

Mathématiques générales - 1982 Xoni

Série 10 (devoir n°5)

Exercice 1 Trouver l'équation admettant pour racines les différentes valeurs du rapport anharmonique de quatre nombres donnés.

Exercice 2 Résoudre l'équation

$$x^5 - 209x + 56 = 0$$

sachant que le produit de deux racines est égal à 1.

 Problème

RAPPELS.

6325. On rappelle que, pour n et k entiers naturels,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

et que, par convention, $0! = 1$. Les candidats pourront utiliser la notation C_n^k si elle leur est plus familière. La notation \mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls (entiers naturels).

OBJET DU PROBLÈME.

Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle. Dans tout le problème, \mathcal{P} désigne l'algèbre $K[x]$ des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans K . On note \mathcal{P}^* le dual de \mathcal{P} , c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur \mathcal{P} . Si L appartient à \mathcal{P}^* et p à \mathcal{P} , on note $\langle L, p \rangle$ la valeur de L sur p .

Une suite polynomiale $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{P} tels que, pour tout n , le polynôme p_n soit exactement de degré n . En particulier p_0 est un polynôme constant non nul. On remarquera que les éléments d'une telle suite forment une base de \mathcal{P} .

Une suite binomiale est une suite polynomiale $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout n , on ait, dans $K[x, y]$ l'identité

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y).$$

Par exemple, la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est binomiale.

L'objet du problème est l'étude des suites binomiales. Toutefois ces suites n'interviennent pas dans la première partie.

PREMIÈRE PARTIE.

Pour tout élément a de K , on note ε_a l'élément de \mathcal{P}^* défini par

$$\langle \varepsilon_a, p \rangle = p(a) \quad \text{pour tout } p \in \mathcal{P}$$

et l'on pose $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Soit L et M deux éléments de \mathcal{P}^* et $L \otimes M$ la forme linéaire sur $K[x, y]$ définie par

$$\langle L \otimes M, x^i y^j \rangle = \langle L, x^i \rangle \langle M, y^j \rangle \quad \text{pour } i, j \in \mathbb{N}.$$

On appelle produit de L et de M et on note LM , la forme linéaire sur \mathcal{P} définie par

$$\langle LM, p \rangle = \langle L \otimes M, p(x + y) \rangle \quad \text{pour tout } p \in \mathcal{P}.$$

En particulier si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite binomiale, on a

$$\langle LM, p_n \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle L, p_k \rangle \langle M, p_{n-k} \rangle.$$

Muni de ce produit, l'espace vectoriel \mathcal{P}^* est une algèbre associative sur K (on ne demande pas de vérifier cette assertion).

1° Démontrer que l'algèbre \mathcal{P}^* admet ε comme élément unité et que, pour a et b éléments de K , on a $\varepsilon_a \varepsilon_b = \varepsilon_{a+b}$.

2° Si L est un élément non nul de \mathcal{P}^* , on note $v(L)$ le plus petit entier n tel que $\langle L, x^n \rangle$ soit non nul. On pose

$$|L| = 2^{-v(L)}$$

et $|0| = 0$.

a) Démontrer, pour L et M appartenant à \mathcal{P}^* , que

$$|L + M| \leq \sup(|L|, |M|) \quad \text{et} \quad |LM| = |L| |M|.$$

b) Soit, pour L et M appartenant à \mathcal{P}^* , $d(L, M) = |L - M|$; démontrer que d est une distance sur \mathcal{P}^* . On munit \mathcal{P}^* de la topologie associée à d et K de la topologie discrète (toute partie de K est donc ouverte). On munit $\mathcal{P}^* \times \mathcal{P}^*$ et $K \times \mathcal{P}^*$ des topologies produites correspondantes. Établir, pour L et M appartenant à \mathcal{P}^* et a appartenant à K , la continuité des applications

$$(L, M) \mapsto L + M, \quad (L, M) \mapsto LM \quad \text{et} \quad (a, L) \mapsto aL.$$

De même, p étant un élément fixé de \mathcal{P} , démontrer que l'application

$$L \mapsto \langle L, p \rangle$$

de \mathcal{P}^* dans K est continue.

c) Démontrer que \mathcal{P}^* est complet.

3° Soit $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{P}^* . Démontrer que la série de terme général L_n est convergente si et seulement si la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

4° Soit L un élément de \mathcal{P}^* . Démontrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes

i) $\langle L, 1 \rangle = 0$;

ii) La suite $(L^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0;

iii) Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K , la série de terme général $a_n L^n$ est convergente.

(On convient, pour L appartenant à \mathcal{P}^* , que $L^0 = \varepsilon$; de même, si a appartient à K , on a $a^0 = 1$).

5° Soit L un élément non nul de \mathcal{P}^* , et posons $v(L) = m$. Démontrer que, pour tout entier naturel k , on a $v(L^k) = km$

et que

$$\langle L^k, x^{km} \rangle = \frac{(km)!}{(m!)^k} \langle L, x^m \rangle^k.$$

6° On rappelle que, n et k étant deux entiers naturels,

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

Soit A l'élément de \mathcal{P}^* défini par

$$\langle A, x^n \rangle = \delta_{n,1} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer que, pour n et k entiers naturels, on a

$$\langle A^k, x^n \rangle = k! \delta_{n,k}.$$

Pour un polynôme p , que représente $\langle A^k, p \rangle$?

DEUXIÈME PARTIE.

On note \mathcal{P}_0^* l'ensemble des éléments non nuls L de \mathcal{P}^* tels que $v(L) = 1$.

- 1° a) Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite binomiale. Montrer que $p_0 = 1$ et que, pour n non nul, on a $p_n(0) = 0$.
 b) Démontrer qu'une suite polynomiale $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est binomiale si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout a et b appartenant à K , on a

$$\langle \varepsilon_a \varepsilon_b, p_n \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle \varepsilon_a, p_k \rangle \langle \varepsilon_b, p_{n-k} \rangle.$$

- 2° Soit L un élément de \mathcal{P}_0^* . Démontrer que si un polynôme p vérifie, pour tout entier naturel k ,

$$\langle L^k, p \rangle = 0$$

alors $p = 0$. Démontrer qu'il existe une unique suite polynomiale $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout n et k entiers naturels, on ait

$$\langle L^k, p_n \rangle = k! \delta_{n,k}.$$

On dit que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la *suite associée* à L .

- 3° Soit L un élément de \mathcal{P}_0^* et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite associée. Soit M un élément de \mathcal{P}^* . Démontrer qu'il existe une unique suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L^k$$

et que

$$a_k = \frac{\langle M, p_k \rangle}{k!} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

- 4° Démontrer que, si M et N sont deux éléments de \mathcal{P}^* et L un élément de \mathcal{P}_0^* de suite associée $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors

$$\langle MN, p_n \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle M, p_k \rangle \langle N, p_{n-k} \rangle.$$

(On pourra commencer par le cas où M et N sont des puissances de L).

- 5° Démontrer que la suite associée à un élément de \mathcal{P}_0^* est binomiale et qu'inversement toute suite binomiale est la suite associée à un unique élément de \mathcal{P}_0^* .

- 6° a) Soit L un élément de \mathcal{P}_0^* et, pour tout entier naturel n ,

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle L^k, x^n \rangle}{k!} x^k.$$

Démontrer que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est binomiale (on pourra revenir à la définition d'une suite binomiale).

- b) Démontrer qu'inversement toute suite binomiale s'obtient de cette manière à partir d'un unique élément de \mathcal{P}_0^* .

c) Pour tout élément M de \mathcal{P}_0^* , de suite associée $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe ainsi un unique élément \tilde{M} de \mathcal{P}_0^* tel que, pour tout entier naturel n , on ait

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle \tilde{M}^k, x^n \rangle}{k!} x^k.$$

On dit que \tilde{M} est le *conjugué* de M . Calculer \tilde{A} .

TROISIÈME PARTIE.

1° a) Soit T une application linéaire de \mathcal{P} dans \mathcal{P} ; on note T^* l'application linéaire de \mathcal{P}^* dans \mathcal{P}^* transposée de T . Démontrer que T^* est continue.

b) Soit U une application linéaire continue de \mathcal{P}^* dans \mathcal{P}^* . Démontrer que, pour tout polynôme p , il existe un unique polynôme q tel que, pour tout entier naturel k , l'on ait

$$\langle U(A^k), p \rangle = \langle A^k, q \rangle.$$

En déduire que U est la transposée d'une application linéaire de \mathcal{P} dans \mathcal{P} .

2° Soit L un élément de \mathcal{P}_0^* et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite associée.

a) Soit α_L l'application linéaire de \mathcal{P} dans \mathcal{P} définie par

$$\alpha_L(x^n) = p_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer $\alpha_L^*(L^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

b) Soit \mathcal{A} l'ensemble des α_L pour L appartenant à \mathcal{P}_0^* . Démontrer qu'une application linéaire α de \mathcal{P} dans \mathcal{P} appartient à \mathcal{A} si et seulement si α^* est un isomorphisme algébrique et topologique de l'algèbre \mathcal{P}^* sur elle-même.

c) Soit θ_L l'application linéaire de \mathcal{P}^* dans \mathcal{P} définie par

$$\theta_L(p_n) = p_{n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Une dérivation de \mathcal{P}^* est une application linéaire ∂ de \mathcal{P}^* dans \mathcal{P}^* telle que, pour tout M et N appartenant à \mathcal{P}^* , ont ait

$$\partial(MN) = M \partial(N) + \partial(M)N.$$

Démontrer que θ_L^* est une dérivation surjective de \mathcal{P}^* et qu'inversement, pour toute dérivation continue surjective ∂ de \mathcal{P}^* , il existe un élément L de \mathcal{P}_0^* tel que $\partial = \theta_L^*$. On pose

$$\partial_L = \theta_L^*.$$

Calculer $\partial_L(L^k)$ pour k entier naturel et préciser le noyau de ∂_L .

3° Soit α une application linéaire de \mathcal{P} dans \mathcal{P} et soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite binomiale quelconque. Démontrer que α appartient à \mathcal{A} si, et seulement si, la suite $(\alpha(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est binomiale.

4° a) Soit L et M deux éléments de \mathcal{P}_0^* . Démontrer qu'il existe un unique élément de \mathcal{P}_0^* , noté $L \circ M$, tel que

$$\alpha_{L \circ M} = \alpha_L \circ \alpha_M.$$

b) Démontrer que \mathcal{P}_0^* , muni de la loi \circ que l'on vient de définir, est un groupe. Quel est son élément neutre ?

c) Soit L et M deux éléments de \mathcal{P}_0^* et soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites respectivement associées à L , M et $L \circ M$. Démontrer que si

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} x^k \quad \text{alors} \quad r_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} p_k(x).$$

5° Soit L un élément de \mathcal{P}_0^* et \bar{L} son conjugué (cf. deuxième partie, 6° c). Montrer que $\bar{L} \circ L = A$. Quel est le conjugué de \bar{L} ?

6° Soit L et M deux éléments de \mathcal{P}_0^* . Démontrer que si

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} b_k A^k \quad b_k \in K, \quad \text{pour tout } k,$$

alors,

$$L \circ M = \sum_{k=1}^{\infty} b_k L^k.$$

QUATRIÈME PARTIE.

1° Soit L un élément de \mathcal{P}^* .

a) Démontrer qu'il existe une unique application linéaire μ_L de \mathcal{P} dans \mathcal{P} telle que, pour tout élément M de \mathcal{P}^* et tout élément p de \mathcal{P} , on ait

$$\langle LM, p \rangle = \langle M, \mu_L(p) \rangle$$

b) Déterminer μ_A et, pour $a \in K$, déterminer μ_a . On pose $D = \mu_A$.

c) L et M étant deux éléments de \mathcal{P}^* , déterminer $\mu_L + \mu_M$ et $\mu_L \circ \mu_M$.