74e Année. Août-Septembre 1963. N° 1-2

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
(Fondée en 1890.)

Sujets donnés aux concours des Agrégations et aux concours d'entrée aux grandes Écoles en 1963.

PREMIÈRE PARTIE

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires et Mathématiques spéciales.

5583. — On désigne par S toute transformation homographique ponctuelle, régulière (admettant une transformation réciproque), ne se réduisant pas à la transformation identique, soit du plan projectif en lui-même, soit de l'espace projectif en lui-même. Le transformé par S d'un point M sera noté M_1.

Dans les parties I, II, III du problème, on propose l'étude, *en géométrie plane*, de certaines transformations S vérifiant l'une ou l'autre des conditions suivantes :

— ou bien il existe au moins trois points non alignés A, B, C tels que leurs transformés A_1, B_1, C_1 par S soient situés respectivement sur les droites BC, CA, AB [*pour abréger, on énoncera désormais cette condition, ou toute condition analogue, en disant*: il existe au moins un « triangle » ABC dont le transformé $A_1B_1C_1$ par S est inscrit dans ABC, *même si certains des points sont à l'infini*];

— ou bien il existe au moins un « triangle » ABC (trois points non alignés) qui est inscrit dans son transformé $A_1B_1C_1$ par S, c'est-à-dire A sur la droite B_1C_1, B sur la droite C_1A_1, C sur la droite A_1B_1.

Une transformation S vérifiant la première de ces deux conditions sera appelée transformation du type Σ, ou transformation Σ, et tout « triangle » ABC dont le transformé, par une telle transformation, est inscrit dans ABC sera appelé triangle (θ).

Une transformation S vérifiant la seconde des deux conditions sera dite du type Σ', ou transformation Σ', et tout « triangle » ABC inscrit dans son transformé par une telle transformation sera appelé triangle (θ').

Dans la partie IV du problème, on propose, *dans l'espace*, l'étude de transformations S vérifiant des conditions analogues où interviendront des systèmes de quatre points non coplanaires (en abrégé : « tétraèdres »).

Les parties III et IV peuvent être étudiées indépendamment des parties I et II.

Dans les parties I et II, les transformations S étudiées sont des *similitudes directes*, dans un plan réel euclidien donné. Le plan est orienté; l'unité d'angle est le radian; la notation (L, L') représentera la mesure algébrique « modulo π » de l'angle orienté de la droite L vers la droite L'.

I. — Géométrie plane. — Soient A, B, C trois points non alignés; on désigne par I le centre du cercle passant par A, B, C, par G le point de rencontre des médianes et par H l'orthocentre du triangle ABC, par A_0, B_0, C_0 les milieux et par Iu, Iv, Iw les médiatrices respectivement des segments BC, CA, AB.

1° On donne le triangle ABC. Soient A', B', C' trois points pris respectivement sur les droites BC, CA, AB, et distincts des sommets du triangle. Démontrer que les trois cercles circonscrits aux triangles $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ ont en commun un point J, et que l'on a, « modulo π », l'égalité

$$(JB, JC) = (AB, AC) + (A'B', A'C')$$

et deux égalités analogues faisant intervenir (JC, JA) et (JA, JB).

Démontrer que, si $A'B'C'$ est un triangle directement semblable au triangle ABC (A' correspondant à A, B' à B et C' à C), le point J est confondu avec le point I.

2° Le triangle ABC est donné, ainsi qu'un nombre φ

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}\right).$$

Soient Iu_1, Iv_1, Iw_1 des droites définies à partir des médiatrices Iu, Iv, Iw par les relations

$$(Iu, Iu_1) = (Iv, Iv_1) = (Iw, Iw_1) = \varphi.$$

Les points d'intersection des droites Iu_1 et BC, Iv_1 et CA, Iw_1 et AB, sont appelés respectivement A_1, B_1, C_1.

Démontrer que A_1, B_1, C_1 sont les transformés respectivement des points A, B, C, dans une similitude directe, dont le rapport (positif) K et l'angle ω, que l'on exprimera en fonction de φ, vérifient la relation

$$(1) \qquad 2K\cos\omega + 1 = 0.$$

Quel est l'orthocentre du triangle $A_1B_1C_1$? Construire le centre O de cette similitude. Quel est le lieu du point O quand φ prend toutes les valeurs possibles?

Démontrer que les similitudes directes ainsi définies sont les seules similitudes directes du type Σ pour lesquelles le triangle ABC donné est un triangle (θ).

3° On donne maintenant une similitude directe S par son centre O, son angle ω et son rapport K (positif) et l'on suppose

$$(1) \qquad 2K\cos\omega + 1 = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\pi}{2} < \omega < \frac{3\pi}{2}.$$

On donne, d'autre part, un point I. On demande de construire un triangle ABC inscrit dans un cercle (non donné) ayant I pour centre, et tel que son transformé $A_1B_1C_1$ par S soit inscrit dans ABC (A_1 sur BC, etc.); on montrera que ce problème admet une infinité de solutions, l'un des sommets, A par exemple, pouvant être choisi arbitrairement dans une région du plan, que l'on définira. Existe-t-il des triangles rectangles parmi ces triangles ABC?

Les résultats précédents permettent de caractériser parmi, les similitudes directes, celles qui sont du type Σ et donnent un mode de construction des triangles (θ) correspondant à chacune de ces transformations.

II. — Géométrie plane. — On propose ici d'étudier par une autre méthode les similitudes directes du type Σ.

Le plan est rapporté à un repère orthornormé ayant pour origine O et pour axes Ox et Oy. Un point M pourra être défini par ses coordonnées (x, y) ou par son affixe $z = x + iy$ (le conjugué de z sera noté $\bar{z}$). On rappelle que la propriété d'alignement de trois points ayant pour affixes z, z', z'' peut être caractérisée par la relation

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} z & z' & z'' \\ \bar{z} & \bar{z}' & \bar{z}'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On désigne par S une similitude directe ayant pour centre l'origine O, pour angle ω et pour rapport (positif) K. On pose $h = Ke^{i\omega}$. Le transformé par S d'un point M d'affixe z est le point M_1 ayant pour affixe $z_1 = hz$.

1° Un point A, distinct de O, étant fixé (par exemple sur Ox), construire le lieu des points B tels que le produit vectoriel de $\mathbf{AB_1}$ et de $\mathbf{BA_1}$ soit nul.

On peut alors choisir trois points A, B, C, non alignés, distincts de O, de façon que les points A_1, B, C soient alignés, ainsi que les points A, B_1, C. Ces conditions étant réalisées, démontrer, en utilisant la relation (2), que les trois points A, B, C_1 sont alignés si, et seulement si, l'on a

$$(1) \qquad 2K\cos\omega + 1 = 0.$$

On retrouve ainsi les similitudes directes du type Σ.

On considère une telle similitude Σ, ayant O pour centre; montrer que l'on peut construire les triangles (θ) correspondants en se donnant deux de leurs sommets, A et B.

2° On revient à la similitude directe S ayant pour éléments O, ω, K. On désigne par A un point distinct de O et par A_1, A_2, A_3 les transformés par S respectivement des points A, A_1, A_2.

Déterminer celles de ces similitudes pour lesquelles les trois points A, A_1 et A_3 sont alignés, quel que soit A. Parmi elles figurent les similitudes directes Σ ayant O pour centre; quelles sont les autres similitudes S vérifiant cette propriété?

Existe-t-il une liaison simple entre cette propriété des similitudes directes Σ et la propriété établie au paragraphe II, 1°?

3° Quelle relation doit-il exister entre ω et K pour que la similitude directe S soit du type Σ'? En désignant comme précédemment par A_1, A_2, A_3 les « itérés » d'un point A par une telle similitude Σ', montrer que les points A, A_2, A_3 sont alignés, quel que soit A.

(*L'étude détaillée des similitudes* Σ' *n'est pas demandée.*)

Définir les similitudes directes Σ_0 qui sont à la fois du type Σ et du type Σ' et déterminer les triangles qui, pour une telle similitude Σ_0, sont à la fois des triangles (θ) et des triangles (θ').

III. — Géométrie plane. — Dans le plan projectif, rapporté à un repère, tout point M sera défini par un système de coordonnées homogènes, ou trilinéaires (x, y, t).

A une transformation S, répondant à la définition précisée au début de l'énoncé du problème, sera associée une matrice carrée (F), d'ordre trois, régulière, telle que le point M_1, transformé par S du point M (x, y, t), admette comme coordonnées les nombres x_1, y_1, t_1 définis par la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = (F) \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}. \tag{3}$$

On rappelle que la trace d'une matrice carrée est la somme de ses valeurs propres, ou la somme des éléments de sa diagonale principale.

1° Une transformation S étant donnée, il est possible de choisir trois points A, B, C, non alignés, tels que, A_1 et B_1 étant les transformés par S de A et de B, les points A_1, B, C soient alignés, ainsi que les points A, B_1, C.

Démontrer, en utilisant éventuellement des changements de repère, que, si une transformation S est du type Σ, la trace de la matrice (F) est nulle et que, réciproquement, si la trace de la matrice (F) associée à une transformation S est nulle, S est du type Σ.

Comment peut-on obtenir les triangles (θ) correspondant à une transformation Σ donnée?

2° On désigne par M_1, M_2, M_3 les « itérés » d'un point M par une transformation S donnée, c'est-à-dire les transformés par S respectivement de M, M_1, M_2. Démontrer que, si S est du type Σ, les trois points M, M_1, M_3 sont alignés, quel que soit M.

La réciproque de cette propriétés est-elle exacte?

3° Quelle condition doivent vérifier les éléments de la matrice (F) pour que la transformation S soit du type Σ'?

Existe-t-il, pour un point M et pour certains de ses « itérés » M_1, M_2, M_3, par une transformation Σ', une propriété d'alignement valable quel que soit M?

4° Déterminer les transformations S qui sont à la fois du type Σ et du type Σ'. Quelle est, pour une telle transformation, que l'on notera Σ_0, la forme du polynôme caractéristique de la matrice associée?

Montrer que, dans un repère convenablement choisi, une transformation Σ_0 peut être définie par une matrice de l'une ou l'autre des formes

$$\begin{pmatrix} 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & m \\ n & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & l \\ m & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad lmn \neq 0.$$

Étudier les points doubles de cette transformation (on pourra se borner au cas $l = m = n = 1$).

Que deviennent, pour une transformation Σ_0, les propriétés d'alignement relatives à un point M et à ses « itérés » M_1, M_2, M_3? Définir les triangles qui sont, pour une Σ_0, à la fois des triangles (θ) et des triangles (θ').

5° A partir des résultats qui viennent d'être obtenus dans cette partie III, on demande :

— de retrouver les similitudes directes du type Σ ou du type Σ';

— de rechercher s'il existe des « similitudes inverses » de l'un de ces types;

— de déterminer les affinités et les homologies de l'un ou l'autre de ces types.

IV. Géométrie dans l'espace. — Les définitions et conventions sont celles de la partie III, mais étendues à l'espace projectif. Un point M sera défini, par rapport à un repère choisi, par un système de coordonnées homogènes, ou tétraédrales (x, y, z, t). A une transformation S sera associée une matrice carrée, d'ordre quatre, régulière, notée (F). Les coordonnées de M et celles de son transformé M_1 par S sont alors liées par une relation matricielle analogue à (3).

La transformation S sera dite du type Σ s'il existe au moins quatre points non coplanaires, A, B, C, D tels que leurs transformés A_1, B_1, C_1, D_1 par S soient respectivement situés dans les plans BCD, CDA, DAB, ABC [en abrégé : il existe un « tétraèdre » ABCD dont le transformé par S est inscrit dans ABCD]; les « tétraèdres » vérifiant cette condition, pour une Σ donnée, seront appelés tétraèdres (θ).

On définit de même les transformations S du type Σ' et les « tétraèdres » correspondants (θ'), un tétraèdre (θ') étant inscrit dans son transformé par Σ'.

1° On propose d'abord de démontrer l'existence de couples de « tétraèdres » $\alpha\beta\gamma\delta$ et $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ tel que chacun d'eux soit inscrit dans l'autre.

On prend les quatre points α, β, γ, δ comme sommets d'un repère; quelles conditions doivent vérifier les coordonnées de quatre points α', β', γ', δ' pour que ces points soient situés respectivement dans les plans $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$? Ces conditions étant remplies, montrer que les relations exprimant que les quatre points α', β', γ', δ' ne sont pas coplanaires et que les points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont situés respectivement dans les plans $\beta'\gamma'\delta'$, $\gamma'\delta'\alpha'$, $\delta'\alpha'\beta'$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ sont compatibles et admettent une infinité de solutions.

On désignera par μ un tel couple de tétraèdres.

2° Démontrer que les transformations S du type Σ peuvent être caractérisées par le fait que la trace de la matrice associée (F) est nulle.

Comment peut-on déterminer les « tétraèdres » (θ) correspondant à une transformation Σ?

Que peut-on dire d'un point M et de ses « itérés » M_1, M_2, M_3, M_4 par une transformation Σ?

3° Étudier de même les transformations S du type Σ'.

4° Il existe des transformations S qui sont à la fois du type Σ et du type Σ'; soit Σ_0 une telle transformation. En donner un exemple (on pourra utiliser un couple de tétraèdres μ).

Quelle est la forme du polynôme caractéristique de la matrice (F_0) associée à une transformation Σ_0? Que peut-on dire d'un point M et de ses « itérés » par une Σ_0?

Que pensez-vous du carré d'une transformation Σ_0?

Analyse.

5584. — Les parties IV et V sont indépendantes.

Notations. — $\mathcal{C}$: corps des nombres complexes.

$a_{ij} \in \mathcal{C}$; $\overline{a_{ij}}$: conjugué de a_{ij}; $|a_{ij}|$: module de a_{ij}.

$A = [(a_{ij})]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$: matrice $n \times n$ à termes complexes a_{ij}.

$A^* = [(\overline{a_{ji}})]$: matrice adjointe de A (transposée de la conjuguée).

$$\|A\| = \left(\sum a_{ij}\overline{a_{ij}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) : \text{norme de A.}$$

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii} : \text{trace de A.}$$

$|A| = \text{dét. } A$: déterminant de A.

$$AB = [(c_{ij})], \ c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}b_{kj} : \text{produit des matrices A et B.}$$

I. — 1° Vérifier que $\|A\|$ est effectivement une norme sur l'ensemble des matrices A considéré comme espace vectoriel sur $\mathcal{C}$.

2° Démontrer l'inégalité $\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$.

3° Établir l'égalité $\|A\|^2 = \operatorname{tr}(AA^*) = \operatorname{tr}(A^*A)$.

4° Dans le cas où $A = A^*$ (matrice hermitienne), exprimer $\|A\|$ en fonction des valeurs propres de A.

II. — On suppose que les termes a_{ij} de la matrice A sont des fonctions à valeurs complexes de la variable complexe z. La matrice est alors

$$A(z) = [(a_{ij}(z))].$$

1° Lorsque les fonctions $a_{ij}(z)$ sont continues, on pose $\int_\gamma A(z)\,dz = \left[\left(\int_\gamma a_{ij}(z)\,dz\right)\right]$, où γ est un chemin différentiable du plan de la variable complexe.

Démontrer l'inégalité $\left\|\int_\gamma A(z)\,dz\right\| \leqslant \int_\gamma \|A(z)\|\,ds$, s désignant l'abscisse curviligne du point d'affixe z sur γ.

2° Lorsque les fonctions $a_{ij}(z)$ sont dérivables, on pose $\dfrac{dA}{dz} = A'(z) = [(a'_{ij}(z))]$.

Vérifier la formule de dérivation d'un produit :

$$(AB)' = A'B + AB'.$$

3° Lorsque les fonctions $a_{ij}(z)$ sont holomorphes dans un ouvert D du plan de la variable complexe, on dit que la matrice $A(z)$ est holomorphe dans D. Énoncer et démontrer la formule intégrale de Cauchy relative à une