontrer que F est dérivable sur $[0, 1]$.

4. Soit H un espace de Hilbert et $T : H \rightarrow H$ une application linéaire continue.

- (a) Démontrer que, pour tout $x \in H$, on a $\|T(x)\|_H^2 \leq \|(T^* \circ T)(x)\|_H \|x\|_H$.

- (b) En déduire que $\|T^*\| = \|T\|$ et $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2$.

5. Dans cette question, on suppose que H est un espace de Hilbert séparable et on considère $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H . Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes et D_Λ l'application linéaire définie sur l'espace vectoriel engendré par les b_n par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D_\Lambda(b_n) = \lambda_n b_n.$$

Démontrer que D_Λ se prolonge en une unique application linéaire continue sur H (que l'on notera encore D_Λ) et exprimer $\|D_\Lambda\|$ en fonction de $\|\Lambda\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n|$.

II. Fonctions Γ et B

1. Pour tout réel $s > 0$, on pose

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt.$$

- (a) Justifier que la fonction Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.
- (b) Démontrer que, pour tout $s > 0$, on a $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.
- (c) Que vaut $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$?
- (d) Démontrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

2. Pour tous réels $s > 0$ et $s' > 0$, on pose

$$B(s, s') = \int_0^1 t^{s-1} (1-t)^{s'-1} dt.$$

- (a) Justifier que la fonction B est bien définie sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
- (b) i. Soit

$$\begin{aligned} \varphi :]0, +\infty[\times]0, 1[&\longrightarrow]0, +\infty[\times]0, +\infty[\\ (x, y) &\longmapsto (xy, x(1-y)) \end{aligned}$$

Démontrer que φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.

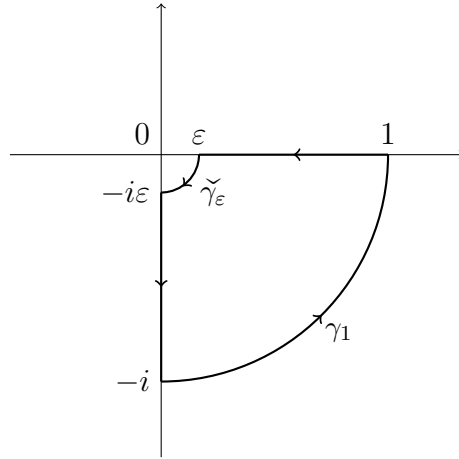
- ii. En déduire que, pour tous réels $s > 0$ et $s' > 0$, on a $\Gamma(s)\Gamma(s') = B(s, s')\Gamma(s+s')$.

3. Dans cette question, $\alpha \in]-1, 1[$ et $n \geq 1$ est un entier. On pose

$$I_n(\alpha) = \int_0^1 u^\alpha e^{-2i\pi nu} du,$$

qui est bien définie.

- (a) Calculer $I_n(0)$.
- (b) Pour $\alpha \in]0, 1[$, montrer que $I_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$.
- (c) Pour tout réel $r > 0$, on note γ_r le quart de cercle de centre 0 et de rayon r reliant $-ir$ à r . Le même chemin parcouru dans l'autre sens est noté $\check{\gamma}_r$. Pour $\varepsilon \in]0, 1[$, on considère C_ε le contour suivant (parcouru une fois dans le sens trigonométrique), constitué de la concaténation du segment reliant 1 à ε , de $\check{\gamma}_\varepsilon$, du segment reliant $-i\varepsilon$ à $-i$ et de γ_1 :



En intégrant la fonction $f(z) = \exp(\alpha \log(z) - 2i\pi n z)$ sur le contour C_ε , où \log désigne la détermination principale du logarithme, montrer que

$$I_n(\alpha) = e^{-(\alpha+1)\frac{i\pi}{2}} \int_0^1 u^\alpha e^{-2\pi n u} du + R_n(\alpha),$$

où

$$R_n(\alpha) = i \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \exp(-2i\pi n e^{i\theta} + i(\alpha+1)\theta) d\theta.$$

(d) Démontrer que $R_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$.

(e) En déduire que pour $\alpha \in]-1, 0[$, on a, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$I_n(\alpha) \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2\pi n)^{\alpha+1}} e^{-(\alpha+1)\frac{i\pi}{2}}.$$

III. L'opérateur d'intégration sur $C([0, 1])$

Dans cette partie, on s'intéresse à l'application $J : C([0, 1]) \longrightarrow C([0, 1])$ définie par

$$J(f)(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

pour $f \in C([0, 1])$ et $x \in [0, 1]$.

1. (a) Justifier que J définit bien une application linéaire de $C([0, 1])$ dans $C([0, 1])$. Démontrer que J est continue et calculer sa norme.
- (b) Démontrer que J est injective.
- (c) L'application J est-elle surjective ? On justifiera la réponse.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, non nul, et soit $f \in C([0, 1])$ telle que $J(f) = \lambda f$. Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on précisera.

3. Quel est l'ensemble des valeurs propres de J ?

4. Soient $f \in C([0, 1])$, $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$.

On rappelle que $J^n = J \circ J \circ \dots \circ J$ (J composé n fois) et $J^0 = \text{Id}$.

(a) Justifier que $J^n(f)$ est de classe \mathcal{C}^n sur $[0, 1]$ et que, si $0 \leq k \leq n$,

$$(J^n(f))^{(k)} = J^{n-k}(f).$$

(b) Si $0 \leq k < n$, déterminer la valeur de $(J^n(f))^{(k)}(0)$.

(c) En déduire que, si $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, on a

$$(J^n(f))(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

5. (a) Soit $f \in C([0, 1])$ avec $\|f\|_\infty \leq 1$. Démontrer que $J(f)$ est 1-lipschitzienne sur $[0, 1]$.

(b) En déduire que l'application linéaire J est compacte de $C([0, 1])$ dans $C([0, 1])$.

IV. L'opérateur d'intégration sur $L^2(0, 1)$

1. Pour $f \in L^2(0, 1)$ et $x \in [0, 1]$, on pose

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Cette expression est définie pour tout $x \in [0, 1]$, et on ne demande pas de le justifier.

(a) Démontrer que $V(L^2(0, 1)) \subset C([0, 1])$.

Démontrer que V est bornée comme application linéaire de $L^2(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$ et que sa norme est inférieure ou égale à 1.

(b) Démontrer que pour $f \in L^2(0, 1)$ et pour presque tout $x \in [0, 1]$, on a

$$V^*(f)(x) = \int_x^1 f(t) dt.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\lambda \neq 0$. On suppose qu'il existe $h \in L^2(0, 1)$, $h \neq 0$, telle que $V^* \circ V(h) = \lambda h$ dans $L^2(0, 1)$.

(a) Justifier que λ est un réel strictement positif.

(b) Démontrer qu'il existe $f \in C([0, 1])$ telle que $f(x) = h(x)$ pour presque tout $x \in [0, 1]$ et vérifiant $\lambda f = c - V^2(f)$ pour une constante c (qui dépend de f) à préciser.

(c) En déduire les valeurs propres non nulles et les sous-espaces propres associés de $V^* \circ V$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right)$.

Le but de cette question est de montrer que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ constitue une base hilbertienne de $L^2(0, 1)$.

3. (a) Soit $g \in L^2(0, 1)$. On peut supposer que g est définie sur $[0, 1]$. On considère alors la fonction G définie d'abord sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ par

$$G(u) = \begin{cases} g(2u)e^{-i\pi u} & \text{si } u \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(-2u)e^{-i\pi u} & \text{si } u \in]-\frac{1}{2}, 0[\end{cases}$$

puis prolongée sur \mathbb{R} par 1-périodicité. Elle est ainsi définie sur \mathbb{R} .

Pour $n \in \mathbb{Z}$, démontrer que $\widehat{G}(n) = \int_0^1 g(t) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2}\right) dt$.

- (b) Démontrer que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ engendre un sous-espace dense dans $L^2(0, 1)$ et conclure.

4. Calculer la norme de $V^* \circ V$ comme application linéaire de $L^2(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$.

5. En déduire la norme de V comme application linéaire de $L^2(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$.

V. Un semi-groupe d'opérateurs

1. Soit $p \geq 1$. Pour $w \in L^1(0, 1)$ et $f \in L^p(0, 1)$, on pose

$$(w * f)(x) = \int_0^x w(x-t)f(t) dt.$$

Démontrer que $(w * f)(x)$ est bien défini pour presque tout $x \in [0, 1]$, que $w * f \in L^p(0, 1)$ avec

$$\|w * f\|_{L^p(0,1)} \leq \|w\|_{L^1(0,1)} \|f\|_{L^p(0,1)}.$$

2. Pour tout réel s strictement positif, tout $f \in L^2(0, 1)$ et pour presque tout $x \in [0, 1]$, on pose

$$V_s(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^x (x-t)^{s-1} f(t) dt.$$

- (a) Démontrer que $V_s(f)(x)$ est bien défini pour presque tout $x \in [0, 1]$ et montrer que l'on définit ainsi une application linéaire continue V_s de $L^2(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$, et que

$$\|V_s\| \leq \frac{1}{\Gamma(s+1)}.$$

- (b) Pour n entier positif ou nul et $s > 0$, montrer que $V_s(p_n) = \frac{n!}{\Gamma(n+1+s)} p_{n+s}$.

- (c) Démontrer que, pour tout entier positif ou nul n , on a $\lim_{s \rightarrow 0^+} \|V_s(p_n) - p_n\|_2 = 0$.

- (d) En déduire que pour tout $f \in L^2(0, 1)$, on a $\lim_{s \rightarrow 0^+} \|V_s(f) - f\|_2 = 0$.

- (e) Démontrer que $(V_s)_{s>0}$ est un semi-groupe, c'est-à-dire que pour tous réels strictement positifs s_1 et s_2 , on a $V_{s_1} \circ V_{s_2} = V_{s_1+s_2}$.
3. Soient H un espace de Hilbert et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires continues compactes de H dans H . On suppose qu'il existe une application $T : H \rightarrow H$ linéaire continue telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\| = 0$. On se donne $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de la boule unité fermée de H .
- (a) Démontrer qu'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(T_k(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans H .
- (b) En déduire que l'application T est compacte.
4. Soit Q_n un polynôme de degré d_n . Il existe alors $d_n + 1$ polynômes $P_{j,n}$, $0 \leq j \leq d_n$, tels que, pour tous $x, u \in [0, 1]$, on a

$$Q_n(x - u) = \sum_{j=0}^{d_n} x^j P_{j,n}(u).$$

- (a) Pour $f \in L^2(0, 1)$, on pose

$$K_n(f) = \sum_{j=0}^{d_n} \left(\int_0^1 f(u) P_{j,n}(u) du \right) p_j.$$

Démontrer que K_n définit une application linéaire continue compacte de $L^2(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$.

- (b) Soient $s > 0$ et

$$\psi_s(u) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(s)} u^{s-1} & \text{si } u \in]0, 1], \\ 0 & \text{si } u \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Démontrer que pour tout $f \in L^2(0, 1)$, on a $\|V_s(f) - K_n(f)\|_2 \leq \|\psi_s - Q_n\|_{L^1(-1,1)} \|f\|_2$.

- (c) En déduire que, pour tout $s > 0$, l'application V_s est compacte de $L^2(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$.

VI. Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Soit T une application linéaire continue sur un espace de Hilbert H séparable. On dit que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|T(b_n)\|_H^2 < +\infty.$$

On note $\mathcal{H}_s(H)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur H .

1. Démontrer que $T \in \mathcal{H}_s(H)$ si et seulement si pour toute base hilbertienne $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T(\gamma_n)\|_H^2 < +\infty.$$

2. Soient $T \in \mathcal{H}_s(H)$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \text{Vect}\{b_k : 0 \leq k \leq n\}$ et on note P_{F_n} la projection orthogonale sur F_n . On pose enfin $S_n = T \circ P_{F_n}$.

(a) Démontrer que

$$\|T - S_n\|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|T(b_k)\|_H^2.$$

(b) En déduire que T est compacte.

3. Soit $s \in]0, 1[$. On utilise les notations de la partie II.

(a) Exprimer $\langle V_s(e_n), e_n \rangle_2$ en fonction de $I_n(s)$ et $I_n(s-1)$. En déduire un équivalent de $\langle V_s(e_n), e_n \rangle_2$ quand n tend vers l'infini.

(b) En déduire que si V_s est un opérateur de Hilbert-Schmidt, alors nécessairement $s > \frac{1}{2}$.

4. Soit $K \in L^2([0, 1] \times [0, 1], dx dy)$. Pour $f \in L^2(0, 1)$, on pose pour presque tout $x \in [0, 1]$,

$$(T_K f)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy.$$

Démontrer que T_K définit une application linéaire continue de $L^2(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$ qui est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

5. Soit $s > 0$. Démontrer que V_s est un opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement si $s > \frac{1}{2}$.

6. Démontrer que V_s peut s'écrire comme une série absolument convergente d'applications linéaires continues de $L^2(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$ de rang 1, si et seulement si $s > 1$.