ministère de l'éducation nationale

direction des personnels enseignants à gestion
nationale des lycées et collèges

Agrégation
mathématiques

Rapport présenté par Monsieur RAMIS
Inspecteur général de l'Éducation nationale,
Président du jury

1982

présentation

1. COMPOSITION DU JURY

M.	RAMIS	*Inspecteur général de l'Éducation nationale, président.*
M.	LEGRAND	*Inspecteur général de l'Éducation nationale, vice-président.*
M.	ANDLER	*Attaché de recherches au C.N.R.S.*
M.	ANDRÉ	*Maître assistant à l'université de Nancy I.*
M.	BAYART	*Professeur au lycée Thiers à Marseille.*
M.	BECKER	*Professeur au lycée Montaigne à Bordeaux.*
M.	BERARD	*Professeur à l'université de Savoie à Chambéry.*
M.	BETHOUX	*Professeur à l'université de Lyon I.*
M.	BLOCH	*Professeur au lycée Louis Le Grand à Paris.*
M.	BROUE	*Professeur à l'université de Paris VII.*
M.	CUILLIERIER	*Professeur au lycée Montaigne à Bordeaux.*
M.	DURRMEYER	*Maître assistant à l'université de Rennes I.*
M.	FOURT	*Maître assistant à l'université de Clermont-Ferrand II.*
M.	GOSTIAUX	*Professeur au lycée St Louis à Paris.*
M.	HALBERSTADT	*Maître assistant à l'université de Paris VI.*
M.	HEE	*Maître assistant à l'université de Paris XI.*
M.	HEINICH	*Maître assistant à l'université de Paris VI.*
Mme	LEBAUD	*Professeur à l'Institut national des Sciences appliquées de Rennes.*
M.	LEBAUD	*Maître assistant à l'université de Rennes I.*
M.	LEDRAPPIER	*Chargé de recherches au C.N.R.S.*
Mme	LOSCO	*Professeur à l'université de Besançon.*
M.	MAILLIARD	*Assistant à l'université de Paris VII.*
M.	MANTIN	*Professeur au lycée Fenelon à Paris.*
M.	MIGNOT	*Professeur à l'université de Rennes I.*
M.	MOLLIER	*Professeur au lycée Louis Le Grand à Paris.*
M.	MONASSE	*Professeur au lycée Louis Le Grand à Paris.*
M.	RAMIS	*Professeur de l'université de Strasbourg I.*
M.	RANDE	*Professeur au lycée Louis Le Grand à Paris.*
M.	RAYMOND	*Professeur au lycée Faidherbe à Lille.*
M.	ROSEAU	*Professeur à l'université de Paris VI.*
M.	SCHIFFMANN	*Professeur à l'université de Strasbourg I.*
M.	SOUBLIN	*Professeur à l'université de Provence à Marseille.*
M.	STERN	*Professeur à l'université de Caen.*
M.	VAN DER OORD	*Professeur au lycée Chateaubriand à Rennes.*
M.	VANDECASTEELE	*Professeur au lycée Faidherbe à Lille.*
M.	VELU	*Professeur au C.N.A.M.*
M.	VIALLARD	*Maître assistant à l'université de Rennes.*

2. — CALENDRIER DES ÉPREUVES

2.1 Épreuves écrites.

- Elles ont eu lieu aux dates suivantes :
  Mathématiques générales : 4 mai de 8 à 14 heures
  Analyse : 5 mai de 8 à 14 heures
  Mathématiques appliquées : 7 mai de 8 à 14 heures.
- La liste d'admissibilité a été affichée le 14 juin au lycée Montaigne et 34, rue de Châteaudun.

2.2 Épreuves orales.

Elles se sont déroulées du 20 juin au 13 juillet au lycée Montaigne à Paris.
La liste d'admission a été affichée le 15 juillet.

3. — STATISTIQUES DIVERSES

3.1 Résultats généraux

Postes mis au concours	130
Candidats inscrits	1412
Candidats présents à la première épreuve	1086
Candidats présents à la dernière épreuve	982
Admissibles	267
Admis	130
Proposés pour l'équivalence des épreuves théoriques du Capes	7

Moyenne sur 20 des points obtenus par :

Le premier admissible	20,0
Le dernier admissible	7,0
Le premier agrégé	18,25
Le dernier agrégé	8,75

3.2 Répartition des notes d'écrit.

Le tableau ci-dessous indique le nombre N(m) des candidats ayant obtenu aux épreuves écrites une moyenne, sur 20, supérieure (au sens large) à m.

m	17,5	15	12,5	10	9	8	7	6,5
N(m)	6	21	55	122	170	215	267	282

m	6	5	4	3	2
N(m)	308	360	447	538	644

3.3 Répartition entre les options

	ANALYSE NUMÉRIQUE	MÉCANIQUE	PROBABILITÉS
Inscrits	663	155	594
Admissibles	122	22	123
Admis	62	7	61

3.4. Situation universitaire des candidats

Dans le tableau suivant, les notations U, J, C, F, T correspondent aux candidats des E.N.S., ULM, JOURDAN, ST CLOUD, FONTENAY et ENSET.

Les autres abréviations sont les suivantes :

E. . . . . Étudiants
C.P.R. . . . . Stagiaires de C.P.R.
B.A. . . . . Professeurs bi-admissibles
P.C. . . . . Certifiés ; certifiés stagiaires
A. . . . . Assistants
CO . . . . Coopérants ou détachés
S.N. . . . . Professeurs au service militaire, en congé, en sursis, ou en disponibilité
D. . . . . A.E., P.E.G.C., Instituteurs, M.I.-S.E., divers
M.A. . . . . Maîtres auxiliaires
P. . . . . Enseignement privé
I. . . . . Ingénieurs

CANDIDATS	U	J	C	F	T	E	C.P.R.	B.A.	PC
Inscrits	25	17	21	34	51	164	103	46	505
Admissibles	24	16	19	29	45	25	27	16	29
Admis	19	13	15	20	29	8	7	4	4

CANDIDATS	A	CO	S.N.	M.A.	P	D	I	TOTAL
Inscrits	12	107	52	139	55	80	1	1412
Admissibles	4	10	15	2	5	0	1	267
Admis	1	1	8	0	0	0	1	130

3.5 Répartition entre candidats et candidates.

	CANDIDATS	CANDIDATES
Inscrits	964	448
Admissibles	192	75
Admis	86	44

Le rang de la première candidate admise est 11.

3.6 Répartition suivant les centres d'écrit.

CENTRES / CANDIDATS	INSCRITS	AYANT COMPOSÉ AUX TROIS ÉPREUVES	ADMISSIBLES	ADMIS
Aix-Marseille	48	33	5	1
Amiens	39	24	1	0
Besançon	9	5	1	0
Bordeaux-Pau	25	16	1	0
Caen	13	9	0	0
Clermont-Ferrand	12	7	1	1
Dijon	20	15	9	3
Grenoble	61	35	5	3
Lille	116	89	9	0
Limoges	9	7	0	0
Lyon-St-Étienne	57	38	7	1
Montpellier	27	19	2	0
Nancy-Metz	51	39	8	3
Nantes	43	26	1	1
Nice	31	27	3	0
Orléans-Tours	28	21	3	0
Paris	431	312	172	119
Poitiers	13	6	1	0
Reims	19	15	2	0
Rennes-Brest	25	21	7	3
Rouen	75	50	8	1
Strasbourg-Mulhouse	42	33	1	0
Toulouse	49	31	4	1
Corse	4	2	0	0
Autres centres	165	92	16	3

écrit

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Durée : 6 heures

RAPPELS

On rappelle que, pour n et k entiers naturels,

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,!\;(n-k)\,!}$$

et que, par convention, $0\,! = 1$. Les candidats pourront utiliser la notation C_n^k si elle leur est plus familière. La notation $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls (entiers naturels).

OBJET DU PROBLÈME

Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle. Dans tout le problème, $\mathfrak{P}$ désigne l'algèbre K $[x]$ des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans K. On note $\mathfrak{P}^*$ le dual de $\mathfrak{P}$, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathfrak{P}$. Si L appartient à $\mathfrak{P}^*$ et p à $\mathfrak{P}$, on note $< \mathrm{L}, p >$ la valeur de L en p.

Une *suite polynomiale* $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathfrak{P}$ tels que, pour tout n, le polynôme p_n soit exactement de degré n. En particulier p_0 est un polynôme constant non nul. On remarquera que les éléments d'une telle suite forment une base de $\mathfrak{P}$.

Une *suite binomiale* est une suite polynomiale $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout n, on ait, dans K $[x, y]$ l'identité

$$p_n\,(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k\,(x)\,p_{n-k}\,(y)\,.$$

Par exemple, la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est binomiale.

L'objet du problème est l'étude des suites binomiales. Toutefois ces suites n'interviennent pas dans la première partie.

Pour tout élément a de K, on note ε_a l'élément de $\mathfrak{L}^*$ défini par

$$< \varepsilon_a , p > \; = p(a) \qquad \text{pour tout } p \in \mathfrak{L}$$

et l'on pose $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Soient L et M deux éléments de $\mathfrak{L}^*$ et $L \otimes M$ la forme linéaire sur K $[x, y]$ définie par

$$< L \otimes M, x^i y^j > \; = \; < L, x^i > \; < M, y^j > \qquad \text{pour } i, j \in \mathbb{N}.$$

On appelle produit de L et de M et on note LM, la forme linéaire sur $\mathfrak{L}$ définie par

$$< LM, p > \; = \; < L \otimes M, p\,(x + y) > \qquad \text{pour tout } p \in \mathfrak{L}.$$

En particulier si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite binomiale, on a

$$< LM, p_n > \; = \; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} < L, p_k > \; < M, p_{n-k} > .$$

Muni de ce produit, l'espace vectoriel $\mathfrak{L}^*$ est une algèbre associative sur K (on ne demande pas de vérifier cette assertion).

1° Démontrer que l'algèbre $\mathfrak{L}^*$ admet ε comme élément unité et que, pour a et b éléments de K, on a $\varepsilon_a \, \varepsilon_b = \varepsilon_{a+b}$.

2° Si L est un élément non nul de $\mathfrak{L}^*$, on note $v(L)$ le plus petit entier n tel que $< L, x^n >$ soit non nul. On pose

$$| L | = 2^{-v(L)}$$

et $|0| = 0$.

a. Démontrer, pour L et M appartenant à $\mathfrak{L}^*$, que

$$| L + M | \leqslant \sup (| L |, | M |) \qquad \text{et} \qquad | LM | = | L | \, | M | .$$

b. Soit, pour L et M appartenant à $\mathfrak{L}^*$, $d\,(L, M) = | L - M |$; démontrer que d est une distance sur $\mathfrak{L}^*$. On munit $\mathfrak{L}^*$ de la topologie associée à d et K de la topologie discrète (toute partie de K est donc ouverte). On munit $\mathfrak{L}^* \times \mathfrak{L}^*$ et $K \times \mathfrak{L}^*$ des topologies produits correspondantes. Établir, pour L et M appartenant à $\mathfrak{L}^*$ et a appartenant à K, la continuité des applications

$$(L, M) \longmapsto L + M, \qquad (L, M) \longmapsto LM \quad \text{et} \quad (a, L) \longmapsto aL.$$

De même, p étant un élément fixé de $\mathfrak{L}$, démontrer que l'application

$$L \longmapsto \; < L, p >$$

de $\mathfrak{L}^*$ dans K est continue.

c. Démontrer que $\mathfrak{L}^*$ est complet.

3° Soit $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{L}^*$. Démontrer que la série de terme général L_n est convergente si et seulement si la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

4° Soit L un élément de $\mathfrak{L}^*$. Démontrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes

i) $< L, 1 > \; = 0$;

ii) La suite $(L^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 ;

iii) Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K, la série de terme général $a_n L^n$ est convergente.

(On convient, pour L appartenant à $\mathfrak{L}^*$, que $L^0 = \varepsilon$; de même, si a appartient à K, on a $a^0 = 1$).

5° Soit L un élément non nul de $\mathfrak{T}^*$, et posons $v(\mathrm{L}) = m$. Démontrer que, pour tout entier naturel k, on a $v(\mathrm{L}^k) = km$

et que
$$< \mathrm{L}^k, x^{km} > = \frac{(km)!}{(m!)^k} < \mathrm{L}, x^m >^k .$$

6° On rappelle que, n et k étant deux entiers naturels,
$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

Soit A l'élément de $\mathfrak{T}^*$ défini par
$$< \mathrm{A}, x^n > = \delta_{n,1} \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer que, pour n et k entiers naturels, on a
$$< \mathrm{A}^k, x^n > = k!\, \delta_{n,k} .$$

Pour un polynôme p, que représente $< \mathrm{A}^k, p >$?

DEUXIÈME PARTIE

On note $\mathfrak{T}^*_0$ l'ensemble des éléments non nuls L de $\mathfrak{T}^*$ tels que $v(\mathrm{L}) = 1$.

1° *a.* Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite binomiale. Montrer que $p_0 = 1$ et que, pour n non nul, on a $p_n(0) = 0$.

b. Démontrer qu'une suite polynomiale $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est binomiale si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout a et b appartenant à K, on a
$$< \varepsilon_a \varepsilon_b, p_n > = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} < \varepsilon_a, p_k > < \varepsilon_b, p_{n-k} > .$$

2° Soit L un élément de $\mathfrak{T}^*_0$. Démontrer que si un polynôme p vérifie, pour tout entier naturel k,
$$< \mathrm{L}^k, p > = 0$$
alors $p = 0$. Démontrer qu'il existe une unique suite polynomiale $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout n et k entiers naturels, on ait
$$< \mathrm{L}^k, p_n > = k!\, \delta_{n,k} .$$

On dit que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la *suite associée* à L.

3° Soient L un élément de $\mathfrak{T}^*_0$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite associée. Soit M un élément de $\mathfrak{T}^*$.

Démontrer qu'il existe une unique suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que
$$\mathrm{M} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{L}^k$$

et que
$$a_k = \frac{< \mathrm{M}, p_k >}{k!} \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

4° Démontrer que, si M et N sont deux éléments de $\mathfrak{L}^*$ et L un élément de $\mathfrak{L}_0^*$ de suite associée $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors

$$< MN, p_n > = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} < M, p_k > < N, p_{n-k} > .$$

(on pourra commencer par le cas où M et N sont des puissances de L).

5° Démontrer que la suite associée à un élément de $\mathfrak{L}_0^*$ est binomiale et qu'inversement toute suite binomiale est la suite associée à un unique élément de $\mathfrak{L}_0^*$.

6° *a.* Soient L un élément de $\mathfrak{L}_0^*$ et, pour tout entier naturel n,

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{< L^k, x^n >}{k!} x^k .$$

Démontrer que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est binomiale (on pourra revenir à la définition d'une suite binomiale).

b. Démontrer qu'inversement toute suite binomiale s'obtient de cette manière à partir d'un unique élément de $\mathfrak{L}_0^*$.

c. Pour tout élément M de $\mathfrak{L}_0^*$, de suite associée $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe ainsi un unique élément $\tilde{M}$ de $\mathfrak{L}_0^*$ tel que, pour tout entier naturel n, on ait

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{< \tilde{M}^k, x^n >}{k!} x^k .$$

On dit que $\tilde{M}$ est le *conjugué* de M. Calculer $\tilde{A}$.

TROISIÈME PARTIE

1° *a.* Soit T une application linéaire de $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{L}$; on note T* l'application linéaire de $\mathfrak{L}^*$ dans $\mathfrak{L}^*$ transposée de T. Démontrer que T* est continue.

b. Soit U une application linéaire continue de $\mathfrak{L}^*$ dans $\mathfrak{L}^*$. Démontrer que, pour tout polynôme p, il existe un unique polynôme q tel que, pour tout entier naturel k, l'on ait

$$< U(A^k), p > = < A^k, q > .$$

En déduire que U est la transposée d'une application linéaire de $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{L}$.

2° Soient L un élément de $\mathfrak{L}_0^*$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite associée.

a. Soit α_L l'application linéaire de $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{L}$ définie par

$$\alpha_L(x^n) = p_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer $\alpha_L^*(L^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

b. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des α_L pour L appartenant à $\mathfrak{L}_0^*$. Démontrer qu'une application linéaire α de $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{L}$ appartient à $\mathcal{A}$ si et seulement si α^* est un isomorphisme algébrique et topologique de l'*algèbre* $\mathfrak{L}^*$ sur elle-même.

c. Soit θ_L l'application linéaire de $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{L}$ définie par

$$\theta_L(p_n) = p_{n+1} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Une dérivation de $\mathfrak{L}^*$ est une application linéaire ∂ de $\mathfrak{L}^*$ dans $\mathfrak{L}^*$ telle que, pour tout M et N appartenant à $\mathfrak{L}^*$, ont ait

$$\partial (MN) = M \partial (N) + \partial (M) N.$$

Démontrer que θ_L^* est une dérivation surjective de $\mathfrak{L}^*$ et qu'inversement, pour toute dérivation continue surjective ∂ de $\mathfrak{L}^*$, il existe un élément L de $\mathfrak{L}_0^*$ tel que $\partial = \theta_L^*$. On pose

$$\partial_L = \theta_L^*.$$

Calculer $\partial_L (L^k)$ pour k entier naturel et préciser le noyau de ∂_L.

3° Soit α une application linéaire de $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{L}$ et soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite binomiale quelconque. Démontrer que α appartient à $\mathcal{A}$ si et seulement si la suite $(\alpha(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est binomiale.

4° *a*. Soient L et M deux éléments de $\mathfrak{L}_0^*$. Démontrer qu'il existe un unique élément de $\mathfrak{L}_0^*$, noté $L \circ M$, tel que

$$\alpha_{L \circ M} = \alpha_L \circ \alpha_M.$$

b. Démontrer que $\mathfrak{L}_0^*$, muni de la loi $\circ$ que l'on vient de définir, est un groupe. Quel est son élément neutre?

c. Soient L et M deux éléments de $\mathfrak{L}_0^*$ et soient $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites respectivement associées à L, M et $L \circ M$. Démontrer que si

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}\, x^k$$

alors

$$r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}\, p_k(x).$$

5° Soient L un élément de $\mathfrak{L}_0^*$ et $\tilde{L}$ son conjugué (cf. deuxième partie, 6° *c*.). Montrer que $\tilde{L} \circ L = A$. Quel est le conjugué de $\tilde{L}$?

6° Soient L et M deux éléments de $\mathfrak{L}_0^*$. Démontrer que si

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} b_k A^k \qquad b_k \in K, \text{ pour tout } k,$$

alors

$$L \circ M = \sum_{k=1}^{\infty} b_k L^k.$$

QUATRIÈME PARTIE

1° Soit L un élément de $\mathcal{P}^*$.

a. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire μ_L de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ telle que, pour tout élément M de $\mathcal{P}^*$ et tout élément p de $\mathcal{P}$, on ait

$$< LM, p > \ = \ < M, \mu_L (p) >$$

b. Déterminer μ_A et, pour $a \in K$, déterminer μ_{ε_a}. On pose $D = \mu_A$.

c. L et M étant deux éléments de $\mathcal{P}^*$, déterminer $\mu_L + \mu_M$ et $\mu_L \circ \mu_M$.

2° Soient L un élément de $\mathcal{P}_0^*$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite associée à L. Établir que cette suite est caractérisée par les propriétés suivantes

i. $p_o = 1$

ii. $p_n(0) = 0$ pour $n \geqslant 1$

iii. $\mu_L(p_n) = n \, p_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

3° *a.* Soient L et M deux éléments de $\mathcal{P}_0^*$. On pose $N = \partial_M(L)$. Démontrer que N est un élément inversible de l'algèbre $\mathcal{P}^*$ et que

$$\theta_M = \theta_L \circ \mu_N.$$

b. Soient L un élément de $\mathcal{P}_0^*$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite associée à L. En faisant M = A dans la formule précédente, établir la formule de récurrence

$$p_{n+1}(x) = x \left[(\mu_{\partial_A(L)})^{-1} (p_n(x)) \right]$$

4° *a.* Soit L un élément de $\mathcal{P}_0^*$. Démontrer qu'il existe un élément inversible M de l'algèbre $\mathcal{P}^*$ tel que $L = AM$.

b. A l'aide de la question 2° de la quatrième partie, démontrer que, pour tout entier naturel n, on a

$$p_n(x) = (\mu_{\partial_A(L)} \circ \mu_{M^{-n-1}}) (x^n)$$

où $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite associée à L.

En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$p_n(x) = x \, \mu_{M^{-n}} (x^{n-1}).$$

CINQUIÈME PARTIE : EXEMPLES

1° On prend

$$L = A (A - \varepsilon)^{-1}.$$

a. Montrer que L appartient à $\mathcal{P}_0^*$.

b. On note $(\mathcal{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite associée à L (les $\mathcal{L}_n$ sont les polynômes de Laguerre). Démontrer que, pour $n \geqslant 1$, on a

$$\mathcal{L}_n(x) = x \left((D - I)^n (x^{n-1}) \right) = - (D - I)^{n-1} (x^n)$$

où I est l'application identique de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$. Expliciter les coefficients des polynômes $\mathcal{L}_n$.

c. Soit a un élément non nul de K. Démontrer que $(\mathcal{L}_n(ax))_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite associée à

$$\frac{1}{a}\,\mathrm{A}\left(\frac{1}{a}\,\mathrm{A} - \varepsilon\right)^{-1}.$$

En déduire une expression de $\mathcal{L}_n(ax)$ sous forme de combinaison linéaire des $\mathcal{L}_k(x)$ (formule de duplication des polynômes de Laguerre).

2° Si r est un élément de K, on pose

$$e^{r\mathrm{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}\,\mathrm{A}^n.$$

a. Vérifier que $e^{r\mathrm{A}} = \varepsilon_r$ et que $e^{\mathrm{A}} - \varepsilon$ et $\varepsilon - e^{-\mathrm{A}}$ appartiennent à $\mathcal{P}_0^*$.

b. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites associées respectivement à $e^{\mathrm{A}} - \varepsilon$ et $\varepsilon - e^{-\mathrm{A}}$. Calculer u_n et v_n.

c. Exprimer u_n sous forme de combinaison linéaire des polynômes v_k.

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

I. Remarques générales

Le problème proposait l'étude des propriétés les plus élémentaires du calcul ombral, sous la forme donnée par S.M. Roman et G.C. Rota ("the umbral calculus", *Advances in Math.*, vol 27, 1978). Le texte suivait exactement cet article.

On sait que des suites particulières de polynômes jouent un rôle important dans diverses parties des mathématiques. Le calcul ombral permet, pour certaines d'entre elles, les suites binomiales, une présentation systématique qui met un peu d'ordre dans un dédale de formules à priori mystérieuses. Ce calcul possède également des applications à la théorie combinatoire des séries formelles (S.M. Roman, the algebra of formal series, Advances in Math., vol 31, 1979). Donnons seulement le point de départ. Les notations étant celles de l'énoncé, le dual $\mathcal{P}^*$ de $\mathcal{P}$ est l'algèbre des séries formelles. La remarque initiale est que le produit usuel de deux séries formelles s'interprète comme un produit de convolution de deux formes linéaires sur $\mathcal{P}$. On en déduit un procédé de construction des suites binomiales. Si L est un élément de $\mathcal{P}_o^*$ c'est-à-dire une série formelle sans terme constant mais avec un terme du premier degré non nul, les égalités

$$d^\circ(p_n) = n \text{ et } \langle L, p_n\rangle = n!\,\delta_{n,k}$$

définissent une unique suite binomiale et on les obtient toutes ainsi. Les calculs sur les suites binomiales peuvent alors être remplacés par des calculs sur les éléments correspondants de $\mathcal{P}_o^*$ ce qui, comme le montrent les exemples de la dernière partie est souvent beaucoup plus simple. Parmi les nombreux résultats que ce point de vue permet d'obtenir, le problème proposait notamment la méthode donnant l'expression d'une suite binomiale en fonction d'une autre (III 4)) c et des formules permettant d'expliciter des suites binomiales (IV4)). On renvoie au premier article cité plus haut pour d'autres applications et exemples.

Les séries formelles ne figurant pas explicitement au programme, il n'a pas été possible d'indiquer, dès le départ, aux candidats que $\mathcal{P}^*$ était l'algèbre de ces séries. Le savoir aurait pu être rassurant mais aurait pu conduire à utiliser systématiquement l'écriture usuelle (avec les monomes x^n) ce qui est précisément la chose à éviter. La seule difficulté du problème était sa longueur. Il ne faisait appel qu'aux notions élémentaires de topologie et de la théorie de la dualité. A quelques exceptions près, les questions demandaient plus de soin et de bon sens qu'une véritable réflexion. Une fois écarté l'habituel lot de copies vides ou presques vides on constate d'ailleurs qu'une proportion assez importante de candidats a été capable de démarrer valablement le problème (parties I et II). Par contre, dans pratiquement tous les cas, la rédaction des copies a été déplorable. Pour ne citer qu'un exemple, la plupart des candidats ne réussissent pas à établir de façon entièrement correcte la continuité du produit

(I 2)a)) ou ont besoin de 10 lignes d'inégalités pour aboutir. Sur des questions aussi classiques les correcteurs n'ont évidemment fait preuve d'aucune indulgence. On ne saurait trop conseiller aux candidats de s'entraîner à rédiger en temps limité, de façon précise mais sans discours inutile. D'une manière générale, la correction des copies confirme, sur ce point, les remarques contenues dans le rapport de l'an dernier.

II. Remarques particulières

Première partie :

Elle est consacrée à la définition et à l'étude de la topologie de $\mathcal{P}^*$. Comme on vient de le signaler, la question 2) a conduit à des rédactions filandreuses et souvent incomplètes. Une proportion faible de candidats traite la question 2) c) qui ne comportait pourtant aucun piège. Par contre les questions suivantes sont, en moyenne, assez bien traitées.

Deuxième partie :

La question 2) se réduisait immédiatement à l'étude d'un système triangulaire. Cela a été vu par beaucoup de candidats mais ici encore des rédactions confuses ont dû être sanctionnées dans de nombreux cas. Les deux questions suivantes étaient faciles mais il fallait faire appel aux résultats de continuité de la première partie. Très peu de copies l'ont fait. Il était inutile de faire appel au produit de Cauchy de deux séries mais si on le faisait il convenait de le justifier ce qui n'a pratiquement jamais été le cas. Pour la question 5) il fallait noter que le corps K étant infini deux polynomes égaux en tant que fonctions sont identiques.

Le début de la 6ème question a donné lieu à de nombreuses erreurs. Tout d'abord, dans l'expression $\langle L^k, x^n \rangle$ la lettre x est "muette"; on a donc

$$q_n(x+y) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\langle L^k, x^n \rangle}{k!} (x+y)^k$$

et non pas

$$q_n(x+y) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\langle L^k, (x+y)^n \rangle}{k!} (x+y)^k$$

Bien que partant de l'expression fausse certains candidats réussissent à obtenir le résultat. A vrai dire rares sont les candidats qui ne prétendent pas obtenir au bout du calcul au prix, quelquefois, d'indices illisibles ou soumis à des mutations aussi brusques qu'imprévisibles.

Troisième partie :

Sans être difficile elle demandait déjà un peu plus de dextérité et on arrive là à la limite de ce que la plupart des candidats peuvent faire dans le temps imparti. Elle contient les résultats de base de la théorie et, notamment, la structure de groupe de $\mathcal{P}_\circ^*$(substitution d'une série formelle dans une autre) et sa traduction en termes de suites binomiales. A titre d'exemple voici comment on pouvait traiter la première question. Notons E_n l'espace vectoriel des polygomes de degré au plus n ; pour tout n, il existe n' tel que $T(E_{n'}) \subset E_n$. Si L et L_o sont deux éléments de $\mathcal{P}^*$, on a

$$\langle T^*(L-L_o) \,,\, x^p \rangle = \langle L-L_o \,, T(x^p) \rangle$$

donc si $v(L-L_o) > n'$ alors $v(T^*(L)-T^*(L_o)) > n$ ce qui prouve la continuité. Pour la réciproque, on note que, quand k tend vers l'infini A^k tend vers 0. Pour p fixé, on a donc, U étant continue, $\langle U(a^k),p \rangle = 0$ pour k assez grand. Si on pose

$$q(x) = \sum_k \frac{\langle U(A^k),p \rangle}{k!} x^k$$

alors q est un polynome qui vérifie $\langle U(A^k),p \rangle = \langle A^k,q \rangle$. On pose $T(p) = q$; on vérifie que T est linéaire. Par construction T^*-U est nulle sur A^k. Or T^* et U sont continues et l'ensemble des A^k est total donc $T^* = U$.
Les parties IV et V ont été peu abordées. La question IV 4)b) est la seule question un peu délicate du problème.

III. Répartition des notes

Notes	Nombre de candidats
0	67
1-4	208
5-8	129
9-12	179
13-16	156
17-20	93
21-24	86
25-28	61
29-32	29
33-36	31
37-40	19
41-48	21
49-60	7

COMPOSITION D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

INTRODUCTION

Dans tout le problème, E_0 (resp. L^1) désigne l'espace vectoriel des fonctions (resp. classes de fonctions) continues et bornées sur $\mathbb{R}^2$ (resp. intégrables pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$), à valeurs complexes.

E_1 est l'ensemble des éléments de E_0 dont la classe appartient à L^1; comme c'est l'usage, on notera par une même lettre une classe de fonctions et un représentant de cette classe.

On pose :

$$\|f\|_\infty = \sup\left(\{\,|f(u, v)|\,/(u, v) \in \mathbb{R}^2\,\}\right) \quad \text{pour} \quad f \in E_0\,,$$

et

$$\|f\|_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} |f(u, v)|\,du dv \quad \text{si} \quad f \in L^1\;;$$

on abrège en « p.p. » l'expression « presque partout », et en « $\iint$ » le signe « $\iint_{\mathbb{R}^2}$ ».

Si f est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ et si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $f_{a,b}$ la fonction définie par $f_{a,b}(x, y) = f(a + x, b + y)$; a étant > 0, Δ_a représente l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $-a \leqslant x \leqslant a$ et $-a \leqslant y \leqslant a$.

On rappelle enfin que $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin t}{t}\,dt$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ quand le réel a tend vers $+\infty$ et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ vaut $\sqrt{\pi}$.

Les quatre parties sont dépendantes, mais on peut traiter chacune en admettant les résultats de celles qui précèdent.

PREMIÈRE PARTIE

1° *a*. Soient f et g appartenant à L^1; montrer — par exemple à l'aide du théorème de Fubini — que la quantité

$(f * g)(x, y) = \iint f(x - u, y - v)\, g(u, v)\, du dv$ est définie pour presque tout (x, y), que $f * g \in L^1$ et que $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$.

Si $g \in E_1$, établir que $f * g$ appartient aussi à E_1 et majorer $\|f * g\|_\infty$ en fonction de $\|f\|_1$ et $\|g\|_\infty$.

b. f étant toujours dans L^1, on pose $\hat{f}(x, y) = \iint f(u, v)\, e^{i(ux + vy)}\, du dv$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; prouver que $\hat{f} \in E_0$ et que, si $g \in L^1$, $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

2° *a.* Soit $\lambda > 0$; pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et $a > 0$, on pose

$$I_{u,v}(a) = \iint_{\Delta_a} \frac{e^{i(ux+vy)} \sin \lambda x \sin \lambda y}{xy} dxdy$$

Mettre $I_{u,v}(a)$ sous forme du produit de deux intégrales simples; montrer qu'il est borné indépendamment de (u, v, a) et que, lorsque a tend vers $+\infty$, $I_{u,v}(a)$ tend vers : π^2 si $(u, v) \in \mathring{\Delta}_\lambda$ (intérieur de Δ_λ) et 0 si $(u, v) \notin \Delta_\lambda$.

b. Lorsque $f \in L^1$, déduire du *a.* la limite de

$$\iint_{\Delta_a} \hat{f}(x, y) \frac{\sin \lambda x \sin \lambda y}{xy} dxdy$$

quand a tend vers $+\infty$.

c. On suppose que $f \in E_1$ et que $\hat{f} = 0$. Établir que $f(0,0) = 0$, puis que $f(a, b)$ est nul pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (on pourra utiliser la fonction $f_{a,b}$).

3° f désigne un élément de L^1.

a. Montrer que $\| f_{a,b} - f \|_1$ tend vers 0 quand (a, b) tend vers $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ (on pourra, par exemple, approcher f par des fonctions continues à support compact).

b. Prouver que, si $f * g = 0$ pour tout $g \in E_1$, alors $f = 0$ p.p.

c. Déduire des résultats précédents que, si $\hat{f} = 0$, alors $f = 0$ p.p.

4° K est un compact de $\mathbb{R}^2$ et μ_K sa fonction caractéristique.

a. Vérifier que, pour y (resp. x) réel fixé, $\hat{\mu}_K(x, y)$ est une fonction analytique de x (resp. y).

Montrer que, si la fonction $\hat{\mu}_K$ est nulle sur un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, elle l'est alors sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. A quelle condition sur K en est-il ainsi?

b. Application : On suppose que $\mathring{K}$ n'est pas vide.

Soit $f \in L^1$, telle que $\iint_{t(K)} f(u, v)\, dudv$ soit nulle pour toute translation t du plan affine $\mathbb{R}^2$; démontrer qu'alors f est nulle presque partout.

5° Soient K′ et K″ deux compacts de $\mathbb{R}^2$, « réguliers » en ce sens que chacun est l'adhérence de son intérieur.

On suppose que, pour toute droite affine L, $L \cap K'$ et $L \cap K''$ ont la même longueur (pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$).

a. Établir que $\hat{\mu}_{K'}(x, y) = \hat{\mu}_{K''}(x, y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (on pourra commencer par le cas où $x = 0$).

b. En déduire que $\mathring{K}''$ est inclus dans K′, puis que K′ = K″.

DEUXIÈME PARTIE

On note S l'ensemble des fonctions $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ qui ont la propriété suivante : $P(x, y) \dfrac{\partial^{k+l}\psi}{\partial x^k \partial y^l}(x, y)$ est borné sur $\mathbb{R}^2$ pour tous k, l entiers $\geqslant 0$ et tout polynôme $P \in \mathbb{C}[x, y]$.

1° ψ désigne, dans cette question, un élément de S.

a. Vérifier que S est inclus dans L^1; démontrer que $\hat{\psi}$ est indéfiniment différentiable et appartient à S (on pourra montrer que, si l'on pose

$$\psi_1(u, v) = \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v), \text{ on a } x \hat{\psi}(x, y) = i \hat{\psi}_1(x, y).$$

b. Si $\omega \in S$, prouver que

$$\iint \psi\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}\right) \widehat{\omega}\,(u, v) du dv = \iint \omega\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}\right) \widehat{\psi}\,(u, v) du dv \quad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

Calculer explicitement $\widehat{\omega}\,(x, y)$ pour la fonction $\omega\,(u, v) = e^{-u^2-v^2}$.

c. Déduire de ce qui précède que $\psi\,(0,0) = \dfrac{1}{4\pi^2} \displaystyle\iint \widehat{\psi}\,(x, y) dx dy$, puis exprimer de manière analogue $\psi(a, b)$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Établir que l'application $\psi \longmapsto \widehat{\psi}$ définit une bijection de S sur lui-même.

2° Soit $f \in L^1$.

a. Montrer qu'il existe une fonction $\rho \in S$ telle que :

$$\widehat{\rho}\,(x, y) = 1 \text{ si } (x, y) \in \Delta_1 \quad \text{et} \quad \widehat{\rho}\,(x, y) = 0 \text{ si } (x, y) \notin \Delta_2 .$$

Pour $\lambda > 0$ et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on note :

$$\rho_\lambda\,(u, v) = \frac{1}{\lambda^2}\, \rho\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}\right) \text{ et } h_\lambda\,(u, v) = \widehat{f}\,(0,0)\, \rho_\lambda\,(u, v) - (f * \rho_\lambda)\,(u, v).$$

b. Démontrer que $\| h_\lambda \|_1$ tend vers 0 quand $\lambda \to +\infty$ et que $\| f * \rho_\lambda - f \|_1$ tend vers 0 quand $\lambda \to 0_+$.

c. Déduire du premier résultat de *b* que, pour $\delta > 0$, il existe un voisinage V de (0,0) dans $\mathbb{R}^2$ et une fonction $h \in L^1$ tels que

$$\| h \|_1 < \delta \text{ et } \widehat{h}\,(x, y) = \widehat{f}\,(0,0) - \widehat{f}\,(x, y) \text{ pour } (x, y) \in V.$$

Énoncer et prouver un résultat analogue, où (0,0) est remplacé par un point quelconque (a, b) de $\mathbb{R}^2$.

3° Dans la suite de cette partie, on fixe une fonction $\varphi \in E_0$.

a. Vérifier que $f * \varphi$ conserve un sens pour tout $f \in L^1$, que $f * \varphi$ appartient alors à E_0, mais plus nécessairement à L^1.

Montrer que $(f * g) * \varphi = f * (g * \varphi)$ pour f et g appartenant à L^1.

b. On pose :

$$I_\varphi = \{ f \in L^1 \,/\, f * \varphi = 0 \},$$

$$Z_\varphi = \{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \widehat{f}\,(a, b) = 0 \text{ pour tout } f \in I_\varphi \}.$$

Établir que I_φ est un sous-espace vectoriel fermé de L^1, stable pour $*$, et que Z_φ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

4° On suppose, dans le reste de cette partie, que Z_φ est vide.

a. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, expliquer pourquoi il existe un voisinage V de (a, b), $f \in I_\varphi$ et $h \in L^1$ tels que :

$$\widehat{f}\,(a, b) = 1,\ \| h \|_1 < 1 \quad \text{et} \quad \widehat{h}\,(x, y) = 1 - \widehat{f}\,(x, y) \quad \text{pour} \quad (x, y) \in V.$$

b. Soit g un élément de L^1, tel que $\widehat{g}$ soit à support compact, inclus dans V. On définit la suite de fonctions (g_n) par : $g_0 = g$ et $g_{n+1} = h * g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \| g_n \|_1$ est convergente et que la fonction $g_\infty = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ est définie presque partout.

Calculer $\widehat{g}_\infty$ en fonction de $\widehat{g}$ et $\widehat{h}$ uniquement.

c. Prouver que $g = g_\infty * f$ p.p. et que g appartient à $I\varphi$.

En déduire que, si ψ appartient à S et $\widehat{\psi}$ est à support compact, alors $\psi \in I_\varphi$.

5° Démontrer que $I_\varphi = L^1$ (on pourra d'abord vérifier que ρ_λ appartient à I_φ pour tout $\lambda > 0$), puis que $\varphi = 0$.

TROISIÈME PARTIE

Pour tout nombre complexe w, on note F_w la fonction définie par $F_w(z) = \exp\left[\frac{w}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]$ pour $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(w)\, z^n$ le développement de Laurent de F_w au point 0.

1° *a.* Pour quelles valeurs de z la série ci-dessus converge-t-elle vers $F_w(z)$? Comment peut-on calculer $J_n(w)$ en fonction de F_w?

b. Soit Γ le cercle de centre O, de rayon 1, dans le plan complexe, orienté dans le sens trigonométrique; montrer que :

$$J_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\,!} \left(\frac{w}{2}\right)^{n+2k} \int_\Gamma z^{-n-k-l} e^z\, dz$$

pour $w \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

c. Lorsque $n \in \mathbb{N}$, expliciter les coefficients de la série entière du *b.*; quel est son rayon de convergence?

2° *a.* Prouver que $\frac{d}{dw}\left(w^n J_n(w)\right) = w^n J_{n-1}(w)$ pour $w \in \mathbb{C}$ et $n \geqslant 1$.

b. Établir que :

$$J_n(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - w \sin\theta)\, d\theta$$

pour $w \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

c. Montrer que l'équation $J_1(x) = 0$ a, au moins, deux racines réelles > 0; on notera désormais J l'ensemble des nombres de la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des zéros réels > 0 de la fonction J_1.

3° *a.* Soient r un réel > 0 et D (r) le disque fermé de centre O et de rayon r dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Démontrer que $\widehat{\mu}_{D(r)}(x, y) = 2\pi \int_0^r J_0(\rho\sqrt{x^2 + y^2})\, \rho d\rho$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

en déduire que, si $(x, y) \neq (0,0)$, $\widehat{\mu}_{D(r)}(x, y)$ vaut $\frac{2\pi r}{\sqrt{x^2 + y^2}} J_1(r\sqrt{x^2 + y^2})$.

Quelle est la valeur de $\widehat{\mu}_{D(r)}(0,0)$?

b. Soient K un compact de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi \in E_0$, tels que $\mu_K * \varphi = 0$.

Montrer que, pour tout $(a, b) \in Z_\varphi$, on a $\widehat{\mu}_K(a, b) = 0$ (Z_φ a été défini au 3° de la deuxième partie).

4° *Application.*

a. Soit $\varphi \in E_0$, ayant la propriété suivante :

(1) il existe deux réels > 0, r_1 et r_2 tels que $\frac{r_1}{r_2} \notin J$ et que $\iint_D \varphi(x, y) dxdy$ soit nulle pour tout disque D, de centre quelconque et de rayon $r \in \{r_1, r_2\}$.

Prouver que φ est identiquement nulle.

b. Vérifier que la conclusion de *a.* tombe en défaut si l'on ne suppose pas que $\frac{r_1}{r_2} \notin J$ (on pourra, par exemple, montrer que la fonction $\varphi(x, y) = \sin y$ a une intégrale nulle sur tout disque ayant pour rayon l'un quelconque des zéros réels > 0 de la fonction J_1).

5° Si f appartient à L^1 et vérifie la propriété (1) du *a.*, est-elle nulle presque partout?

QUATRIÈME PARTIE

On note $\mathcal{D}$ le groupe des déplacements affines du plan $\mathbb{R}^2$; si K est un compact de $\mathbb{R}^2$, une fonction $\varphi \in E_0$ est dite *K-inerte* lorsque $\iint_{d(K)} \varphi(x, y)dxdy$ est nulle pour tout $d \in \mathcal{D}$.

On dit que K est *descriptif* lorsque 0 est la seule fonction K-inerte dans E_0.

1° Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$.

a. On suppose que $\hat{\mu}_K(0,0) \neq 0$ et que $\hat{\mu}_K$ n'est, dans $\mathbb{R}^2$, identiquement nulle sur aucun cercle de centre 0.

Démontrer qu'alors K est descriptif.

b. Pour x et y complexes, on pose encore

$$\hat{\mu}_K(x, y) = \iint \mu_K(u, v)\, e^{i(ux+vy)}\, dudv.$$

Prouver que la conclusion de *a.* demeure, si l'on suppose seulement que $\hat{\mu}_K(0,0) \neq 0$ et que $\hat{\mu}_K$ n'est identiquement nulle sur aucun des

$$\Gamma_r = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / x^2 + y^2 = r^2\} \quad \text{pour } r > 0.$$

2° *a.* Montrer qu'aucun disque fermé n'est un compact descriptif.

b. Établir, par contre, que le compact délimité par une ellipse, non circulaire et non réduite à un segment, est descriptif.

c. Qu'en est-il pour un carré?

3° *a.* Soient $a < b$ et $c > 0$ trois nombres réels, et T le compact délimité par le triangle $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, c)$.

$r > 0$ étant fixé, on pose : $x_t = t$ et $y_t = -it\sqrt{1 - \frac{r^2}{t^2}}$ pour $t \geqslant r$.

Calculer explicitement $\hat{\mu}_T(x_t, y_t)$ et démontrer qu'il existe un nombre complexe $k \neq 0$, indépendant de t, tel que la fonction $\hat{\mu}_T(x_t, y_t)$ soit équivalente à $\frac{k}{t^2} e^{ct}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

b. Soit K_0 un compact dont tous les points ont une ordonnée $\leqslant 0$; prouver que $\hat{\mu}_{K_0}(x_t, y_t)$ reste borné lorsque $t \to +\infty$.

c. Établir que $K_0 \cup T$ est descriptif.

4° Démontrer que tout compact convexe, d'intérieur non vide, dont la frontière est une ligne polygonale, est descriptif.

5° Soit K un compact convexe, d'intérieur non vide, dont la frontière Γ est un arc de classe C^1 par morceaux.

On suppose que Γ a, au moins, un point anguleux C, c'est-à-dire tel que les deux demi-tangentes en C à Γ soient distinctes.

Démontrer que K est descriptif.

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE D'ANALYSE

I. Thème du sujet

La démonstration d'un résultat récent de géométrie intégrale était cette année le thème de l'épreuve d'Analyse : un compact K du plan est appelé *descriptif* lorsque, pour chaque fonction continue f, la nullité des intégrales de f sur toutes les parties déduites de K par déplacement, entraîne que f est identiquement nulle. On ne connaît encore aucune caractérisation géométrique des compacts descriptifs, aussi est-ce seulement une condition suffisante - très intuitive, d'ailleurs, bien que découverte il y a moins de dix ans - que l'on établissait au IV 5°.

Ce type de problème, qui consiste à déduire de propriétés géométriques d'un ensemble l'injectivité - ou la surjectivité - d'opérateurs différentiels ou intégraux qui lui sont associés, se retrouve également au sujet d'équations aux dérivées partielles ou de fonctions analytiques ; les fonctions de Bessel du III jouent là encore un rôle central, dont la nature profonde est loin d'être élucidée. Signalons enfin qu'une étude analogue peut être faite en ne supposant plus les fonctions continues, mais seulement localement intégrables ; on obtient essentiellement les mêmes résultats, au prix seulement d'une technique plus élaborée, utilisant les distributions et le théorème de Schwartz sur les fonctions moyennes-périodiques.

II. Observations générales

On renvoie, pour ce qui concerne la "technique" de l'écrit et les moyens de s'y entraîner, aux précédents rapports et notamment à celui de l'épreuve de Mathématiques générales de 1981. Les remarques plus spécifiques à ce problème concerneront d'abord l'intégrale de Lebesgue : les candidats la manient de façon bien trop formelle et rares sont ceux qui pensent - et parviennent - à justifier passages à la limite ou dérivations sous le signe somme. Préciser pourquoi tel théorème est utilisable, et à quelles fonctions ou parties on l'applique, est un excellent moyen de gagner des points et d'éviter les erreurs ; c'est aussi une saine habitude à prendre lorsqu'on souhaite créer ou enseigner des mathématiques.

Cette tendance à un formalisme excessif se manifeste également pour tout ce qui touche aux fonctions analytiques : convergence de séries, caractère holomorphe d'intégrales, semblent aller de soi pour beaucoup, et les classiques invocations "par Cauchy", "par Lebesgue", suffire à les justifier. Un effort important est donc nécessaire sur ce point : on n'a vraiment compris que ce qu'on est capable d'expliquer, et les candidats ont tout intérêt à s'imposer dès maintenant la netteté intellectuelle qu'ils voudront à juste titre obtenir de leurs futurs élèves.

Ils auront aussi avantage à relier bien mieux les deux notions qu'ils ont de l'intégration : l'une, "effective", étudiée en Premier Cycle et qui est essentiellement celle de Riemann, l'autre, plus "fonctionnelle", de Lebesgue qu'ils abordent deux années après. Le temps semble avoir creusé un infranchissable fossé entre ces théories pourtant complémentaires et, aussi bien à l'écrit qu'à l'oral, l'apparition au sujet de l'une d'elles de questions concernant l'autre désarçonne même les meilleurs.

Ceci signalé, le niveau d'ensemble est relativement satisfaisant, avec un nombre assez élevé de bonnes compositions et l'impression que beaucoup de candidats, même s'ils ne les maîtrisent qu'imparfaitement, ont fait un réel effort d'étude sur les notions du programme et que la bonne volonté ne leur manque pas.

Quant aux copies très faibles, lacunaires ou truffées d'erreurs, elles doivent convaincre leurs auteurs que, si ils souhaitent réellement réussir au Concours, il faut donner davantage de précision à leurs connaissances, et à leur travail une régularité qu'il n'a pas eue jusqu'à présent.

III. Remarques particulières sur certaines questions

I.2° - On oublie souvent le prolongement par continuité de la fonction $\frac{\sin t}{t}$ en 0 ; également beaucoup de majorations erronées pour $I_{u,v}(a)$, fondées sur l'hypothétique convergence de $\int_0^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$.

I.4° - Le principe du prolongement analytique doit être utilisé deux fois, en précisant dans quels ensemble varient x et y.

I.5° - C'est essentiellement le principe théorique du scanographe, en remplaçant la mesure de Lebesgue par une mesure de Stieltjes ayant pour densité celle de l'objet à analyser.

II.1° - Etourderie fréquente pour montrer que S est inclus dans L^1 : la fonction $\frac{1}{x^2 y^2}$ n'est pas intégrable. Par ailleurs, même les meilleurs candidats recourent, pour calculer $\hat{\omega}$, à des méthodes détournées - comme la recherche d'une équation différentielle -, au lieu d'appliquer le théorème de Cauchy.

II.4° - L'existence presque partout de g_∞ résulte directement de la convergence normale dans l'espace de Banach L^1.

III.2° - On peut, au c., utiliser un encadrement pour trouver "suffisamment" de changements de signe de J_1 ; ainsi, par exemple, $J_1(2)$ est somme d'une série, alternée à partir du rang 2, donc supérieure ou égale à sa somme partielle de rang 1, qui vaut $\frac{1}{2}$.

III.4° - b., et le fait que J est une partie dense dans $\mathbb{R}_+$, montrent à quel point l'implication étudiée au a. est "instable" en fonction des valeurs de (r_1, r_2).

IV. 1° - Pour b., on applique le principe du prolongement analytique au paramétrage (rcos z , rsin z) de Γ_r.

IV.4° et 5° font ressortir le rôle des points anguleux du bord dans le caractère descriptif d'un compact ; cependant, vu 2° b., il ne s'agit pas là d'une condition nécessaire et, de fait, on ignore encore si le disque est le seul compact convexe non descriptif du plan.

IV. Répartition des notes

Notes	Nombre de candidats
0	156
1-4	309
5-8	121
9-12	76
13-16	51
17-20	42
21-24	41
25-28	41
29-32	48
33-36	51
37-40	29
41-48	32
49-60	36

ANALYSE NUMÉRIQUE

DUREE : 6 Heures

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Si $a \in \mathbb{R}^n$, alors a_i désigne la $i^{\text{ème}}$ composante de a, $i = 1, ..., n$.

Si $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^n$, alors (a, b) désigne leur produit scalaire euclidien :

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

Si $a \in \mathbb{R}^n$, alors $a \geqslant 0$ signifie $a_i \geqslant 0$ pour $i = 1, ..., n$.

Si $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^n$, alors $a \geqslant b$ (respectivement $a \leqslant b$) signifie $a - b \geqslant 0$ (respectivement $b - a \geqslant 0$).

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Si $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, alors A^* désigne l'application transposée de A.

Si $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, on pose $a_{ij} = (\mathrm{A}\,\varepsilon^j, e^i)$ pour $i = 1, ..., m$ et $j = 1, ..., n$, où e^i désigne le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ et ε^j le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et l'on note encore

$$\mathrm{A} = (a_{ij})_{\substack{i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n}}.$$

Si P et Q sont deux ensembles tels que $\mathrm{P} \subset \mathrm{Q}$, alors $\mathrm{Q} - \mathrm{P}$ désigne le complémentaire de P par rapport à Q.

L'ensemble vide est désigné par $\varnothing$.

PRÉLIMINAIRES

Si $\mathrm{B} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $g \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}$, on désigne par P_m l'ensemble

$$\mathrm{P}_m = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{B}y = g \\ y \geqslant 0 \\ (f, y) \geqslant a \end{array} \right\}$$

On veut prouver la proposition (π_m) suivante

$$(\pi_m) : \text{Si} \quad \mathrm{P}_m = \varnothing \quad \text{alors il existe} \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \quad \text{tels que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{B}^* x - tf \geqslant 0 \\ (x, g) - at < 0 \\ t \geqslant 0 \end{array} \right.$$

Q.1. On suppose d'abord $m = 1$ et n quelconque dans $\mathbb{N}$.

En mettant en évidence tous les cas qui impliquent que l'ensemble P_1 correspondant est vide, montrer que la proposition (π_1) est vraie.

Q.2. On suppose que la proposition (π_m) est vraie pour $1 \leqslant m \leqslant q$ et pour n quelconque dans $\mathbb{N}$.

a. Soit alors $H \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{q+1}, \mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$ et soit

$$P = \left\{ y \in \mathbb{R}^{q+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} Hy = h \\ y \geqslant 0 \end{array} \right\}$$

On suppose que P est vide; montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} H^* x \geqslant 0 \\ (x, h) < 0 \end{array} \right.$$

On montrera pour cela que l'hypothèse « P est vide » implique qu'un ensemble du type P_q est vide, ensemble que l'on explicitera.

b. Soit $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{q+1}, \mathbb{R}^n)$, $\quad g \in \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathbb{R}^{q+1}, \quad a \in \mathbb{R}$.

On suppose que l'ensemble $\left\{ y \in \mathbb{R}^{q+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} By = g \\ y \geqslant 0 \end{array} \right\}$ est non vide

et que l'ensemble $\left\{ y \in \mathbb{R}^{q+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} By = g \\ y \geqslant 0 \\ (f, y) \geqslant a \end{array} \right\}$ est vide.

En utilisant le fait qu'il n'existe pas d'élément y de $\mathbb{R}^{q+1}$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} By = g \\ y \geqslant 0 \\ (f, y) = a \end{array} \right.$$

montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} B^* x - tf \geqslant 0 \\ (x, g) - at < 0 \\ t \geqslant 0 \end{array} \right.$$

c. Déduire des questions précédentes que la proposition (π_m) est vraie pour tout m de $\mathbb{N}$.

Q.3. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$.

Soit $S_1 = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geqslant b \}$

et

$$S_2 = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \begin{array}{l} A^* y = c \\ y \geqslant 0 \\ (b, y) \geqslant a \end{array} \right\}$$

On suppose que $S_1 \neq \varnothing$ et que $S_2 = \varnothing$. En utilisant les résultats précédents montrer qu'il existe $z \in S_1$ tel que $(c, z) < a$.

Q.4. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $c \in \mathbb{R}^n$. Déduire de ce qui précède que si l'ensemble

$S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} Ax \leqslant 0 \\ (c, x) < 0 \end{array} \right\}$ vérifie $S_3 = \varnothing$, alors il existe $u \in \mathbb{R}^m$ tel que $\left\{ \begin{array}{l} A^* u = -c \\ u \geqslant 0 \end{array} \right.$

PARTIE I

Données.

C un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$, vérifiant $(Cx, x) > 0$ pour tout x non nul de $\mathbb{R}^n$.

$b \in \mathbb{R}^m$.

$q \in \mathbb{R}^n$.

$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\qquad A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$.

Définition.

Si K est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on dit que $\bar{x}$ élément de $\mathbb{R}^n$ est solution du problème de la minimisation de f sur K, si et seulement si $\bar{x} \in K$ et $f(\bar{x}) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in K$.

En particulier si f est l'application $x \to \| a - x \|$ où $a \in \mathbb{R}^n$ et $y \to \| y \|$ une norme associée à un produit scalaire ω de $\mathbb{R}^n$, alors une solution $\bar{x}$ du problème de la minimisation de f sur K est appelée une projection au sens de ω de a sur K.

Notation.

On désigne par J l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$: $x \to (Cx, x) + (q, x)$.

Q.5. *a.* K étant un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, et $\bar{x}$ une solution du problème de la minimisation de J sur K, montrer qu'il existe un produit scalaire ω de $\mathbb{R}^n$ et qu'il existe $d \in \mathbb{R}^n$, tels que $\bar{x}$ s'exprime comme une projection au sens de ω de d sur K.

b. En déduire que si l'ensemble K est fermé et non vide, alors le problème de la minimisation de J sur K admet au moins une solution.

c. Montrer que $\left\| \dfrac{x+y}{2} \right\|^2 < \dfrac{1}{2} \| x \|^2 + \dfrac{1}{2} \| y \|^2$, x et y étant deux éléments distincts de $\mathbb{R}^n$ et $z \to \| z \|$ une norme associée à un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

En déduire que si K est convexe le problème de la minimisation de J sur K admet au plus une solution.

d. K désigne maintenant (et dans la suite) l'ensemble des éléments x de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $Ax \leqslant b$:

$$K = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant b \}.$$

On suppose que K est non vide; montrer alors que le problème de la minimisation de J sur K admet une solution unique notée $\hat{x}$.

Q.6. On désigne par $\hat{S}$ l'ensemble des indices i, $1 \leqslant i \leqslant m$, pour lesquels

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j = b_i .$$

a. On suppose d'abord que $\hat{S} \neq \varnothing$. Montrer que s'il existe $y \in \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\begin{cases} 2\left(C\hat{x}, y\right) + (q, y) < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, y_k \leqslant 0 \quad \text{pour tout } i \in \hat{S}, \end{cases}$$

alors il existe un élément $z \in \mathbb{R}^n$ de la forme $z = \hat{x} + ty$ ($t \in \mathbb{R}$) tel que $J(z) < J\left(\hat{x}\right)$ et $z \in K$.

En déduire qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^m$ vérifiant les relations (*) suivantes :

$$(*) \quad \begin{cases} Ax + y = b \\ 2\,Cx + A^*\,u + q = 0 \\ y \geqslant 0,\ u \geqslant 0 \\ (y,\ u) = 0 \end{cases}$$

b. Dans le cas où $\widehat{S} = \varnothing$ montrer que $\widehat{x}$ vérifie $J\left(\widehat{x}\right) \leqslant J(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^n$. En déduire qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^m$ vérifiant les relations (*).

Q.7. Montrer que l'élément $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^n$ est solution du problème de la minimisation de J sur $K = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant b \}$ si, et seulement s'il existe $y \in \mathbb{R}^m$ et $u \in \mathbb{R}^m$ vérifiant

$$\begin{cases} A\bar{x} + y = b \\ 2\,C\bar{x} + A^*\,u + q = 0 \\ y \geqslant 0\,,\ u \geqslant 0 \\ (y, u) = 0 \end{cases}$$

Q.8. Obtenir une condition nécessaire et suffisante analogue pour le problème de la minimisation de J sur K', où K' désigne l'ensemble suivant :

$$K' = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Bx = l \} \quad (\text{avec } B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^t),\ \ l \in \mathbb{R}^t)\,.$$

PARTIE II

Les données sont celles de la partie I, soit

C un endomorphisme symétrique, défini positif de $\mathbb{R}^n$.

$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\qquad A = (a_{ij})_{\substack{i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n}}$

$b \in \mathbb{R}^m$.

$q \in \mathbb{R}^n$.

J l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$: $x \to (Cx, x) + (q, x)$.

$K = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant b \}$.

Notation.

On pose $a^j = A^*\,e^j$, $j = 1, \dots, m$ où e^j désigne le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

Hypothèse.

On suppose que l'application A est de rang m.

Définitions.

$\widehat{x}$ étant la solution du problème de la minimisation de J sur K on pose :

$$\widehat{S} = \{ i,\ 1 \leqslant i \leqslant m \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\widehat{x}_j = b_i \}$$

(éventuellement $\widehat{S} = \varnothing$).

S désignant un sous-ensemble de l'ensemble des m premiers entiers, on définit l'ensemble K^S de la manière suivante :

$$\text{Si } S \neq \varnothing \text{ alors } K^S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j = b_i, \text{ pour tout } i \in S \}$$

Si $S = \varnothing$ on pose $K^S = \mathbb{R}^n$.

On désigne par x^{S} la solution du problème de la minimisation de J sur K^{S}. Dans le cas où $\mathrm{S} = \varnothing$ on note x^0 l'élément x^{S} correspondant.

Enfin on pose $\mathrm{V}(x^{\mathrm{S}}) = \{\, i,\ 1 \leqslant i \leqslant m \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^{\mathrm{S}} > b_i \,\}$

(éventuellement $\mathrm{V}(x^{\mathrm{S}}) = \varnothing$).

Q.9. En utilisant le fait que x^{S} est une projection sur K^{S} (cf. question 5) donner l'expression de x^{S} en fonction des données S, A, C, b, q.

Q.10. Si $\widehat{\mathrm{S}} \neq \varnothing$ on désigne par σ le nombre d'éléments de $\widehat{\mathrm{S}}$. Montrer qu'il existe σ scalaires $(\widehat{u}_j)_{j \in \widehat{\mathrm{S}}}$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,\mathrm{C}\widehat{x} + q + \displaystyle\sum_{j \in \widehat{\mathrm{S}}} \widehat{u}_j\, a^j = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \widehat{x}_k = b_i, \text{ pour tout } i \in \widehat{\mathrm{S}} \\ \widehat{u}_j \geqslant 0, \text{ pour tout } j \in \widehat{\mathrm{S}} \end{array}\right.$$

Q.11. Soit S un sous-ensemble non vide de l'ensemble des m premiers entiers et τ le nombre d'éléments de S. Montrer qu'il existe τ scalaires $(u_j^{\mathrm{S}})_{j \in \mathrm{S}}$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,\mathrm{C}x^{\mathrm{S}} + q + \displaystyle\sum_{j \in \mathrm{S}} u_j^{\mathrm{S}}\, a^j = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k^{\mathrm{S}} = b_i, \text{ pour tout } i \in \mathrm{S}. \end{array}\right.$$

En utilisant ces relations retrouver l'expression de x^{S} en fonction des données.

Q.12. Montrer que $x^{\widehat{\mathrm{S}}} = \widehat{x}$.

Q.13. *a.* Soit S vérifiant $\mathrm{S} \subset \widehat{\mathrm{S}}$ et $x^{\mathrm{S}} \neq \widehat{x}$; montrer que l'on a

$$\sum_{j \in \mathrm{S}} \left(u_j^{\mathrm{S}} - \widehat{u}_j\right)\left(a^j,\ \widehat{x} - x^{\mathrm{S}}\right) - \sum_{j \in \widehat{\mathrm{S}} - \mathrm{S}} \widehat{u}_j \left(a^j,\ \widehat{x} - x^{\mathrm{S}}\right) > 0\ ;$$

en déduire qu'il existe $i \in \widehat{\mathrm{S}}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k^{\mathrm{S}} > b_i$ (et donc $i \in \mathrm{V}(x^{\mathrm{S}})$).

b. Montrer de manière similaire que si $\widehat{x} \neq x^0$ alors il existe $i \in \widehat{\mathrm{S}}$ tel que $i \in \mathrm{V}(x^0)$.

Q.14. S étant un sous-ensemble non vide de l'ensemble des m premiers entiers, on sait qu'il existe τ scalaires (τ nombre d'éléments de S) $(u_j^{\mathrm{S}})_{j \in \mathrm{S}}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,\mathrm{C}x^{\mathrm{S}} + q + \displaystyle\sum_{j \in \mathrm{S}} u_j^{\mathrm{S}}\, a^j = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k^{\mathrm{S}} = b_i, \text{ pour tout } i \in \mathrm{S}. \end{array}\right.$$

a. Montrer que si les scalaires u_j^S vérifient $u_j^S \geqslant 0$ pour tout $j \in S$ et si $V(x^S) = \varnothing$, alors $x^S = \widehat{x}$. En déduire que s'il existe T, sous-ensemble non vide de l'ensemble des m premiers entiers, vérifiant

$$(**) \quad \begin{cases} V(x^T) = \varnothing \\ j \in V\left(x^{T-\{j\}}\right) \quad \text{pour tout } j \in T \end{cases}$$

alors $x^T = \widehat{x}$.

b. Montrer par un contre-exemple que la relation (**) n'est pas vraie en général pour $T = \widehat{S}$ ($\widehat{S}$ étant supposé non vide).

Q.15. On définit l'ensemble $\mathfrak{T}$ de la manière suivante : $T \in \mathfrak{T}$ si et seulement si T est un sous-ensemble de l'ensemble des m premiers entiers, $x^T = \widehat{x}$ et $x^{T-P} \neq \widehat{x}$ pour tout sous-ensemble non vide P de T.

a. Montrer que si $\widehat{x} \neq x^0$ alors $\mathfrak{T} \neq \varnothing$.

b. S étant un sous-ensemble de l'ensemble des m premiers entiers et $\widehat{x}$ étant différent de x^0, montrer les propositions α, β, γ suivantes :

α. Pour que $S \in \mathfrak{T}$ il faut que $\begin{cases} V(x^S) = \varnothing \\ j \in V\left(x^{S-\{j\}}\right) \quad \text{pour tout } j \in S. \end{cases}$

β. Pour qu'il existe $T \in \mathfrak{T}$ tel que $S \subset T$, $S \neq T$, il faut qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $i \in V(x^S)$.

γ. Soit $i \in \mathbb{N}$ et $j \in S$ vérifiant

$$\begin{cases} i \in V(x^S) \\ V\left(x^{S \cup \{i\}}\right) = \varnothing \\ j \notin V\left(x^{(S \cup \{i\}) - \{j\}}\right) \end{cases}$$

Montrer qu'il n'existe aucun élément T de $\mathfrak{T}$ tel que $S \cup \{i\} \subset T$.

Q.16. Déduire de ce qui précède un algorithme permettant de calculer $\widehat{x}$.

Q.17. On ne suppose plus maintenant que A est de rang m, mais on fait l'hypothèse que K est non vide. Montrer que si $T \in \mathfrak{T}$, alors la famille $(A^* e^j)_{j \in T}$ est libre. En conséquence indiquer comment adapter l'algorithme précédent de manière à obtenir un procédé de calcul de $\widehat{x}$.

Appliquer ce procédé à la résolution du problème de la minimisation de J sur K avec :

$$J(x) = J(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - x_1 - 2x_2$$

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 5 \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 4 \end{array} \right\}$$

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE D'ANALYSE NUMÉRIQUE

1. Observations générales

La particularité de l'épreuve d'analyse numérique est de s'adresser, en l'absence de programme spécifique, à des candidats qui, bien souvent, n'ont reçu aucune formation dans cette discipline et qui donc n'en ont pas la pratique. Evidemment l'analyse numérique élémentaire n'utilise que les résultats standards de l'analyse et de l'algèbre, mais il intervient souvent des mécanismes de raisonnements et des techniques de démonstration, classiques pour le numéricien, et qu'il faut faire découvrir au candidat le jour du concours ; ce qui n'est pas nécessairement le meilleur moment. De plus cette épreuve ne peut être considérée comme une répétition de l'épreuve d'analyse ou de mathématiques générales; elle doit exprimer le discours propre à l'analyse numérique et sa finalité qui n'est pas de mettre en évidence les choses cachées d'une situation donnée mais d'utiliser les propriétés, même banales, de cette situation afin d'obtenir un procédé de calcul efficace. Or il semble que cette démarche soit étrangère à beaucoup de candidats, trop habitués à une présentation hautement spéculative des mathématiques. En conclusion l'épreuve d'analyse numérique ne peut être vraiment significative que si elle est proposée à des candidats ayant acquis une véritable formation dans cette discipline.

2. Analyse du sujet

Le problème proposé s'organise autour d'un algorithme d'optimisation, algorithme que le candidat devait énoncer (et appliquer) en faisant la synthèse des résultats obtenus dans les questions précédentes. C'est là, en fait la difficulté essentielle du problème (avec les préliminaires) car les résultats utilisés dans la construction de l'algorithme (Q_{15}-b), ne sont qu'une paraphrase de la question 13, question facile, compte-tenu des indications. Et c'est précisément le fait qu'aucun candidat n'ait proposé d'algorithme pertinent, qui a motivé les considérations précédentes.

Il s'agit donc d'obtenir un algorithme de minimisation d'une fonctionnelle somme d'une forme quadratique définie positive et d'une forme linéaire sur un ensemble polyédrique. (Indiquons tout de suite qu'aucune connaissance particulière de la théorie de l'optimisation était nécessaire).

Pour cela on remarque que la solution du problème (existence-unicité en Q_5) est aussi, avec les notations du texte, la solution de la minimisation sur la variété linéaire K^S : $\hat{x} = x^{\hat{S}}(Q_{12})$. Comme $x^{\hat{S}}$ est une projection que l'on peut expliciter, tout revient à déterminer $\hat{S}$ (ou un ensemble S tel que $x^S = \hat{x}$).

Supposons pour simplifier que $x^S \neq x^{S-\{j\}}$, pour tout S, $\{j\}$, sous ensemble des m premiers entiers. (Sinon, dans le cas où A est de rang m, on introduit l'ensemble $\mathcal{G}$ (Q 15) en raisonnant comme suit et dans le cas général, on utilise la remarque de Q_{17}).

On utilise le fait que si $T \subset \hat{S}$, alors il existe $j \in \hat{S} \cap V(x^T)$ (Q_{13}) et qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $x^S = \hat{x}$ est que

$$\begin{cases} V(x^S) = \phi \\ j \in V(x^{S-\{j\}}) \text{ pour tout } j \in S \ (Q_{13} - Q_{14}) \end{cases}$$

L'algorithme est alors le suivant :

Étape 1 : Si $x° = -\frac{1}{2} C^{-1} q$ vérifie $V(x°) = \phi$, alors $x° = \hat{x}$. Sinon on passe à l'étape 2.

Étape 2 : Soit F_1, l'ensemble de tous les singletons $\{i\}$ tels que $i \in V(x°)$.

1er cas : Il existe $\{i\} \in F_1$ tel que $V(x^{\{i\}}) = \phi$ alors $x^{\{i\}} = \hat{x}$, sinon on passe au deuxième cas.

2ème cas : On construit F_2 à partir de F_1 selon le principe suivant.

Étape K + 1 : Supposons connue une famille F_K de parties de l'ensemble des m premiers entiers ayant les propriétés suivantes :

- si $T \in F_K$, alors le cardinal de T est K
- $x^T \neq \hat{x}$ pour tout $T \in F_K$
- $V(x^T) \neq \phi$ pour tout $T \in F_K$
- $\hat{S}$ admet un sous-ensemble qui appartient à F_K.

(F_1 évidemment possède cette propriété).

Soit alors G_{K+1} la famille de tous les ensembles de la forme $T \cup \{i\}$ où $T \in F_K$ et i vérifie $i \in V(x^T)$.

1^{er} cas : S'il existe S, élément de G_{K+1}, vérifiant $V(x^S) = \phi$ et $j \in V(x^{S-\{j\}})$ pour tout $j \in S$, alors $x^S = \hat{x}$. Sinon on passe au $2^{ème}$ cas.

2^e cas : On définit F_{K+1}, à partir de G_{K+1} en éliminant de cet ensemble les ensembles S tels que $V(x^S) = \phi$.

On vérifie facilement que F_{K+1} a les mêmes propriétés que F_K. (pour la dernière propriété, utiliser $Q_{15}\gamma$) et que cette procédure permet de calculer $\hat{x}$.

3. Commentaire sur les questions

L'algorithme repose donc sur la question Q_{13} et ses variantes (Q_{15}) dont la démonstration est une application simple des relations (*) de la question 6. Ce résultat est utilisé dans sa partie directe ainsi que dans sa partie réciproque, on fait aussi usage d'un résultat analogue valable pour des contraintes de la forme Ax = b. Peu de candidats ont pensé à se ramener au cas précédent en écrivant Ax = b, sous la forme $\{\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}\}$. Certains ont démontré directement le résultat demandé en utilisant la caractérisation de la projection sur une variété linéaire.

La démonstration des relations (*) fait appel à un résultat sur les systèmes d'inéquations linéaires (Q_4). Il s'agit de montrer que si le système $\begin{cases} By = g \\ y \geq 0 \\ (f,y) \geq a \end{cases}$ n'a pas de solution, alors le système $\begin{cases} B^*x - t\,f \geq 0 \\ (x,g) - at < 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$ est compatible. On proposait pour cela une démonstration par récurrence.

Contrairement à une tradition scolaire bien établie, le résultat correspondant à l'initialisation de la récurrence n'est pas complètement évident. Aussi a-t-on préféré le présenter sous la forme d'une question indépendante Q_1, question assez bien traitée mais trop mal rédigée dans l'ensemble. Le texte indiquait comment passer de l'étape q à l'étape q+1. On étudie d'abord le cas homogène.

A la grande surprise des correcteurs, personne n'a songé à utiliser une méthode d'élimination de Gauss afin d'exprimer une des variables en fonction des autres, ce qui permet d'écrire " $P = \phi$ " sous la forme " $Pq = \phi$ " et ceci de façon équivalente. Encore une illustration de l'ignorance des candidats aux techniques les plus élémentaires de l'analyse numérique. Le cas général s'obtient à partir du cas précédent en écrivant $\begin{cases} By = g \\ (f,y) = a \end{cases}$ sous la forme $\begin{pmatrix} B \\ f \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} g \\ a \end{pmatrix}$.
L'application du résultat concernant le cas homogène donne immédiatement l'existence d'une solution du système $\begin{cases} B^*x - tf \geq 0 \\ (x,g) - at \leq 0 \end{cases}$. Il reste à vérifier que t est positif, ce qui, surprise agréable, a été fait correctement dans un nombre non négligeable de copies. (Un raisonnement par l'absurde, utilisant le fait que tout y vérifiant $\begin{cases} By = g \\ y \geq 0 \end{cases}$ vérifie $(f,y) < a$, permet d'obtenir la positivité de t).
La question 3 est une application immédiate du résultat, à condition, dans le cas où $t = 0$, de considérer un vecteur de la forme $\lambda x + \bar{x}$ où $\bar{x}$ vérifie $A\bar{x} \geq b$ et λ scalaire " assez grand ". La question 5 est une question de cours. Le début de la question 6 n'a guère posé de difficultés et si l'utilisation de la question 4 s'est imposée à tous, beaucoup ont remplacé le système $\sum_k a_{ik} x_k \leq 0$, $i \in \hat{S}$ par $Ax \leq 0$, ce qui ne permet pas d'obtenir la relation d'orthogonalité $(y,u) = 0$.

Indiquons que cette première partie, plutôt facile, permettait d'obtenir $20/40$ et $18/40$, dans le cas où la relation d'orthogonalité n'était pas établie.

La question 9 n'a été résolue par personne, les meilleurs se contentant en utilisant la caractérisation de la projection sur une variété linéaire, d'établir l'existence d'un u tel que

$$2Cx^S + q = A_S^* u \quad (K^S = \{x \mid A_S x = b_S).$$

Il est pourtant facile d'exprimer u (et donc de calculer x^S) en utilisant l'inversibilité de $A_S C^{-1} A_S^*$ (A étant de rang m).

La question $Q_{10}, \ldots, Q_{13}$ sont des conséquences simples des relations (✱) et les questions suivantes des variantes de Q_{13}.

4. Répartition des notes

- Nombre de copies corrigées : 468
- Moyenne (sur 40) : 9,425
- Nombre de copies ayant obtenu une note supérieure ou égale à 20 : 70

Répartition :

Notes	Nombre de candidats
0	76
1-4	108
5-8	69
9-12	63
13-16	57
17-20	37
21-24	25
25-28	15
29-32	5
33-36	8
37-40	5

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

DUREE : 6 Heures

Un solide pesant S, de centre d'inertie G, repose sur le plan horizontal OX_1X_2 d'un repère orthonormé $OX_1X_2X_3$ supposé galiléen, OX_3 dirigé suivant la verticale ascendante; il est admis dans tout le problème que la liaison entre le plan OX_1X_2 et la frontière de S, supposée régulière et convexe, ne peut être interrompue, le contact ayant lieu en un point unique.

Le solide S comporte une cavité à l'intérieur de laquelle est disposé un autre solide Σ, assujetti par des liaisons de telle manière que son mouvement par rapport à S ne puisse être qu'un mouvement de rotation autour d'un axe rigidement lié à S et passant par G, noté $G\xi$, de vecteur unitaire $\vec{\xi}$. On suppose que Σ est un corps homogène de révolution autour de l'axe $G\xi$, ayant son centre d'inertie en G; en particulier $G\xi$ est axe principal d'inertie de Σ en G et il en est de même pour tout axe perpendiculaire à $G\xi$ en G. On note $G\,x_1\,x_2\,x_3$ un système d'axes orthonormé lié à S, tel que Gx_3 soit axe principal d'inertie pour $S + \Sigma$ et on admet que la frontière de S peut être représentée analytiquement, relativement à ces axes, par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

et plus spécialement au voisinage du point P où Gx_3 rencontre cette frontière par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_3 - a + \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2}\right) + h(x_1, x_2) = 0 \tag{2}$$

a, a_1, a_2 étant des constantes positives homogènes à des longueurs et $h(x_1, x_2)$ un polynôme dont les termes de degré minimum sont d'ordre 3 au moins.

Au cours du mouvement le contact de S avec le plan OX_1X_2 a lieu en un point Q mobile sur la frontière de S dans un voisinage de P; on note n le vecteur unitaire normal en Q à cette frontière dirigé vers l'intérieur de sorte que :

$$\vec{n} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, f}{\left|\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right|} \tag{3}$$

formule définissant ainsi les composantes de $\vec{n}$ sur les axes mobiles $G\,x_1\,x_2\,x_3$; d'ailleurs puisque le plan OX_1X_2 est tangent à la frontière de S en Q, $\vec{n}$ est identique au vecteur unitaire $\vec{X}_3$ de l'axe OX_3.

On note :

$$\bar{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} A_1 & -F & 0 \\ -F & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

le tenseur d'inertie de $S + \Sigma$ en G, rapporté aux axes $G\,x_1\,x_2\,x_3$, J le moment d'inertie de Σ par rapport à $G\xi$, $\vec{g} = -g\,\vec{X}_3$ l'accélération de la pesanteur, μ la masse totale de $S + \Sigma$; il est rappelé qu'on a nécessairement $A_1A_2 - F^2 > 0$.

On désigne par $\vec{v}$ la vitesse de G par rapport au repère $OX_1X_2X_3$, $\vec{H}$ le moment cinétique en G de $S + \Sigma$ dans son mouvement par rapport au repère d'origine G d'axes X_1, X_2, X_3, $\vec{\omega}$ le vecteur rotation instantanée de S par rapport à $GX_1X_2X_3$, $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{\xi}$ le vecteur rotation instantanée de Σ par rapport à S, Ω étant maintenu égal à une valeur constante donnée par le jeu de forces convenablement exercées entre S et Σ et formant globalement un système équivalent à zéro.

On désigne par $\vec{R}$ la réaction qu'exerce le plan OX_1X_2 sur S en Q, la liaison étant supposée sans frottement de sorte que $\vec{R} = R\vec{n}$. Ainsi il est clair que $\vec{R}$ et la force de pesanteur $\mu\,\vec{g}$ sont les seules forces extérieures agissant sur le système $S + \Sigma$.

Enfin il pourra être commode d'utiliser la notation $\zeta = \overrightarrow{QG}.\vec{n}$, qui représente la hauteur de G au dessus du plan horizontal OX_1X_2.

Les calculs demandés plus loin seront conduits de préférence par rapport au repère mobile G $x_1\, x_2\, x_3$, sur les axes duquel les composantes des vecteurs $\vec{v}$, $\vec{\omega}$ et $\vec{n}$ seront notées v_1, v_2, v_3, ω_1, ω_2, ω_3 et ν_1, ν_2, ν_3 respectivement; la dérivée par rapport au temps de toute fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ sera introduite relativement au repère G $x_1\, x_2\, x_3$ et notée $\dot{\vec{r}}\,(t)$. Ainsi l'assertion qui exprime que le vecteur $\vec{n}$ est constant par rapport au repère $\mathrm{OX_1\, X_2\, X_3}$ donne lieu à la condition cinématique :

$$\dot{\vec{n}} + \vec{\omega} \wedge \vec{n} = 0 \tag{4}$$

Toutes les grandeurs qui apparaissent dans le problème sont réelles.

I

1° Écrire l'équation vectorielle ($\mathrm{E_1}$) qui exprime le théorème du mouvement du centre d'inertie appliqué à $\mathrm{S} + \Sigma$.

Que peut-on dire du mouvement de la projection horizontale de G?

2° Écrire l'équation vectorielle ($\mathrm{E_2}$) qui exprime le théorème du moment cinétique appliqué à $\mathrm{S} + \Sigma$ en G.

Calculer le moment cinétique $\vec{\mathrm{H}}$ en termes des éléments inertiels et des rotations $\vec{\omega}$, $\vec{\Omega}$.

Par intégration de l'équation obtenue après addition des équations ($\mathrm{E_1}$) et ($\mathrm{E_2}$), multipliées scalairement au préalable par $\vec{v}$ et $\vec{\omega}$ respectivement, montrer que :

$$\mathrm{V_1} = \frac{1}{2}\,\mu\,\vec{v}^{\,2} + \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\,\bar{\bar{\mathrm{I}}}\,\vec{\omega} + \mu\, g\, \zeta \tag{5}$$

est une intégrale première des équations du mouvement.

3° On note $\mathcal{M}$ le moment par rapport à Gξ des efforts exercés par S sur Σ, $\vec{\mathrm{H}}_\Sigma$ le moment cinétique de Σ en G dans son mouvement par rapport à G $\mathrm{X_1\, X_2\, X_3}$ et K le moment d'inertie de Σ par rapport à tout axe perpendiculaire en G à Gξ.

Calculer $\vec{\mathrm{H}}_\Sigma$, puis $\mathcal{M}$ par application du théorème du moment cinétique. En déduire que la puissance des efforts intérieurs au système $\mathrm{S} + \Sigma$ est la dérivée par rapport au temps d'une expression simple qu'on explicitera.

Notant $\bar{\bar{\mathrm{I}}}_\mathrm{S}$, $\bar{\bar{\mathrm{I}}}_\Sigma$ les tenseurs d'inertie en G de S et Σ, appliquer le théorème de l'énergie au système total $\mathrm{S} + \Sigma$ et retrouver l'intégrale première du § I, 2°.

4° Montrer que :

$$\mathrm{V_2} = \vec{n}\cdot\vec{\mathrm{H}} \tag{6}$$

est une intégrale première des équations du mouvement.

5° Supposant le point de contact Q dans un voisinage de P sur la frontière de S et utilisant (2) et (3), calculer les développements de ν_1, ν_2 et de ν_3, suivant les puissances de x_1 et x_2, au premier ordre et au second ordre respectivement.

Écrire le développement de ζ suivant les puissances de ν_1, ν_2 au second ordre.

Montrer qu'une solution d'équilibre apparent du système $\mathrm{S} + \Sigma$ (c'est-à-dire S au repos, Σ animé de la rotation constante $\vec{\Omega}$ par rapport à S) existe si le contact avec le plan horizontal a lieu en P et si $\vec{v} = 0$, $\vec{\omega} = 0$ à l'instant initial.

A partir de l'intégrale première (5) et de l'expression de ζ obtenue dans ce §, montrer qu'une condition suffisante de stabilité de cet équilibre apparent est :

$$a_1 > a, \quad a_2 > a.$$

II

On suppose dans cette partie du problème que l'axe Gξ est confondu avec G x_3.

1° Donner les expressions des composantes du moment cinétique $\vec{\mathrm{H}}$ sur les axes du repère G $x_1\, x_2\, x_3$ et montrer que le système formé des équations ($\mathrm{E_1}$), ($\mathrm{E_2}$) et (4) admet une solution :

$$\vec{v} = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega, \quad \nu_1 = \nu_2 = 0, \quad \nu_3 = 1, \quad \mathrm{R} = \mu g \tag{7}$$

avec ω constant.

2° Pour étudier la stabilité de cette solution on se propose d'étudier les solutions voisines représentées à l'aide des variables v_1, v_2, v_3, ω_1, ω_2, $\omega_3 + \omega$, ν_1, ν_2, $\nu_3 + 1$, $R + \mu g$, considérant que v_i, ω_i, ν_i $(i = 1, 2, 3)$ et R sont des termes de perturbation petits et de même ordre de grandeur. Par le procédé de linéarisation (ou encore méthode dite des petits mouvements), écrire à partir de (E_1), (E_2) et (4) le système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants vérifié par les variables de perturbation. Considérant en particulier les six équations qui ne contiennent que les variables v_1, v_2, ω_1, ω_2, ν_1, ν_2 et cherchant des solutions qui, à l'égard du temps, sont proportionnelles à $e^{\lambda t}$, on montrera que l'équation caractéristique qui définit les valeurs admissibles de λ est de la forme :

$(\lambda^2 + \omega^2)\,\Delta(\lambda) = 0$ avec $\Delta(\lambda) = c_0\,\lambda^4 + c_1\,\lambda^2 + c_2$ et on explicitera les coefficients c_0, c_1, c_2.

Montrer que :

(8) $$c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad c_1^2 - 4\,c_0\,c_2 > 0$$

sont des conditions nécessaires de stabilité et que ces inégalités sont remplies pour $|\,\Omega\,|$ assez grand.

On pose :

(9) $$q_1 = \mu g\,(a_1 - a) + \omega\,(A_3\,\omega + J\,\Omega)$$
$$q_2 = \mu g\,(a_2 - a) + \omega\,(A_3\,\omega + J\,\Omega)$$

Justifier qu'en satisfaisant à (8) par un choix convenable de Ω, on peut faire en sorte que le signe de $q_1 - A_1\,\omega^2$ soit positif ou négatif.

3° Dans le cas où $\omega = 0$ écrire les conditions de stabilité (8) et comparer avec le résultat de la fin du § I, 5°.

4° Revenant au cas du § II, 2° montrer que $q_1 - A_1\,\omega^2 > 0$ et $c_2 > 0$ impliquent (8).

5° On suppose dans ce § que l'enveloppe ou frontière de S est de révolution autour de $G\,x_3$, en particulier $a_1 = a_2$, et que $A_1 = A_2$, $F = 0$ (système à symétrie de révolution géométrique et cinétique). Montrer que les inégalités (8) se réduisent à une seule condition qu'on explicitera.

6° Revenant au cas du § II, 2° et à ses notations, on exprime les intégrales premières V_1 et V_2 au moyen des variables ω_1, ω_2, ω_3, ν_1, ν_2 (il pourra être utile à cette fin de noter que la composante horizontale de la vitesse est constante et d'autre part que la hauteur ζ du centre G s'exprime en fonction de ν_1, ν_2 comme prévu au § I, 5°).

Calculer le développement de $V_1 - \omega V_2$ au second ordre par rapport aux variables de perturbation. Exprimer que l'ensemble de ces termes du second ordre est une forme quadratique définie positive et montrer que :

(10) $$q_1 - A_1\omega^2 > 0, \quad c_2 > 0$$

sont des conditions suffisantes de stabilité de la solution (7).

Quelle cohérence ce résultat exprime-t-il avec des conclusions antérieures?

7° Considérant le cas de symétrie de révolution géométrique et cinétique (§ II, 5°), montrer que (8) est réduit à une condition unique.

Montrer que $V_3 = \omega_3$ est une intégrale première des équations du mouvement; σ étant un coefficient constant, exprimer dans le développement de :

$$V_1 + \sigma\,V_2 - A_3\,(\omega + \sigma)\,V_3$$

l'ensemble des termes quadratiques.

Montrer que le choix de σ qui garantit que cette forme est définie positive est subordonné à une inégalité qui apparaît ainsi comme condition suffisante de stabilité de la solution (7).

Montrer que celle-ci est moins contraignante que celle obtenue au début de ce §; la comparer avec celle du § II, 5°.

III

On suppose dans cette partie du problème que l'axe $G\xi$ est confondu avec Gx_1.

Il est rappelé que conformément au résultat décrit par le § I, 5°, $\vec{v} = 0$, $\vec{\omega} = 0$, $\nu_1 = \nu_2 = 0$, $\nu_3 = 1$ est une solution des équations du mouvement, stable si $a_1 > a$, $a_2 > a$.

On introduit les variables de perturbation ω_1, ω_2, ω_3, ν_1, ν_2 ; exprimer les développements des intégrales premières V_1 et V_2 en puissance de ces variables jusqu'au second ordre.

Par l'étude de $2\,V_1 + \sigma\,V_2^2$, où σ est un paramètre qu'on choisira de façon convenable, obtenir des conditions suffisantes de stabilité, plus faibles que celles qui viennent d'être rappelées.

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Nous présentons d'abord un corrigé, quelque peu détaillé de l'épreuve, puis quelques commentaires sur les résultats obtenus par les candidats.

Corrigé

Partie I

1) $$\mu(\dot{\vec{v}} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}) = -\mu g \vec{n} + \vec{R} \qquad (1)$$

La composante horizontale de la vitesse de G est constante.

2) $$\dot{\vec{H}} + \vec{\omega} \wedge \vec{H} = \vec{GQ} \wedge \vec{R} \qquad (2)$$

$$\vec{H} = \bar{I}\,\vec{\omega} + J\vec{\Omega}$$

de (1) et (2) : $$\mu \vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} + \vec{\omega}\cdot\dot{\vec{H}} = -\mu g \vec{n}\cdot\vec{v} + \vec{R}\cdot(\vec{v} + \vec{\omega}\wedge\vec{GQ})$$

Mais $\vec{v} + \vec{\omega}\wedge\vec{GQ}$, vitesse de glissement, est orthogonale à $\vec{R}$,

d'où : $$\mu \vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} + \vec{\omega}\cdot\dot{\vec{H}} + \mu g \frac{d\zeta}{dt} = 0$$

$\dot{\vec{H}} = \bar{I}\,\dot{\vec{\omega}} \quad \mapsto \quad \vec{\omega}\cdot\dot{\vec{H}} = \vec{\omega}\cdot\bar{I}\,\dot{\vec{\omega}}$ et en raison de la symétrie de $\bar{I}$:

$$\vec{\omega}\cdot\dot{\vec{H}} = \vec{\omega}\cdot\bar{I}\,\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}\cdot\bar{I}\,\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\vec{\omega}\cdot\bar{I}\,\dot{\vec{\omega}} + \dot{\vec{\omega}}\cdot\bar{I}\,\vec{\omega}) = \frac{1}{2}(\vec{\omega}\cdot\bar{I}\,\vec{\omega})^{\cdot}$$

d'où l'intégrale première

$$V_1 = \frac{\mu}{2}\vec{v}^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\bar{I}\,\vec{\omega} + \mu g \zeta \qquad (3)$$

3) La rotation instantanée de Σ est $\vec{\omega}+\vec{\Omega}$ et :

$$\vec{H}_\Sigma = K(\vec{\omega}+\vec{\Omega}) + (J-K)((\vec{\omega}+\vec{\Omega})\vec{\zeta})\vec{\zeta}$$

$$= K\vec{\omega} + [(J-K)\vec{\omega}\vec{\zeta} + J\Omega]\vec{\zeta}$$

$$\frac{dH_\Sigma}{dt} = K\dot{\vec{\omega}} + ((J-K)\dot{\vec{\omega}}\zeta)\vec{\zeta} + \vec{\omega}\wedge\{K\vec{\omega} + [(J-K)\vec{\omega}\vec{\zeta}+J\Omega]\vec{\zeta}\}$$

$$\mathcal{M} = \vec{\zeta}\frac{d\vec{H}_\Sigma}{dt} = K\zeta\dot{\vec{\omega}} + (J-K)\dot{\vec{\omega}}\vec{\zeta} = J\dot{\vec{\omega}}\vec{\zeta}$$

La puissance des efforts intérieurs à S et Σ vaut $\mathcal{M}\Omega$,

d'où : $\mathcal{M}\Omega = J\Omega\dot{\vec{\omega}}\vec{\zeta} = \frac{d}{dt}(J\Omega\vec{\omega}\vec{\zeta})$

Appliquant le théorème de l'énergie à $S+\Sigma$, on

obtient :

$$\frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\bar{\bar{I}}_S\vec{\omega} + \frac{1}{2}(\vec{\omega}+\vec{\Omega})\bar{\bar{I}}_\Sigma(\vec{\omega}+\vec{\Omega}) = J\Omega\vec{\omega}\vec{\zeta} - \mu g\zeta + c^t$$

Compte tenu que $\vec{\Omega}\bar{\bar{I}}_\Sigma\vec{\Omega}$ est constant et :

$$\vec{\omega}\bar{\bar{I}}_\Sigma\vec{\Omega} = \vec{\Omega}\bar{\bar{I}}_\Sigma\vec{\omega} = J\Omega\vec{\omega}\vec{\zeta}$$

il reste

$$\frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\bar{\bar{I}}\vec{\omega} + \mu g\zeta = c^t$$

4) De (2) il vient :

$$\vec{n}.(\dot{\vec{H}} + \vec{\omega}\wedge\vec{H}) = 0$$

et avec [4] : $\dot{\vec{n}}\vec{H} + \vec{n}\dot{\vec{H}} = 0 \longrightarrow \vec{n}\vec{H} = c^t$

d'où l'intégrale première : $\quad V_2 = \vec{n}\,\vec{H} \quad (4)$

5) Dans le voisinage de P on a :

$$|\overrightarrow{\text{grad}}\, f| = \left(1 + \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2}\right) + \dots$$

$$\nu_1 = -\frac{x_1}{a_1} + \dots, \quad \nu_2 = -\frac{x_2}{a_2} + \dots, \quad \nu_3 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2}\right) + \dots = 1 - \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2) + \dots$$

$$\zeta = -\overrightarrow{GQ} \cdot \vec{n} = -\nu_1 x_1 - \nu_2 x_2 - \nu_3 x_3$$

et avec $x_1 \sim -\nu_1 a_1$, $x_2 \sim -\nu_2 a_2$, $x_3 \sim -a + \frac{1}{2}(\nu_1^2 a_1 + \nu_2^2 a_2)$,

$$\zeta = a + \frac{1}{2}\left((a_1 - a)\nu_1^2 + (a_2 - a)\nu_2^2\right) + \dots \qquad (5)$$

Le système (E_1), (E_2), $[4]$ est vérifié pour $\vec{v} = 0$, $\vec{\omega} = 0$, $\overrightarrow{GQ} \wedge \vec{n} = 0$ et l'équation d'énergie montre que la solution correspondante est stable si $a_1 - a > 0$ et $a_2 - a > 0$ (6)

Partie II

1) $H_1 = A_1\omega_1 - F\omega_2$, $\quad H_2 = -F\omega_1 + A_2\omega_2$, $\quad H_3 = A_3\omega_3 + J\Omega$

On trouve une solution particulière des équations (E_1), (E_2) et $[4]$ avec $\vec{v} = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 = \omega$, $\nu_1 = \nu_2 = 0$, $\nu_3 = 1$

$R = \mu g$.

2/ Utilisant les variables de perturbation on écrit les équations du mouvement :

$$\mu \dot{\vec{v}} + (\vec{\omega} + \omega \vec{x_3}) \wedge \vec{v} = R \vec{n}$$

puis après linéarisation :

$$\mu (\dot{v}_1 - \omega v_2) = 0$$
$$\mu (\dot{v}_2 + \omega v_1) = 0 \qquad (7)$$
$$\mu \dot{v}_3 = R$$

On écrit ensuite (E_2) sous la forme :

$$\dot{\vec{H}} + (\vec{\omega} + \omega \vec{x_3}) \wedge \vec{H} = \vec{GQ} \wedge (R + \mu g) \vec{n}$$

avec $\vec{H} = \bar{I} \vec{\omega} + (J\Omega + A_3 \omega) \vec{x_3}$

Après calculs et linéarisation, on obtient :

$$(8) \begin{cases} A_1 \dot{\omega}_1 - F\dot{\omega}_2 + (J\Omega + A_3\omega)\omega_2 - \omega(-F\omega_1 + A_2\omega_2) - \mu g (a - a_2) r_2 = 0 \\ -F\dot{\omega}_1 + A_2 \dot{\omega}_2 - (J\Omega + A_3\omega)\omega_1 + \omega (A_1 \omega_1 - F\omega_2) + \mu g (a - a_1) r_1 = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\omega}_3 = 0$$

Enfin [4] devient, après linéarisation,

$$(9) \begin{cases} \dot{r}_1 + \omega_2 - \omega r_2 = 0 \\ \dot{r}_2 + \omega r_1 - \omega_1 = 0 \end{cases}$$

$$\dot{r}_3 = 0$$

Considérant le système différentiel des six équations (7), (8), (9) par rapport aux variables $v_1, v_2, \omega_1, \omega_2, \nu_1, \nu_2$, on peut écrire l'équation caractéristique :

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1\lambda + F\omega & -F\lambda + (A_3 - A_2)\omega + J\Omega & 0 & \mu g(c_2 - a) \\ 0 & 0 & -F\lambda - J\Omega + (A_1 - A_3)\omega & A_2\lambda - F\omega & \mu g(a - a_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda & -\omega \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \omega & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^2 + \omega^2)\,\Delta(\lambda) = 0$$

avec $\Delta(\lambda) = c_0\lambda^4 + c_1\lambda^2 + c_2$

$$c_0 = A_1A_2 - F^2$$

$$c_1 = 2\,(A_1A_2 - F^2)\omega^2 + (A_3\omega + J\Omega)^2 - (A_1 + A_2)(A_3\omega + J\Omega)\omega$$
$$+ \mu g\left((a_1 - a)A_1 + (c_2 - a)A_2\right)$$

$$c_2 = \left[(A_3 - A_1)\omega^2 + J\Omega\omega + \mu g(a_1 - a)\right]\left[(A_3 - A_2)\omega^2 + J\Omega\omega + \mu g(c_2 - a)\right] - F^2\omega^4$$

$$= (q_1 - A_1\omega^2)(q_2 - A_2\omega^2) - F^2\omega^4$$

d'où les conditions nécessaires de stabilité

$$c_1 > 0 \quad , \quad c_2 > 0 \quad , \quad c_1^2 - 4 c_0 c_2 > 0 \qquad (10)$$

Notant que $c_1 \sim J^2\Omega^2$, $c_2 \sim J^2\Omega^2\omega^2$ si $|\Omega|$ est grand, il est clair que ces conditions nécessaires pourront toujours être remplies si $|\Omega|$ est assez grand, le signe de $q_1 - A_1\omega^2$ étant en tout état de cause le même que celui de $\omega\Omega$.

3) On suppose $\omega = 0$. On a :

$$c_1 = J^2\Omega^2 + \mu g \left[(a_1 - a) A_1 + (a_2 - a) A_2\right]$$

$$c_2 = \mu^2 g^2 (a_1 - a)(a_2 - a)$$

$$c_1^2 - 4c_0 c_2 = J^4\Omega^4 + 2\mu g J^2\Omega^2 \left[(a_1 - a) A_1 + (a_2 - a) A_2\right]$$
$$+ \mu^2 g^2 \left[\left((a_1 - a) A_1 - (a_2 - a) A_2\right)^2 + 4F^2 (a_1 - a)(a_2 - a)\right]$$

Les conditions nécessaires de stabilité sont exprimées par (10), et sont vérifiées si les conditions du § I 5 sont elles-mêmes satisfaites ; cependant si $a_1 - a < 0$ et $a_2 - a < 0$

on pourra néanmoins satisfaire (10) par un choix convenable de Ω.

4) Revenant au cas du § II$_2$ on suppose que

$$q_1 - A_1\omega^2 > 0 \quad \text{et} \quad c_2 > 0 .$$

On établit que ces hypothèses impliquent $c_1 > 0$ et $c_1^2 - 4c_0c_2 > 0$

Posons $x = q_1 - A_1\omega^2$

$y = q_2 - A_2\omega^2$ d'où $c_2 = xy - F^2\omega^4$

et observons qu'on peut écrire :

$$c_1 = \left(A_3\omega + J\Omega - (A_1 + A_2)\omega\right)^2 + A_1\left(q_1 - A_1\omega^2\right) + A_2\left(q_2 - A_2\omega^2\right) - 2F^2\omega^2$$

d'où $c_1 > A_1x + A_2y - 2F^2\omega^2$

De $x > 0$, $y > 0$ et $xy > F^2\omega^4$, il vient :

$$A_1x + A_2y - 2F^2\omega^2 > \frac{1}{y}\cdot\left(A_2y^2 - 2F^2\omega^2y + A_1F^2\omega^4\right) > 0$$

puisque $F^2 - A_1A_2 < 0$

Ainsi $q_1 - A_1\omega^2 > 0$ et $c_2 > 0$ impliquent $c_1 > A_1x + A_2y - 2F^2\omega^2 > 0$

et par suite

$$c_1^2 - 4c_0c_2 > \left(A_1x + A_2y - 2F^2\omega^2\right)^2 - 4\left(A_1A_2 - F^2\right)\left(xy - F^2\omega^4\right) = U$$

Avec $x = A_2\omega^2 + \xi$, $y = A_1\omega^2 + \eta$ il vient :

$$U = A_1^2\xi^2 + 2(2F^2 - A_1A_2)\xi\eta + A_2^2\eta^2 > 0$$

car on s'assure que cette forme est définie positive.

5) Dans le cas de symétrie de révolution on a :

$$c_1 = (A_3\omega + J\Omega)^2 - 2A_1\omega(A_3\omega + J\Omega) + 2A_1^2\omega^2 + 2\mu g(a_1 - a)A_1$$

$$c_2 = \left((A_3 - A_1)\omega^2 + J\Omega\omega + \mu g(a_1 - a)\right)^2 = \gamma^2, \quad \gamma > 0$$

Les conditions nécessaires de stabilité sont $c_1 > 0$, $c_1^2 - 4A_1^2c_2 > 0$

ou $c_1 > 0$ et $(c_1 - 2A_1\gamma)(c_1 + 2A_1\gamma) > 0$

mais $c_1 - 2A_1\gamma = \left[A_3\omega + J\Omega - 2A_1\omega\right]^2$

d'où la condition $c_1 + 2A_1\gamma > 0$ qui, à son tour, implique $c_1 > 0$.

Ainsi il reste $(A_3\omega + J\Omega)^2 + 4\mu g\, A_1(a_1 - a) > 0$ (11)

6) On écrit de nouveau les intégrales premières V_1 et V_2 à l'aide des variables de perturbation. On note d'abord que : $\vec{v}^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + c^t$ d'où

$$2V_1 = \mu\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 - 2F\omega_1\omega_2 + A_3(\omega_3+\omega)^2$$

$$+\mu g\left[\bar{E}(a_1-a)\gamma_1^2 + (a_2-a)\gamma_2^2\right] + c^t + O(3)$$

$$V_2 = \vec{n}\cdot\left(\bar{I}(\vec{\omega}+\omega\,\vec{x_3}) + J\Omega\,\vec{x_3}\right)$$

$$= (A_1\omega_1 - F\omega_2)\gamma_1 + (A_2\omega_2 - F\omega_1)\gamma_2 + \left(A_3(\omega+\omega_3)+J\Omega\right).\left(1-\tfrac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2)+\cdot\right)$$

$$2V_1 - 2\omega V_2 = A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 - 2F\omega_1\omega_2 - 2\omega\left[(A_1\omega_1 - F\omega_2)\gamma_1 + (A_2\omega_2 - F\omega_1)\gamma_2\right]$$

$$+\left[\mu g(a_1-a) + \omega(A_3\omega + J\Omega)\right]\gamma_1^2 + \left[\mu g(a_2-a) + \omega(A_3\omega+J\Omega)\right]\gamma_2^2$$

$$+\mu\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + A_3\omega_3^2 + \ldots$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur à 2.

Il y aura sûrement stabilité de la solution stationnaire si la forme quadratique

$$W = q_1\gamma_1^2 + q_2\gamma_2^2 - 2\omega\,(A_1\omega_1 - F\omega_2)\gamma_1 - 2\omega\,(A_2\omega_2 - F\omega_1)\gamma_2$$

$$+ A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 - 2F\omega_1\omega_2$$

est définie positive.

On écrit :

$$W = \frac{1}{q_1}\left(q_1 v_1 - \omega(A_1\omega_1 - F\omega_2)\right)^2 + \frac{1}{q_2}\left(q_2 v_2 - \omega(A_2\omega_2 - F\omega_1)\right)^2$$

$$+ A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 - 2F\omega_1\omega_2 - \frac{\omega^2}{q_1}(A_1\omega_1 - F\omega_2)^2 - \frac{\omega^2}{q_2}(A_2\omega_2 - F\omega_1)^2$$

et on exprime que

$$q_1 > 0, \quad q_2 > 0 \qquad (12)$$

et que la forme

$$\tilde{W} = \left(A_1 - \frac{\omega^2}{q_1}A_1^2 - \frac{\omega^2 F^2}{q_2}\right)\omega_1^2 + \left(A_2 - \frac{\omega^2}{q_2}A_2^2 - \frac{\omega^2}{q_1}F^2\right)\omega_2^2$$

$$-2\left(F - \frac{\omega^2 A_1 F}{q_1} - \frac{\omega^2 A_2 F}{q_2}\right)\omega_1\omega_2$$

est définie positive, c'est à dire, compte tenu de (12)

$$\left.\begin{aligned}(q_1 - A_1\omega^2)A_1 q_2 - \omega^2 q_1 F^2 > 0\\ (q_2 - A_2\omega^2)A_2 q_1 - \omega^2 q_2 F^2 > 0\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

et

$$F^2\left(1 - \frac{\omega^2 A_1}{q_1} - \frac{\omega^2 A_2}{q_2}\right)^2 - \left(A_1 - \frac{\omega^2}{q_1}A_1^2 - \frac{\omega^2 F^2}{q_2}\right)\left(A_2 - \frac{\omega^2}{q_2}A_2^2 - \frac{\omega^2}{q_1}F^2\right) < 0$$

ce qui, compte tenu de $A_1A_2 - F^2 > 0$ et de (12), conduit à

$$(q_1 - A_1\omega^2)(q_2 - A_2\omega^2) - F^2\omega^4 > 0 \qquad (14)$$

Mais $$(q_1 - A_1\omega^2)A_1 q_2 - \omega^2 q_1 F^2 = A_1(q_1 - A_1\omega^2)(q_2 - A_2\omega^2) + A_1A_2\,\omega^2(q_1 - A_1\omega^2) - \omega^2 q_1 F^2$$

et par (14) :

$$(q_1 - A_1\omega^2)A_1 q_2 - \omega^2 q_1 F^2 > (A_1A_2 - F^2)\,\omega^2(q_1 - A_1\omega^2)$$

et de même :

$$(q_2 - A_2\omega^2)A_2 q_1 - \omega^2 q_2 F^2 > (A_1A_2 - F^2)\,\omega^2(q_2 - A_2\omega^2)$$

Observons que (12) et (13) impliquent :

$$q_1 - A_1\omega^2 > 0 \quad , \quad q_2 - A_2\omega^2 > 0 \qquad (15)$$

A l'inverse, on voit par les inégalités que l'on vient d'établir que (15) et (14) $\longrightarrow$ (13)

Finalement les conditions suffisantes de stabilité obtenues peuvent être écrites :

$$\begin{aligned} & q_1 - A_1\omega^2 > 0 \\ & c_2 = (q_1 - A_1\omega^2)(q_2 - A_2\omega^2) - F^2\omega^4 > 0 \end{aligned} \qquad (16)$$

On pourra comparer ces résultats avec les conditions nécessaires des § II 2 et II 4.

7/ Dans le cas de symétrie de révolution, (16) est réduit à :

$$q_1 - A_1 \omega^2 > 0$$

ou

$$\mu g (a_1 - a) + \omega (A_3 \omega + J\Omega) - A_1 \omega^2 > 0 \qquad (17)$$

qui est, bien entendu, une condition suffisante de stabilité de la solution stationnaire.

Les vecteurs $\vec{n}$, $\vec{GQ}$, $\vec{x_3}$ étant parallèles à un même plan, on obtient par multiplication scalaire de (2) par $\vec{x_3}$:

$$\vec{x_3}\,\dot{\vec{H}} + x_3 \cdot \left[(\vec{\omega} + \omega \vec{x_3}) \wedge \vec{H} \right] = 0$$

d'où $\vec{x_3}\,\dot{\vec{H}} = 0 \longmapsto \vec{x_3} \cdot \vec{H} = c^t$

Ainsi $V_3 = \omega_3$ est une intégrale première des équations du mouvement.

On écrit :

$$2 V_1 + 2 \sigma V_2 - 2 A_3 (\omega + \sigma) V_3 =$$

$$\mu \left(\frac{d^3}{dt} \right)^2 + A_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + A_3 (\omega_3^2 + 2 \omega_3 \omega) + \mu g (a_1 - a)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)$$

$$+ 2\sigma A_1 (\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2) + 2\sigma A_3 \omega_3 - \sigma (A_3 \omega + J\Omega)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)$$

$$- 2 A_3 (\omega + \sigma) \omega_3 + \cdots$$

les termes non précisés étant d'ordre supérieur à 2, et négligeant les constantes.

Finalement :

$$2 V_1 + 2\sigma V_2 - 2A_3(\omega+\sigma)V_3 =$$

$$\mu\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + A_1(\omega_1^2+\omega_2^2) + 2\sigma A_1(\omega_1\gamma_1+\omega_2\gamma_2)$$

$$+\left[\mu g(a_1-a) - \sigma(A_3\omega + J\Omega)\right](\gamma_1^2+\gamma_2^2) + A_3\omega_3^2 + \dots$$

Pour que cette forme soit définie positive il suffit que :

$$A_1^2\sigma^2 < A_1\left[\mu g(a_1-a) - \sigma(A_3\omega+J\Omega)\right].$$

On obtiendra donc une condition suffisante de stabilité si l'on peut préciser le nombre réel σ tel que :

$$A_1\sigma^2 + \sigma(A_3\omega + J\Omega) - \mu g(a_1-l) < 0$$

ce qu'il est possible de faire si

$$(A_3\omega + J\Omega)^2 + 4A_1\mu g(a_1-a) > 0 \qquad (18)$$

Mais cette condition suffisante de stabilité est aussi nécessaire d'après le résultat du § II 5

La condition obtenue au début de ce § est nécessairement plus contraignante, ce que, d'ailleurs on peut vérifier directement. En effet :

$$\mu g (a_1 - a) + \omega (A_3 \omega + J\Omega) - A_1 \omega^2 > 0$$

implique $\quad 4 A_1 \mu g (a_1 - a) > 4 A_1^2 \omega^2 - 4 A_1 \omega (A_3 \omega + J\Omega) > -(A_3 \omega + J\Omega)^2$

c'est à dire (18).

Partie III

On représente

$$2 V_1 = \mu \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2 - 2 F \omega_1 \omega_2 + A_3 \omega_3^2$$
$$+ \mu g \left[(a_1 - a) \gamma_1^2 + (a_2 - a) \gamma_2^2 \right] + \cdots$$

$$V_2 = \left(A_1 \omega_1 - F \omega_2 + J\Omega \right) \gamma_1 + (A_2 \omega_2 - F \omega_1) \gamma_2 + A_3 \omega_3 + \cdots$$

et $\quad 2 V_1 + \sigma V_2^2 = \mu \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2 - 2 F \omega_1 \omega_2$

$$+ A_3 (1 + \sigma A_3) \omega_3^2 + 2\sigma A_3 J \Omega \gamma_1 \omega_3$$

$$+ \left[\mu g (a_1 - a) + \sigma J^2 \Omega^2 \right] \gamma_1^2 + \mu g (a_2 - a) \gamma_2^2 + \cdots$$

Exprimant que la forme quadratique en ω_3, v_1, v_2 est définie positive, on obtient

$$\sigma^2 A_3^2 J^2 \Omega^2 - A_3(1+\sigma A_3)\left(\mu g(a_1-a)+\sigma J^2\Omega^2\right)<0$$

$$1+\sigma A_3>0 \quad , \quad a_2-a>0$$

Pour qu'on puisse choisir σ réel satisfaisant ces inégalités, il suffit que :

$$a_2-a>0 \text{ et } \quad \mu g(a_1-a)A_3+J^2\Omega^2>0 \qquad (19)$$

qui sont ainsi des conditions suffisantes de stabilité.

Remarques des correcteurs

L'énoncé comportait toutes les notations nécessaires ; il est inutile, voire dangereux, d'en introduire de nouvelles, encore plus si elles ne sont pas définies.

Le niveau d'ensemble est très faible ; il témoigne de connaissances mal assurées, d'incapacités fréquentes pour expliciter et conduire correctement un calcul, et en interpréter les résultats. Combien de fois faudra-t-il répéter qu'une copie de mécanique ne se réduit pas à une suite de calculs mal présentés et dépourvus d'explications.

Les résultats statistiques ne doivent pas faire illusion ; une notation très généreuse a, seule, permis de masquer les insuffisances des meilleures copies.

Répartition des notes

NOTE	$35 < N \leqslant 40$	$30 < N \leqslant 35$	$25 < N \leqslant 30$	$20 < N \leqslant 25$
Nombre de Candidats	0	3	6	8
Note	$15 < N \leqslant 20$	$10 < N \leqslant 15$	$5 < N \leqslant 10$	$0 \leqslant N \leqslant 5$
Nombre de Candidats	7	8	20	51

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

DUREE : 6 Heures

DÉFINITIONS, NOTATIONS, RAPPELS

1° On note 1_A la fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble $\mathcal{X}$.

2° L'ensemble des entiers naturels est désigné par $\mathbb{N}$. La tribu $\mathcal{B}_\infty$ est la plus petite tribu sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui pour tout n rend mesurable la projection canonique de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^{\{0, 1, \ldots, n\}}$.

3° On note Γ la fonction de $\mathrm{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

et pour $a > 0$, $b > 0$ on appelle loi $\beta(a, b)$ la probabilité de densité

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1} 1_{]0,1[}(t)$$

4° Si $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de tribus, on note $\mathcal{F}_\infty$ la plus petite tribu contenant l'anneau $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

5° On convient de poser $\inf \varnothing = +\infty$; on notera par ailleurs $\underline{x}$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

6° Toutes les variables aléatoires (en abrégé v.a.) introduites dans ce problème sont supposées définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée v.a. réelle. Le symbole $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ désigne, quand elle existe, l'espérance mathématique de la v.a. réelle X; $\sigma^2(\mathrm{X})$ désigne la variance de X. « Presque sûrement » est noté en abrégé p.s.

7° Si U est une v.a. réelle intégrable et V une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ on note $\mathrm{E}(\mathrm{U} \mid \mathrm{V})$ la (classe de) v.a. réelles caractérisée par l'égalité

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathrm{U} \mid \mathrm{V})\, h(\mathrm{V})) = \mathrm{E}(\mathrm{U}\, h(\mathrm{V}))$$

où h parcourt l'ensemble des fonctions boréliennes bornées de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

8° On note $\underline{\mathrm{X}}$ la suite de v.a. réelles $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On appelle loi de $\underline{\mathrm{X}}$ la probabilité sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_\infty)$ image de P par $\underline{\mathrm{X}}$; elle est caractérisée par la suite des lois des v.a. $(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+1}$, pour n parcourant $\mathbb{N}$.

9° *Processus d'urne :* Soit x_0 un réel $(0 \leqslant x_0 \leqslant 1)$, m un entier positif ou nul, f une fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. On appelle processus d'urne, associé à f, de composition initiale (x_0, m) une suite $\underline{X}$ pouvant être définie par les équations de récurrence :

$$\begin{cases} X_0 = x_0 \\ (m + k + 1)\, X_{k+1} = (m + k)\, X_k + 1_{A_{k+1}}, & k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et où la suite d'événements $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ satisfait pour tout $k \in \mathbb{N}$, à :

$$E(1_{A_{k+1}} \mid X_0, X_1, \ldots, X_k) = f(X_k) \qquad \text{p.s.}$$

On se propose d'en étudier les propriétés asymptotiques.

10° Pour B élément de $\mathcal{B}_\infty$ et $\underline{X}$ processus d'urne de composition initiale (x_0, m), associé à la fonction f on notera :

$$Q^f_{x_0, m}(B) = P(\underline{X} \in B)$$

et, lorsqu'une seule fonction f est considérée, on abrégera

$$Q^f_{x_0, m} \text{ en } Q_{x_0, m}.$$

11° On admettra que pour un processus d'urne $\underline{X}$ de composition initiale (x_0, m) associé à une fonction f, on a pour toute fonction borélienne bornée h de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & E(h(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_{n+k}, \ldots) \mid X_1, \ldots X_n) \\ = {} & E(h(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_{n+k}, \ldots) \mid X_n) \qquad \text{p.s.} \\ = {} & \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} h(\underline{x})\, d\, Q^f_{X_n, n+m}(\underline{x}) \qquad \text{p.s.} \end{aligned}$$

12° On posera $S_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}$.

PRÉLIMINAIRES

1° Soit U une v.a. de loi $\beta(a, b)$. Calculer :

a. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$ $\quad E(U^k (1 - U)^{n-k})$

b. La variance $\sigma^2(U)$.

2° Soit $\underline{X}$ un processus d'urne associé à la fonction f et h une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que, si elle existe,

$$E(h(X_{n+1}) \mid X_n) = f(X_n)\, h\left(\frac{(m+n)\, X_n + 1}{m + n + 1}\right) + (1 - f(X_n))\, h\left(\frac{(m+n)\, X_n}{m + n + 1}\right) \qquad \text{p.s.}$$

3° Montrer que si $\underline{X}$ est un processus d'urne associé à la fonction f, la suite $\underline{Y}$ définie par :

$$Y_n = 1 - X_n$$

est un processus d'urne associé à une fonction qu'on précisera.

4° Montrer qu'on a pour tout $\underline{X}$ processus d'urne

a. $\quad \lim_{n \to \infty} \left(X_n - \frac{S_n}{n}\right) = 0, \qquad$ et si $\quad m = 0,\ X_n = \frac{S_n}{n}$

b. $\quad |X_{n+1} - X_n| \leqslant \frac{1}{n + 1}.$

I. URNE DE BERNOULLI ET APPLICATIONS

Soit $\underline{X}$ un processus d'urne de composition initiale $(x_0\,,\ 0)$ et associé à

$$t \rightsquigarrow f(t) = p \qquad (0 < p < 1).$$

1° Quelle est la loi de S_n ?

2° Étudier :

a. $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$

b. pour $t \neq p$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k<tn} C_n^k\, p^k\,(1-p)^{n-k}$.

3° Soit U une v.a. comprise entre 0 et 1, de fonction de répartition F continue. Étudier :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k<tn} C_n^k\, E\left(U^k\,(1-U)^{n-k}\right).$$

II. MARTINGALES ET SOUS-MARTINGALES

Une suite $\underline{M}$ de v.a. réelles intégrables est une martingale (resp. sous-martingale) s'il existe une suite croissante de sous-tribus $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left\{\begin{array}{ll} .\ M_n \text{ est } \mathcal{F}_n \text{ mesurable} & \\ ..\ E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = M_n & \text{p.s.} \\ (\text{resp} \geqslant) & \end{array}\right.$$

Si de plus $E\left(M_n^2\right) < +\infty$ pour tout entier n, $\underline{M}$ est dite de carré intégrable.

1° Soit $\underline{M}$ une martingale (resp. une sous-martingale); comparer $E(M_n)$ et $E(M_{n+1})$.

2° Montrer que si $\underline{M}$ est une martingale de carré intégrable, $\underline{M}^2$ est une sous-martingale et que

$$E\left[(M_{n+1} - M_n)^2\right] = E\left(M_{n+1}^2\right) - E\left(M_n^2\right)$$

3° Soit $\underline{M}$ une sous-martingale positive de carré intégrable.

a. Montrer que la suite $\underline{M}^2$ est une sous-martingale.

b. Montrer en considérant la suite $\underline{M}'$ définie par

$$M'_n = \sum_{j=0}^{n} M_j - \sum_{j=0}^{n-1} E(M_{j+1} \mid \mathcal{F}_j)$$

que $\underline{M}$ est la somme d'une martingale de carré intégrable et d'une suite croissante.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$E\left(M'^2_{n+1}\right) - E\left(M'^2_n\right) \leqslant E\left(M^2_{n+1}\right) - E\left(M^2_n\right)$$

4° Soit $\underline{M}$ une sous-martingale positive et x un nombre strictement positif.

On pose $K = \inf\{\, n \in \mathbb{N} : M_n > x \,\}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a. $$\mathrm{E}(\mathrm{M}_n) \geqslant \mathrm{E}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{M}_k 1_{\{\mathrm{K}=k\}}\right)$$

b. $$\mathrm{P}(\mathrm{Max}(\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n) > x) \leqslant \frac{\mathrm{E}(\mathrm{M}_n)}{x}$$

5° Soit $\varepsilon > 0$ et $\underline{\mathrm{M}}$ une martingale de carré intégrable. Montrer que pour tous n et k entiers positifs :

$$\mathrm{P}\left(\underset{j=1,2,\ldots,k}{\mathrm{Max}} |\mathrm{M}_{n+j} - \mathrm{M}_n| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{E}(\mathrm{M}_{n+k}^2) - \mathrm{E}(\mathrm{M}_n^2)}{\varepsilon^2}$$

6° En déduire que si $\underline{\mathrm{M}}$ est une martingale pour laquelle la suite $(\mathrm{E}(\mathrm{M}_n^2))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, $\underline{\mathrm{M}}$ est une suite presque sûrement convergente.

7° Déduire de 3° et 6° qu'une sous-martingale positive $\underline{\mathrm{M}}$ converge presque sûrement vers une v.a. réelle si la suite $(\mathrm{E}(\mathrm{M}_n^2))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

8° Soit U une v.a. réelle bornée et $(\mathcal{F}_n)$ une suite croissante de sous-tribus.

a. Calculer :

$$\mathrm{E}\left(\lim_{k \to \infty} \mathrm{E}(\mathrm{U} \mid \mathcal{F}_k) / \mathcal{F}_n\right)$$

b. Soit Z une v.a. réelle de carré intégrable, $\mathcal{F}_n$ - mesurable.

En déduire la valeur de :

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{Z}\left(\mathrm{E}(\mathrm{U} \mid \mathcal{F}_\infty) - \lim_{k \to \infty} \mathrm{E}(\mathrm{U} \mid \mathcal{F}_k)\right)\right]$$

c. Montrer que :

$$\mathrm{E}(\mathrm{U} \mid \mathcal{F}_\infty) = \lim_{k \to \infty} \mathrm{E}(\mathrm{U} \mid \mathcal{F}_k) \qquad \text{p.s.}$$

III. DEUX APPLICATIONS AUX PROCESSUS D'URNE

(On n'oubliera pas Préliminaires 4)

1° On considère l'élément $\mathrm{E}_{a,b}$ de $\mathcal{B}_\infty$

$$\mathrm{E}_{a,b} = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \liminf_{n \to \infty} x_n < a < b < \limsup_{n \to \infty} x_n \right\}.$$

Soit $\underline{\mathrm{X}}$ un processus d'urne de composition initiale (x_0, m), associé à la fonction f.

a. Montrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{E}(1_{\mathrm{E}_{a,b}} \circ \underline{\mathrm{X}} \mid \mathrm{X}_n) = 1_{\mathrm{E}_{a,b}} \circ \underline{\mathrm{X}} \qquad \text{p.s.}$$

b. On suppose que $\mathrm{Q}^f_{x_0,m}(\mathrm{E}_{a,b}) > 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tous c et d tels que $a < c < d < b$, il existe, pour une infinité d'entiers n, des compositions initiales (y_n, n), avec $c < y_n < d$, et telles que

$$\mathrm{Q}^f_{y_n,n}(\mathrm{E}_{a,b}) > 1 - \varepsilon.$$

2° Soit f une fonction de [0, 1] dans [0, 1], telle que, pour un p_0 de [0, 1], f vérifie

$$(f(t) - t)(t - p_0) \geqslant 0, \qquad \text{quel que soit } t \in [0, 1].$$

a. Montrer que si $\underline{\mathrm{X}}$ est un processus d'urne associé à f, la suite $(|\mathrm{X}_n - p_0|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale.

b. Montrer que $\underline{\mathrm{X}}$ converge presque sûrement.

IV. PROCESSUS DE POLYA

On étudie ici un processus $\underline{X}$, de composition initiale (x_0, m), avec $m > 0$, associé à la fonction $f : t \rightsquigarrow f(t) = t$ (processus de Polya).

1° Montrer que pour $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_n = k) = \mathrm{C}_n^k \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (mx_0 + j) \prod_{j=0}^{n-k-1} (m(1 - x_0) + j)}{\prod_{j=0}^{n-1} (m + j)}$$

et écrire une expression de

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_n < nt).$$

2° Montrer, à l'aide des préliminaires, de I, et de II ou (III + II), que $\underline{X}$ converge presque sûrement vers une v.a. X de loi $\beta(mx_0, m(1 - x_0))$.

3° Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}(\sup_{n \in \mathbb{N}} |\mathrm{X}_n - x_0| > \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2(\mathrm{X})}{\varepsilon^2}.$$

4° On donne quatre réels a, b, c et d vérifiant $a < c < d < b$, $0 \leqslant c < d \leqslant 1$ et on pose pour $\underline{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\tau(\underline{x}) = \inf\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin [a, b]\}.$$

a. Montrer que :

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{c \leqslant y \leqslant d} \mathrm{Q}_{y,m}\{\underline{x} : \tau(\underline{x}) < \infty\} = 0.$$

b. Soit $\underline{X}'$ un processus d'urne associé à une fonction g telle que $g(t) = t$ si $a \leqslant t \leqslant b$ et $\underline{X}$ un processus de Polya. Montrer que si $\underline{X}$ et $\underline{X}'$ ont même composition initiale (y, m) et si $c < y < d$, les v.a. $\tau(\underline{X})$ et $\tau(\underline{X}')$ ont même loi.

V. THÉORÈMES DE CONVERGENCE

1° Soit m un entier positif ou nul, y un réel compris entre 0 et 1, h_1 et h_2 deux fonctions définies sur [0, 1] et vérifiant, pour tout t dans [0, 1], $0 \leqslant h_1(t) \leqslant h_2(t) \leqslant 1$. Soit $(\mathrm{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite indépendante de v.a. uniformes sur [0, 1]. On définit deux processus $\underline{V}$ et $\underline{W}$, par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} \mathrm{V}_0 = \mathrm{W}_0 = y \\ (m + n + 1)\,\mathrm{V}_{n+1} = (m + n)\,\mathrm{V}_n + 1_{\{\mathrm{U}_{n+1} \leqslant h_1(\mathrm{V}_n)\}} & \\ (m + n + 1)\,\mathrm{W}_{n+1} = (m + n)\,\mathrm{W}_n + 1_{\{\mathrm{U}_{n+1} \leqslant h_2(\mathrm{W}_n)\}} & \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

Montrer que les processus $\underline{V}$ et $\underline{W}$ sont deux processus d'urnes de compositions initiales (y, m) associés respectivement à h_1 et h_2 et satisfont à :

$$\mathrm{V}_n \leqslant \mathrm{W}_n \qquad \text{quel que soit } n \in \mathbb{N}$$

2° Soit f une fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que pour tout intervalle non vide $]\alpha, \beta[$ inclus dans $[0, 1]$, il existe un intervalle $[a, b]$, (avec $\alpha < a < b < \beta$) sur lequel $f(t) - t$ ne change pas de signe. $\underline{X}$ désigne un processus d'urne associé à f, de composition initiale (x_0, m). On définit $E_{a,b}$ comme en III.1°, et τ comme en IV.4°; on pose :

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) \quad \text{si} \quad t \notin [a, b] \\ &= t \quad \text{si} \quad t \in [a, b]\,. \end{aligned}$$

a. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que si $Q^f_{x_0, m}(E_{\alpha, \beta}) > 0$ il existe pour $a < c < d < b$, pour une infinité d'entiers n, des compositions initiales (y_n, n) satisfaisant à $c < y_n < d$ et à

$$Q^g_{y_n, n}(\underline{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \tau(\underline{x}) < +\infty) \geqslant Q^f_{y_n, n}(E_{a,b}) > 1 - \varepsilon.$$

b. Montrer que pour tous $\alpha < \beta$, $Q^f_{x_0, m}(E_{\alpha, \beta}) = 0$ et en déduire que tout processus d'urne $\underline{X}$ associé à f, de composition initiale (x_0, m) converge presque sûrement.

3° On suppose dans ce 3° que f est une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ et $\underline{X}$ un processus d'urne de composition initiale (x_0, m) associé à f.

a. Montrer que la suite $\underline{X}$ converge presque sûrement.

On pose pour $\varepsilon > 0$ et pour $\underline{x}$ suite de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \{ t \in [0, 1] : f(t) > t + \varepsilon \} \\ T(\underline{x}) &= \inf \{ n \geqslant 0 : x_n \notin A_\varepsilon \} \\ T_k(\underline{x}) &= \operatorname{Min}(T(\underline{x}), k) \qquad k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

b. Montrer que si $x_0 \in A_\varepsilon$, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

$$E((X_j - X_{j-1}) 1_{\{j \leqslant T_k(\underline{X})\}} / X_0, X_1, \ldots, X_{j-1}) \geqslant \frac{\varepsilon}{m + j} 1_{\{j \leqslant T_k(\underline{X})\}} \qquad \text{p.s.}$$

c. En déduire que pour tout m dans $\mathbb{N}$ et tout x_0 dans A_ε,

$$P(T(\underline{X}) = +\infty) = 0.$$

$$\left(\text{on pourra considérer } \sum_{j=1}^{\infty} (X_j - X_{j-1}) 1_{j \leqslant T_k(\underline{X})} \right).$$

d. Soit $X = \lim_{n \to \infty} X_n$ p.s. Montrer que pour toute composition initiale (x_0, m)

$$P(X \in A_\varepsilon) = 0;$$

puis en se souvenant des préliminaires 3°, établir que :

$$P(X \in \{ t : t = f(t) \} = 1.$$

4° On suppose dans ce 4° que f est une fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle qu'il existe g, fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, et p_0 $(0 < p_0 < 1)$ satisfaisant à

$$\begin{aligned} &.\ (f(t) - g(t))(p_0 - t) \geqslant 0 \qquad \text{pour tout} \quad t \in [0, 1] \\ &..\ \{p_0\} = \{ t : g(t) = t \}\,. \end{aligned}$$

Soit $\underline{X}$ un processus d'urne associé à f et de composition initiale (x_0, m).

a. Montrer que pour tout $\delta > 0$:

$$P(\liminf_{n \to \infty} X_n > p_0 - \delta) = 1$$

(Utiliser la fonction Inf (g, h_δ), où h_δ est la fonction affine par morceaux, continue, et égale à 1 si $t < p_0 - \delta$, égale à 0 si $t > p_0$).

b. Montrer que la suite $\underline{X}$ converge presque sûrement vers p_0.

5° On suppose dans ce 5° que f est une fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que pour un p_0, $(0 < p_0 < 1)$, et pour tout $t \in [0, 1]$:

$$(f(t) - t)\,(t - p_0) \geqslant 0.$$

Soit X la limite d'un processus d'urne $\underline{X}$ associé à f et de composition initiale (x_0, m) avec $0 < x_0 < 1$ et $m > 0$. On pose pour $\lambda > 0$ et $z \in]0, 1[$:

$$\varphi_n(z) = \int_0^1 \frac{\Gamma(\lambda + 2)\,\Gamma(n)\,t^{\lambda p_0 + nz - 1}\,(1 - t)^{\lambda(1 - p_0) + n(1 - z) - 1}}{\Gamma(\lambda p_0 + 1)\,\Gamma(\lambda(1 - p_0) + 1)\,\Gamma(nz)\,\Gamma(n(1 - z))}\,dt.$$

a. Montrer que :

$$\mathrm{E}(\varphi_{n+m+1}(\mathrm{X}_{n+1}) / \mathrm{X}_n)$$
$$= \frac{\varphi_{n+m}(\mathrm{X}_n)}{\lambda + m + n}\left[\frac{f(\mathrm{X}_n)}{\mathrm{X}_n}\,(\lambda p_0 + (m + n)\,\mathrm{X}_n) + \frac{1 - f(\mathrm{X}_n)}{1 - \mathrm{X}_n}\,(\lambda(1 - p_0) + (m + n)\,(1 - \mathrm{X}_n))\right]$$

b. En déduire que $[\mathrm{E}(\varphi_{n+m}(\mathrm{X}_n))]_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

c. Montrer que si $\lambda_n + \mu_n \to +\infty$ et si $\dfrac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n} \to q$, la loi $\beta(\lambda_n, \mu_n)$ converge étroitement vers la mesure de Dirac en q, et que le maximum de sa densité est atteint en $\dfrac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + \mu_n - 2}$, si $0 < q < 1$ et n assez grand.

d. Montrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{E}(\varphi_{n+m}(\mathrm{X}_n)) \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{\Gamma(\lambda + 2)\,\mathrm{X}^{\lambda p_0}\,(1 - \mathrm{X})^{\lambda(1 - p_0)}}{\Gamma(\lambda p_0 + 1)\,\Gamma(\lambda(1 - p_0) + 1)}\right).$$

e. Montrer que :

$$\lim_{\lambda \to \infty} \varphi_m(x_0) = \frac{\Gamma(m)\,p_0^{\,m x_0 - 1}\,(1 - p_0)^{m(1 - x_0) - 1}}{\Gamma(m x_0)\,\Gamma(m(1 - x_0))}$$

en déduire que :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = p_0) = 0.$$

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

L'épreuve de la session de 1982 avait puisé ses origines dans une étude (*) sur les "processus d'urne". Rappelons le schéma de base. Une urne contient à l'instant 0 mx_0 boules blanches et $m(1-x_0)$ boules noires; on effectue une suite de tirages avec remise de la boule et addition d'une boule supplémentaire, la couleur choisie étant fonction du résultat du tirage précédent; quel est le comportement de la suite $X_n(\omega)$ des proportions successives des boules blanches? A travers ce formalisme peut être un peu désuet peuvent être abordés des problèmes de gestion de stocks, de populations biologiques,...

On schématisera les résultats de (*) de la façon suivante: 1 - La suite X_n converge p.s. dès que la fonction d'urne f est tant soit peu régulière. 2 - On trouve les limites possibles aux points où cette fonction franchit la diagonale. 3 - Il y a présence de masse si le franchissement a lieu de "haut en bas", et absence s'il a lieu de "bas en haut".

Ce travail était basé sur 1 - le schéma de Bernoulli (urne avec $f(t) = p$), 2 - le schéma de Polya (urne avec $f(t) = t$), 3- le théorème de convergence des sousmartingales.

Soulignons que 1- est au programme de terminale, que 2- a fourni de nombreux exercices sur ce programme. Plutot que d'admettre 3- , nous avions choisi de l'établir dans le cadre de l'espace $\mathcal{L}^2$, qui était bien suffisant à nôtre but, et permettait de controler l'acquisition des espérances conditionnelles par les candidats.

L'ensemble du problème couvrait les principales notions et théorèmes au programme; et les questions assez graduées (une délicate en II-6, une en III-1-b, une difficile en V-1).

D'une manière générale on soulignera les confusions fréquentes entre convergence en probabilité et presque sure, et les difficultés, même dans les bonnes copies, à se plier aux raisonnements-types probabilistes. Les meilleurs ont abordé le V . Les candidats retenus pour l'oral ont pour la plupart assuré P - I - II (sauf II-6). Nous avons été intrigués de la proportion importante de candidats qui semble avoir été déroutés par II-3-b , plus précisément par la partie triviale de cette question (que M'_n est de carré intégrable) Faut il accuser là la fatigue?

On trouvera ci-après une solution parfois esquissée et des commentaires en italique.

PRELIMINAIRES

1 - a / On trouve :

$$E(U^k(1-U)^{n-k}) = \frac{\Gamma(a+b)\,\Gamma(a+k)\,\Gamma(b+n-k)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(a+b+n)}$$

Pour k et n entiers, cette expression se simplifie en

$$\frac{\prod_{j=0}^{k-1}(a+j)\ \prod_{j=0}^{n-k-1}(b+j)}{\prod_{j=0}^{n-1}(a+b+j)}$$

- b / Pour $k = n = 1$, pour $k = n = 2$, on obtient $E(U)$, puis $E(U^2)$, et enfin

$$\sigma^2(U) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

— Des réponses correctes à cet exercice classique. —

2 / Par le rappel 11°)

$$E(h(X_{n+1})\mid X_n) = E(h(X_{n+1}) \mid X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

$$= E(h(X_{n+1})\,1_{A_{n+1}} \mid X_1, X_2, \ldots, X_n) + E(h(X_{n+1})\,1_{\complement A_{n+1}} \mid X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Or X_{n+1} prend la valeur $\frac{(m+n)X_n + 1}{m + n + 1}$ sur l'évenement A_{n+1} , et la valeur $\frac{(m+n)X_n}{m+n+1}$ sur son contraire, d'où

$$h(X_{n+1})\,1_{A_{n+1}} = h\left[\frac{(m+n)X_n + 1}{m + n + 1}\right] 1_{A_{n+1}}, \qquad h(X_{n+1})\,1_{\complement A_{n+1}} = h\left[\frac{(m+n)X_n}{m+n+1}\right] 1_{\complement A_{n+1}}$$

En substituant, puis en sortant des espérances conditionnelles les fonctions de X_n qui sont $(X_1, X_2, \ldots X_n)$mesurables on obtient:

$$E(h(X_{n+1}) \mid X_n) = h\left[\frac{(m+n)X_n + 1}{m+n+1}\right] E(1_{A_{n+1}} \mid X_1, X_2, \ldots X_n) + h\left[\frac{(m+n)X_n}{m+n+1}\right] E(1_{\complement A_{n+1}} \mid X_1, X_2, \ldots X_n)$$

Le résultat s'obtient alors par la définition d'un processus d'urne.

-- *De nombreuses copies présentent une rédaction trop imprécise ou lacunaire, surtout dans l'amorce de l'argumentation.*

3 / On établit facilement les égalités

$$\begin{cases} Y_0 = 1 - x_0 \\ (m+k+1)Y_{k+1} = (m+k)Y_k + 1_{\complement A_{k+1}} \end{cases}$$

De plus $E(1_{\complement A_{k+1}} \mid Y_0, Y_1, \ldots Y_k) = E(1_{\complement A_{k+1}} \mid X_0, X_1, \ldots X_k) = 1 - f(X_k)$ car les tribus engendrées par $Y_0 = 1 - X_0$, $Y_1 = 1 - X_1$, ...$Y_k = 1 - X_k$ ou par $X_0, X_1, \ldots X_k$ sont identiques.

Enfin $1 - f(X_k) = 1 - f(1 - Y_k)$. Ceci montre que le processus d'urne est associé à:

$$g : t \rightsquigarrow g(t) = 1 - f(1-t)$$

-- *Même commentaire qu'en 2/ ; cependant, le résultat à obtenir n'étant pas explicité dans l'énoncé, de nombreuses copies parviendront à $g(t) = 1 - f(t)$* --

4 - a / On somme les égalités

$$(m+k+1)X_{k+1} = (m+k)X_k + 1_{A_{k+1}}$$

de $k = 0$ à $k = n-1$ .Ce qui donne successivement

$$(m+n)X_n = mX_0 + S_n$$

$$X_n - \frac{S_n}{n} = \frac{mX_0}{m+n} - \frac{S_n}{n}\,\frac{m}{m+n}$$

d'où le résultat, S_n étant inférieur à n.

- b / $(m+n+1)(X_{n+1} - X_n) = 1_{A_{n+1}} - X_n$

Par récurrence, on montre que X_{n+1} barycentre de X_n et de $1_{A_{n+1}}$ est compris entre 0 et 1, et donc

$$\left| 1_{A_{n+1}} - X_n \right| \leq 1$$

Le résultat est alors facile.

I - URNE DE BERNOULLI

1 / $A_1, A_2, \ldots A_n$ est une suite d'évenements de la tribu engendrée par $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$, et $E(1_{A_{n+1}} \mid X_1, X_2, \ldots X_n)$ vaut ici p et ne dépend plus de X_n . La suite A_n est donc une suite d'évenements indépendants de même probabilité p. La loi de S_n est la loi binomiale de paramètres n et p.

-- *On omet fréquemment d'établir l'indépendance des A_n ,et même de la mentionner !* --

-- *On pouvait se contenter d'établir, par une récurrence facile, la formule donnant les probabilités $P(S_n = k)$ (variante (f) pour ci après).* --

2 - a / On est dans le cas où X_n vaut S_n/n .(cf P-4-a). On sait que X_n converge vers p (loi forte ou faible des grands nombres)

-- *L'énoncé ne privilegiait pas une notion de convergence par rapport à une autre. Aussi convenait il d'être précis quand à la loi utilisée pour la suite. On donnera ici deux variantes, (F) pour la loi forte, (f) pour la loi faible; s'il était possible dépasser par un artifice de(F) à (f) ,le chemin inverse était interdit! Des candidats n'ayant pas assez assimilé les deux notions, s'y engagèrent. Noter que la variante (f) du 1 imposait la loi faible.* --

- b / La somme représente $P(\frac{S_n}{n} < t) = P(X_n < t)$.

(F)____ On a la convergence p.s. de $1_{(X_n < t)}$ vers 1 (resp. 0), si $p < t$ (resp. $p > t$). Cette suite est majorée par 1 et le théorème de Lebesgue montre que $E(1_{X_n < t)})$ tend vers 1 (resp.0)

(f)____La loi de X_n converge vers la loi de Dirac en p et la fonction de répartition de X_n converge vers $1_{]p,+\infty[}(t)$ en tout point de continuité de cette fonction,donc pour $p \neq t$.

3 / On veut étudier, la sommation étant finie:

$$E\Big(\sum_{k<nt} C_n^k\, U^k(1-U)^{n-k}\Big)$$

Cette somme est p.s. comprise entre 0 et la somme sur tous les indices k, qui vaut 1.
Pour n tendant vers l'infini, elle tend vers 1 (resp. 0) si $U < t$ (resp. $U > t$). Comme $P(U = t) = 0$ puisque F est continue, cela veut dire que la somme tend vers $1_{(U<t)}$ p.s. . Le théorème de Lebesgue montre alors que la limite demandée est F(t).

— On oublie souvent de vérifier que l'on est bien sous les hypothèses du théorème de Lebesgue —

—On n'a utilisé ici que la continuité locale de F au point t. Le résultat est donc vrai en tout point de continuité de F. —

II MARTINGALES ET SOUS-MARTINGALES

— Le but de cette partie était d'établir les théorèmes de convergence des sous-martingales de L^2 par des méthodes géométriques basées sur l'utilisation de formules de Pythagore. Beaucoup de candidats semblent ignorer que l'espace fondamental $\mathcal{L}^2$ est bien plus que la restriction à p = 2 des espaces $\mathcal{L}^p$. Ayant déja eu souvent maille à partir avec des martingales de $\mathcal{L}^p$, ils vont essayer d'appliquer leurs souvenirs au cas p = 2 ; c'était maladroit. —

1 / On a bien sur $E(M_n) = E(M_{n+1})$ (resp. $\leqslant$)

2 / On part de l'identité (c.f. le calcul d'une variance....) :

$$E((M_{n+1} - E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n))^2 | \mathcal{F}_n) = E(M_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) - (E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n))^2$$

Le membre de gauche est positif p.s. , ce qui établira que $\underline{M}^2$ est une sous-martingale, puis on achève en prenant les espérances des deux membres.

— L'inégalité de Jenssen fournissait également une partie de la réponse. —

3 - a / La même démarche permet d'obtenir le résultat pour des sous-martingales positives, une fois qu'on a remarqué que

$$E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq M_n \geq 0$$

implique

$$(E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n))^2 \geq M_n^2$$

— La positivité de $\underline{M}$ est ici essentielle. Cela a été cependant fréquemment omis. —

- b / La même identité montre que

$$E(E(M_{j+1} | \mathcal{F}_j))^2 \leq E(E(M_{j+1}^2 | \mathcal{F}_j)) = E(M_{j+1}^2) < +\infty$$

M_n' est une v.a. de $\mathcal{L}^2$ comme combinaison linéaire de v.a. de $\mathcal{L}^2$!!..

Il est facile de voir que

$$M_{n+1}' - M_n' = M_{n+1} - E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n)$$

d'où

$$E(M_{n+1}' - M_n' | \mathcal{F}_n) = 0$$

ce qui établit le fait que $\underline{M'}$ est une martingale.

$$M_n - M_n' = \sum_{j=0}^{n-1} (E(M_{j+1} | \mathcal{F}_j) - M_j)$$

montre enfin que la suite $\underline{M} - \underline{M'}$ est croissante p.s. .

— La plupart des candidats ne voient pas la simplification apportée dans ce type de problème par le fait de "passer aux différences" $M_{n+1}' - M_n'$ et donnent une preuve correcte, mais qui a demandé un temps de rédaction plus long. —

- c / $\underline{M'}$ est une martingale et par 2/ :

$$E(M'^2_{n+1}) - E(M'^2_n) = E(M'_{n+1} - M'_n)^2 = E(M_{n+1} - E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n))^2$$
$$= E(M^2_{n+1}) - E(E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)^2)$$
$$\leq E(M^2_{n+1}) - E(M^2_n)$$

— Même commentaire qu'en a /. —

4 - a / Comme M_n est positive et les évenements $(K = k)$ disjoints, on obtient:

$$M_n \geq M_n \sum_{k=0}^{n} 1_{(K = k)}$$

$$E(M_n) \geq \sum_{k=0}^{n} E(M_n 1_{(K = k)}) = \sum_{k=0}^{n} E(E(M_n 1_{(K = k)} \mid \mathcal{F}_k))$$

Or $(K = k)$ est un évenement de $\mathcal{F}_k$ et on peut sortir $1_{(K = k)}$ de l'espérance conditionnelle. Il suffit alors de noter que $E(M_n \mid \mathcal{F}_k) \geq M_k$ pour parvenir au résultat.

- b / Si ω est un élément de $(K = k)$, on a $M_k(\omega) > x$. On remarque alors que:

$$(\operatorname{Max}(M_0, M_1, \ldots\ldots M_n) > x) = \bigcup_{k=0}^{n} (K = k)$$

et donc

$$E(M_n) \geq \sum_{k=0}^{n} x\, P(K = k) = x\, P(\operatorname{Max}(M_0, M_1, \ldots\ldots M_n) > x)$$

5 / $(M_{n+j} - M_n)_{j\in\mathbb{N}}$ est une martingale pour la suite de tribus $(\mathcal{F}_{n+j})_{j\in\mathbb{N}}$ et son carré une sous-martingale par 2/ d'où

$$P(\operatorname*{Max}_{0\leq j\leq k} \mid M_{n+j} - M_n \mid > \varepsilon) = P(\operatorname*{Max}_{0\leq j\leq k} (M_{n+j} - M_n)^2 > \varepsilon^2)$$
$$\leq \frac{E(M_{n+k} - M_n)^2}{\varepsilon^2} \quad \text{par 4 - b /}$$

On utilise enfin le fait que $(M_{n+kj})_{j\in\mathbb{N}}$ est une martingale associée à la suite de tribus$((\mathcal{F}_{n+kj})_{j\in\mathbb{N}}$ pour obtenir l'égalité:

$$E(M_{n+k} - M_n)^2 = E(M_{n+k})^2 - E(M_n)^2$$

qui achève la preuve.

— Le dernier argument s'obtenait aussi facilement par récurrence. —

— Des détails essentiels dece raisonnement sont souvent passés sous silence dans les copies. —

6 / Soit ω tel que la suite $M_n(\omega)$ diverge. Alors:

$$\exists \varepsilon > 0 ,\ \forall n \in \mathbb{N} ,\ \exists\ k \in \mathbb{N} \ :\ \mid M_n(\omega) - M_{n+k}(\omega) \mid > \varepsilon$$

Soit D l'ensemble de divergence de $\underline{M}$. On écrira donc:

$$D \subset \bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^{+*}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\mid M_n - M_{n+k} \mid > \varepsilon)$$

Posons

$$D_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\mid M_n - M_{n+k} \mid > \varepsilon) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\operatorname*{Max}_{0\leq j\leq k} \mid M_{n+j} - M_n \mid > \varepsilon)$$

Cette dernière réunion est une limite croissante. D'où :

$$P(D_n) \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{E(M^2_{n+k}) - E(M^2_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\limsup_{k\to\infty} E(M^2_k) - E(M^2_n)}{\varepsilon^2}$$

$P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n)$ est inférieur à fortiori à cette dernière expression pour tout n ; les limites supérieures sont des limites car la suite $E(M^2_n)$ est croissante ; on obtient donc pour n tendant alors vers l'infini

$$P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n) \leq \frac{\lim_{k\to\infty} E(M^2_k) - \lim_{n\to\infty} E(M^2_n)}{\varepsilon^2} = 0$$

et si $Q^f_{X_0,m}(E_{a,b})$ est non nul, il existe au moins un ω dans l'évenement $E_{a,b}$. Pour cet ω la valeur de $1_{E_{a,b}}(\omega)$ est 1 et donc

$$\lim_{n\to\infty} Q^f_{X_n(\omega),n+m}(E_{a,b}) = 1$$

On a par ailleurs pour une infinité d'indices, par la définition de $E_{a,b}$

$$X_{n_{2k}}(\omega) > b \qquad X_{n_{2k+1}}(\omega) < a$$

Comme les accroissements successifs $X_n - X_{n+1}$ sont en valeur absolue inférieurs à b-a pour n supérieur à 1/b-a, on ne peut passer alors de $X_{n_{2k}}(\omega)$ à $X_{n_{2k+1}}(\omega)$ sans trouver une valeur $X_{n'_k}(\omega)$ dans $]a,b[$. La suite des compositions initiales définies par $y_k = X_{n'_k}(\omega)$ et $m_k = m + n'_k$ vérifie les propriétés demandées pour n assez grand.

2-a/ L'inégalité usuelle

$$E(|X_{n+1} - p_0| \mid X_n) \geqslant | E(X_{n+1} - p_0 \mid X_n) |$$

et le calcul de $E(X_{n+1} - p_0 \mid X_n)$ établi en P - 2/conduit à

$$E(|X_{n+1} - p_0| \mid X_n) \geqslant \left| \frac{(m+n)X_n + f(X_n)}{m+n+1} - p_0 \right| = \left| \frac{f(X_n) - X_n}{m+n+1} + X_n - p_0 \right|$$

$$= |X_n - p_0| \left| 1 + \frac{f(X_n) - X_n}{(X_n - p_0)(m+n+1)} \right|$$

$$\geqslant |X_n - p_0| \qquad \text{car } f(X_n) - p_0 \text{ et } X_n - p_0 \text{ sont de même signe.}$$

On a pu diviser par $X_n - p_0$, car si X_n vaut p_0, il n'y a plus rien à démontrer.

-- *Les candidats se perdent dans les calculs; très peu voient l'importance de l'inégalité triangulaire.* --

-b / On a ainsi montré que $|X_n - p_0|$ est une sous-martingale positive, bornée trivialement par 1 et donc convergente en vertu de II - 6.

Si $\lim_{n\to\infty} | X_n(\omega) - p_0 | = 0$, alors bien sur $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) - p_0 = 0$

Si $\lim_{n\to\infty} | X_n(\omega) - p_0 | = a > 0$, alors les seules valeurs d'adhérence de $X_n(\omega) - p_0$ ne peuvent être que a ou -a ; s'il y en avait deux, $X_n(\omega)$ serait élément de $E_{p_0 - \frac{a}{2},\, p_0 + \frac{a}{2}}$; on a alors trouvé (c.f. 1) une infinité de $X_n(\omega)$ entre $p_0 - \frac{a}{2}$ et $p_0 + \frac{a}{2}$, d'où l'existence d'une troisième valeur d'adhérence. La suite X_n converge donc p.s.

IV PROCESSUS DE POLYA

1 / S_n est une v.a. $\mathcal{F}_n$ mesurable. En intégrant sur A_{n+1} et son complémentaire, et en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_n$, on obtient :

$$E(1_{\{S_{n+1} = k\}}) = E(1_{(S_n = k)} E(1_{A_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n)) + E(1_{(S_n = k+1)} E(1_{\complement A_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n))$$

on achève la preuve en substituant à $E(1_{A_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n)$ sa valeur $E(1_{A_{n+1}} \mid X_n)$, en remarquant que sur $(S_n = k)$ la valeur de $X_n(\omega)$ est $\frac{mx_0 + k}{m+n}$ et en faisant une récurrence sur n.

Alors :

$$E(1_{A_{n+1}} \mid U_1, U_2, \dots U_n) = h \circ v_n(U_1, U_2, \dots U_n) = h(V_n)$$

Cette v.a. est V_n mesurable et c'est donc $E(1_{A_{n+1}} \mid V_n) = h(V_n)$

On a établi ainsi le fait que V_n, comme W_n, est un processus d'urne.

Notons $(m + n) V_n = m y + S_n$ et $(m + n) W_n = my + S'_n$. On voit que si $V_n(\omega)$ est supérieur à $W_n(\omega)$, alors $S_n(\omega)$ est supérieur à $S'_n(\omega)$; comme $S_0 - S'_0 = 0$, comme $S_{n+1} - S'_{n+1} - (S_n - S'_n)$ ne peut prendre que les valeurs -1,0 ou 1 il existe un k tel que $S_k(\omega) = S'_k(\omega)$ et $S_{k+1}(\omega) > S'_{k+1}(\omega)$. Donc

$$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (W_n < V_n)\Big) \leq P\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} ((S'_k = S_k) \cap (S'_{k+1} < S_{k+1}))\Big)$$

$$= P\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} ((W_k = V_k) \cap (h_2(W_k) < U_{k+1} \leq h_1(V_k))\Big)$$

et tous les évenements de cette réunion sont de probabilité nulle.

— Les quelques (bons) candidats ayant abordé cette question ne parviennent qu'à s'apercevoir "qu'on ne peut la résoudre par une recurence". Un bon point pour eux, cependant; dans (*), problablement à la suite d'une faute dans la mise en forme d'une récurence, ce résultat est énocé, sans démonstration, sous la simple hypothèse $V_0 \leq W_0$; il est alors facile de lui trouver des contrexemples. —

2 - a / L'inégalité droite a déja été établie en III -1 - b /. Considérons les deux processus définis en 1 / avec $h_1 = f$ et $h_2 = g$ et $V_0 = W_0 = y_n$. On suppose d'abord $f(t) \leq t$ sur $[a,b]$ (La preuve serait symétrique sinon). Alors :

$$Q^f_{y_n,\, n+m}(E_{a,b}) = P(\liminf_{n\to\infty} V_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} V_n)$$

$$\leq P(b < \limsup_{n\to\infty} V_n \leq \limsup_{n\to\infty} W_n)$$

$$\leq P(\tau(\underline{W}) < \infty)$$

$$= Q^g_{y_n,\, n+m}(\underline{x} : \tau(\underline{x}) < \infty)$$

- b / Soit h l'identité sur R . Par IV - 3 -b /, on vient d'établir que pour une infinité d'indices n

$$Q^h_{y_n,\, n+m}(\underline{x} : \tau(\underline{x}) < \infty) = Q^g_{y_n,\, n+m}(\underline{x} : \tau(\underline{x}) < \infty) > 1 - \varepsilon$$

si du moins $Q^f_{x_0,\, m}(E_{\alpha,\beta})$ est non nul, ce qui est en contradiction avec IV - 3 - a /. On a donc $Q^f_{x_0,\, m}(E_{\alpha,\beta})$ nul pour tous α et β. Soit D l'ensemble de divergence dûun processus associé à f . On a :

$$D \subset \bigcup_{\substack{\alpha<\beta \\ \alpha,\beta\in\mathbb{Q}}} (\liminf_{n\to\infty} X_n < \alpha < \beta < \limsup_{n\to\infty} X_n)$$

$$P(D) \leq \sum_{\substack{\alpha<\beta \\ \alpha,\beta\in\mathbb{Q}}} Q^f_{x_0,\, m}(E_{\alpha,\beta}) = 0$$

$\underline{X}$ converge donc p.s. .

3a/ Ici f vérifie les hypothèses du 2 /, donc la convergence de $\underline{X}$ est p.s. assurée.

- b / L'évenement $(j \leq T_k(\underline{X}))$ est vide si $j > k$, et égal à $\bigcap_{0\leq n\leq j-1} (f(X_n) > X_n + \varepsilon)$; il est donc dans les deux cas $\mathcal{F}_{j-1}$ mesurable. Pour tout ω dans cet évenement (...non vide alors!...) $E(X_j - X_{j-1} \mid X_{j-1})(\omega)$, calculé par P - 2 /, se minore par $\frac{\varepsilon}{m + j}$; on écrira donc :

$$E((X_j - X_{j-1})\, 1_{(j \leq T_k(\underline{X}))} \mid \mathcal{F}_{j-1}) = E(X_j - X_{j-1} \mid \mathcal{F}_{j-1})\, 1_{(j \leq T_k(\underline{X}))} \quad \text{p.s.}$$

$$= E(X_j - X_{j-1} \mid X_{j-1})\, 1_{(j \leq T_k(\underline{X}))} \quad \text{p.s.}$$

$$\geq \frac{\varepsilon}{m + j}\, 1_{(j \leq T_k(\underline{X}))} \quad \text{p.s.}$$

b / Montrons que $E(\varphi_{n+m+1}(X_{n+1}) \mid X_n)$ est inférieur à $\varphi_{n+m}(X_n)$. Le résultat suivra alors en prenant les espérances.

La suite X_n est obtenue en prenant des barycentres successifs avec des 0 ou des 1. La valeur initiale étant strictement comprise entre ces deux nombres, tous les X_n sont aussi strictement compris entre ces deux nombres et $X_n(1 - X_n)$ est strictement positif.

On veut donc établir l'inégalité

$$\frac{f(X_n)}{X_n}(\lambda p_0 + (m+n)X_n) + \frac{1 - f(X_n)}{1 - X_n}(\lambda(1 - p_0) + (m+n)(1 - X_n)) \leqslant \lambda + m + n$$

ou encore

$$\frac{f(X_n)}{X_n} p_0 + \frac{1 - f(X_n)}{1 - X_n} \leqslant 1 \quad (\lambda \text{ est strictement positif})$$

équivalente encore à

$$(X_n - p_0)(X_n - f(X_n)) \leqslant 0 \qquad \text{(après multiplication par } X_n(1 - X_n))$$

C'est alors trivial !

- c /Soit U_n une suite de v.a. de lois $\beta(\lambda_n, \mu_n)$. Par l'inégalité de Tchebichev, on a

$$P(|U_n - q| > \varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-2}E(U_n - q)^2 = \varepsilon^{-2}(\sigma^2(U_n) + (E(U_n) - q)^2)$$

$\sigma^2(U_n)$ a été calculé en P - 1 / et tend vers 0 sous les hypothèses de ce c/ ; de même $E(U_n)$ tend vers q. D'où la convergence en probabilité, puis étroitement vers la loi de Dirac en q.

Un calcul élémentaire de dérivée donne la position du maximum de la densité.

- d / Utilisons le lemme de Fatou, appliqué à $E(\varphi_{n+m}(X_n))$.

$$\liminf_{n\to\infty} E(\varphi_{n+m}(X_n)) \geqslant E(\liminf_{n\to\infty} \varphi_{n+m}(X_n))$$

A gauche la limite inférieure est une limite par b /

A droite $\varphi_{n+m}(X_n)$, mise sous la forme $\displaystyle\int \frac{\Gamma(\lambda + 2)}{\Gamma(\lambda p_0 + 1)\,\Gamma(\lambda(1 - p_0) + 1)} t^{\lambda p_0} (1 - t)^{\lambda(1-p_0)}\, d\beta_{(n+m)X_n, (n+m)(1-X_n)}(t)$

tend vers l'intégrale de la même fonction pour la loi de Dirac en X, presque surement, par c /, puisque n+m tend vers l'infini et X_n a une limite p.s. X par III - 2 /. Cette limite est l'expression demandée.

- e / On calculera de même la limite de $\varphi_m(x_0)$ pour λ tendant vers l'infini en l'écrivant comme

$$\int \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(mx_0)\,\Gamma(m(1 - x_0))} t^{mx_0-1} (1 - t)^{m(1-x_0)-1}\, d\beta_{\lambda p_0+1, \lambda(1-p_0)+1}(t)$$

Bien sur, par b / $\varphi_m(x_0)$ qui est le premier terme de la suite décroissante majore $\lim_{n\to\infty} E(\varphi_{n+m}(X_n))$

et a fortiori par d/ le produit de $P(X = p_0)$ par l'expression $\dfrac{\Gamma(\lambda + 2)}{\Gamma(\lambda p_0 + 1)\,\Gamma(\lambda(1 - p_0) + 1)} p_0^{\lambda p_0} (1 - p_0)^{\lambda(1-p_0)}$

Cette dernière expression est la valeur du maximum de la densité d'une loi β convergeant étroitement vers une loi de Dirac pour λ tendant vers l'infini. Elle ne peut rester bornée. D'où $P(X = p_0) = 0$

Références: Bruce M.HILL, David LANE and William SUDDERTH (1980) *A strong law for some generalized processes* Ann. Proba.8 ,p 214-226

La répartition des notes d'écrit a été la suivante

Note	0 et 1	2 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 36	36 à 40
Effectif	136	64	51	55	48	33	9	9	5

2. ÉPREUVE D'ANALYSE, PROBABILITÉS

2.1. Comme on pourra le constater, la liste des leçons posées diffère peu de celle de l'an dernier. Toutefois l'expérience ayant montré que certaines leçons (topologie générale par exemple) conduisaient systématiquement à des plans types, voire à des tranches de livre, le jury avait augmenté la fréquence des leçons demandant un réel effort de composition ; il semble que ceci ait été renforcé par les hasards du tirage au sort. Le jury a donc entendu beaucoup de leçons d'analyse classique. Il a, une fois de plus, constaté le refus de toute leçon de géométrie du moins tant que le couplage ne force pas la main au candidat. Le rapport de l'an dernier étant suffisamment explicite sur ce point, nous n'y reviendrons pas et le jury continuera à poser des leçons de géométrie ! Cela étant l'impression générale est moins bonne que l'an dernier. Bien des candidats, y compris parmi ceux bien classés à l'écrit, semblent n'avoir préparé que superficiellement l'oral. Inutile de dire qu'une telle attitude est dangereuse et elle a été à l'origine de quelques déceptions brutales ; le nombre de places mises au concours et le niveau moyen des candidats admissibles ne permettent guère de défaillances. Il va sans dire que ceci ne s'applique pas à tous les candidats et que certains d'entre eux ont, au contraire, laissé une excellente impression.

La règle du jeu est bien connue ; on peut néanmoins rappeler les points suivants :

Plan

Il doit figurer entièrement au tableau et être lisible. Ce qui est énoncé doit l'être complètement. Des allusions vagues à des résultats "qu'on n'a pas le temps d'écrire" sont à proscrire. Elles conduisent immanquablement le jury à demander des précisions que le candidat fournit rarement. Bien entendu cela ne signifie pas que le candidat doive, durant le plan, s'abstenir de tout commentaire, mais il convient d'être précis.

Exposé

Le choix des sujets est déjà une indication pour le jury. L'exposé doit être fait complètement et sans hésitation.

Enfin la *discussion* est une partie importante de la leçon ; c'est celle où le candidat n'a plus l'initiative ; quelques candidats essaient de la raccourcir en trainant sur la partie exposé...

La question la plus délicate est celle du niveau mathématique des leçons. Disons simplement que ce niveau est largement fixé par le candidat lui-même, dans son plan. Le jury, quant à lui, préfère nettement un candidat qui donne des exemples intéressants à partir de théorèmes simples à un candidat qui accumule des "grands théorèmes" sans en connaître aucune application. Bien entendu ceci demande à être modulé en fonction du sujet de la leçon.

2.3. Listes des épreuves d'analyse, mécanique et probabilités

1. - Applications à l'analyse de la notion de compacité.
2. - Exemples d'espaces compacts.
3. - Espaces homéomorphes. Exemples et contre-exemples.
4. - Connexité, Applications.
5. - Théorèmes du point fixe. Applications.
6. - Utilisation en analyse d'espaces complets. Exemples.
7. - Sous-espaces denses. Illustration par l'approximation des fonctions.
8. - Exemples d'applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé dans un autre ; norme de telles applications.
9. - Espaces vectoriels normés de dimension finie.
10. - Géométrie dans un espace vectoriel normé.
11. - Exemples d'utilisation de la dénombrabilité en topologie et en analyse.
12. - Donner une construction de $\mathbb{R}$; en déduire les principales propriétés de $\mathbb{R}$.
13. - Une caractérisation de $\mathbb{R}$ (par certaines de ses propriétés) étant connue, en déduire les autres propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$.
14. - Topologie de la droite numérique $\mathbb{R}$ et sous-ensembles remarquables de $\mathbb{R}$.
15. - Exemples de compactification de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$; utilisation.
16. - Connexité dans $\mathbb{R}$ et fonctions continues.
17. - Propriétés topologiques de $\mathbb{R}^n$, exemples d'utilisation.
18. - Limite d'une fonction numérique d'une variable réelle.
19. - Exemples d'étude de suites de nombres réels.
20. - Limite, limite inférieure, limite supérieure d'une suite dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$; exemples d'utilisation.
21. - Approximations d'un nombre réel.
22. - Etude, sur des exemples, de suites numériques définies par divers types de relations de récurrence.
23. - Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle ; exemples et contre-exemples.
24. - Continuité uniforme. Exemples et applications.
25. - Fonctions à variation bornée. Applications.
26. - Applications réciproques : théorèmes d'existence ; exemples.
27. - Fonctions implicites : applications.
28. - Applications géométriques du théorème des fonctions implicites.
29. - Exemples d'utilisation de changements de variable.
30. - Fonctions convexes d'une ou de plusieurs variables réelles.
31. - Fonctions convexes d'une variable réelle ; inégalités de convexité.
32. - Applications de la notion de convexité à des problèmes d'extremum.
33. - Problèmes de prolongement de fonctions : exemples.
34. - Théorème de Rolle et applications aux fonctions d'une variable réelle.
35. - Dérivées partielles. Différentiabilité. Exemples.
36. - Fonctions de plusieurs variables réelles : théorème des accroissements finis et applications.
37. - Applications de classe C^k d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
38. - Différentes formules de Taylor. Majoration des restes. Applications.
39. - Problèmes d'extremum.
40. - Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Développements limités.
41. - Exemples de développements limités et asymptotiques.
42. - Intégrale des fonctions réelles ou complexes de variable réelle. Premières propriétés.

3.2 Le plan

3.2.-1) La durée du plan ne devant pas excèder 20 mn, il appartient au candidat de bien en minuter la présentation. Il se trouve encore des candidats qui perdent leur temps à présenter des notions mineures et n'arrivent au vif du sujet que quelques minutes avant la fin.

3.2.-2) Le niveau est libre, mais il faut éviter deux écueils :

- Niveau trop faible : Par exemple "seconde faible" pour la leçon "$\mathbb{Z}$", ou pour certaines leçons de Géométrie.

- Niveau trop élevé : cette tendance apparaît souvent chez des candidats qui "récitent" un plan appris par coeur sur un sujet "classique". Les candidats qui se placent à un niveau trop élevé oublient souvent des théorèmes élémentaires, mais centraux. Par ailleurs, si l'on a fait un tel choix il faut impérativement proposer en exposé l'un au moins des théorèmes ambitieux énoncés dans le plan et être capable de répondre à quelques questions élémentaires au niveau du plan. Sans cela il s'agit d'un "bluff" que le jury ne manquera pas de sanctionner.

Il est par exemple bon de parler de loi de réciprocité quadratique à propos des corps finis ; mais il faut alors bien connaître le théorème, ses motivations, et être capable de discuter une équation du second degré dans un corps fini. Si l'on parle de SL $(2 ; \mathbb{R})$ opérant sur le demi-plan de Poincaré, il faut connaître l'interprétation gémétrique de cette opération et ne pas paraître frappé de stupeur si le jury fait allusion à une relation possible avec les géométries non euclidiennes.

3.2.-3) Le plan doit être un exercice de composition personnelle : il y a trop de plans directement empruntés à des manuels ou appris par coeur dans le cadre d'une préparation, mais non assimilés.

Pour éviter une fâcheuse tendance au "bachotage" et à la sclérose sur certains sujets, le jury a augmenté cette année la proportion de "leçons d'exemples". Cette démarche sera maintenue l'an prochain. Signalons à ce propos qu'il faut éviter de s'en tenir à des exemples "standard".

3.2.-4) Le plan doit mettre l'accent sur les divers aspects du sujet évoqué par le titre, dont les termes et la formulation doivent être soigneusement pesés. Des leçons qui peuvent paraître à première vue assez voisines exigent des plans différents. Par ailleurs les candidats doivent veiller à développer complètement le sujet : par exemple la leçon "Corps des fractions rationnelles à une indéterminée. Décomposition en éléments simples et applications" ne doit pas se limiter à l'étude de la décomposition (penser aux automorphismes, au théorème de Lüroth...).

Les définitions et résultats fondamentaux doivent être nettement dégagés et clairement énoncés. C'est ainsi que les questions d'unicité sont trop souvent présentées de manière floue.

Le plan devrait être exposé sans effacer le tableau et de préférence sans recopier des notes (auxquelles il est naturellement utile de pouvoir se reporter).

3.5. Commentaires sur quelques sujets

3.5.1. Problèmes de dénombrement :

Un effort d'originalité serait apprécié au niveau des exemples et des applications : calculs autour des groupes finis, formules d'inversion de Möbius...

3.5.2. Groupes :

- Il faudrait savoir calculer, notamment en géométrie, les conjugués d'éléments remarquables.

- Il faut connaître les propriétés topologiques simples des groupes classiques.

- Une bonne connaissance du groupe de permutations S_4 et de ses diverses réalisations peut être très utile.

- Il est inadmissible de ne pas savoir trouver les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}$.

- Une meilleure connaissance des groupes symétriques (classes de conjugaison...) est souhaitable.

- Les candidats devraient connaître un exemple non trivial de groupes d'automorphismes d'une figure simple (cube,...). Plus généralement, les leçons sur les groupes pourraient soutenir plus d'exemples et d'applications provenant de la géométrie.

3.5.3 Corps :

- Il faut préciser avec soin les hypothèses nécessaires à certains énoncés.

- Il est fort utile de bien connaître les corps finis qui peuvent intervenir comme exemples dans des contextes variés (algèbre linéaire, formes quadratiques, groupes, polynômes...).

- Ne pas dire : le Polynôme P a toutes "ses" racines dans tel corps.

- Il faut éviter de parler de groupe de Galois sans rien connaître de celui d'une équation du troisième degré sur $\mathbb{Q}$.

3.5.4. Anneaux :

Les connaissances des candidats restent trop formelles et abstraites. Les notions introduites doivent être illustrées d'exemples et applications qui abondent en arithmétique, géométrie, analyse. Les candidats devraient savoir résoudre sans problème des exercices élémentaires : étude des idéaux premiers de $\mathbb{Z}\,[X]$,......

3.6. Liste des exposés d'algèbre linéaire et de géométrie

1. - Problèmes de dénombrement. Exemples.
2. - Exemples et applications de la notion de structure algébrique quotient.
3. - Groupes abéliens finis.
4. - Groupes abéliens de type fini ; sous-groupes de Z^n.
5. - Exemples et utilisations de la notion de sous-groupe distingué.
6. - Parties génératrices d'un groupe ; exemples ; applications à la Géométrie.
7. - Groupes finis ; exemples.
8. - Groupes finis d'automorphismes ; exemples tirés de la Géométrie ou de l'Algèbre.
9. - Groupes opérant sur un ensemble. Applications.
10. - Groupe de permutations d'un ensemble fini. Application.
11. - Idéaux d'un anneau unitaire. Anneaux quotients. Exemples.
12. - Etude de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Eléments inversibles. Indicateur d'Euler.
13. - Anneaux euclidiens. Anneaux des entiers de Gauss.
14. - Anneaux principaux. Exemples et applications.
15. - Anneaux factoriels. Exemples et applications.
16. - $\mathbb{Z}$.
17. - Corps. Exemples.
18. - Corps de rupture d'un polynôme irréductible. Construction de corps finis.
19. - Quaternions.
20. - Construction du corps des nombres complexes. Groupe multiplicatif. Théorème de d'Alembert-Gauss.
21. - Applications des nombres complexes à l'Algèbre et à la Géométrie.
22. - Racines de l'unité dans un corps computatif.
23. - Propriétés et applications de l'algèbre des polynômes à n indéterminées.
24. - Racines des polynômes à une indéterminée. Résultant de deux polynômes. Discriminant.
25. - Polynômes irréductibles.
26. - Polynômes symétriques. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.
27. - Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Décomposition en éléments simples et applications.
28. - Dimension des espaces vectoriels dans le cas fini.
29. - Endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie.
30. - Groupe linéaire en dimension finie.
31. - Sous-groupes du groupe linéaire.
32. - La dualité ; diverses applications.
33. - Rang d'une application linéaire et d'une matrice. Equations linéaires.
34. - Matrices.
35. - Applications multilinéaires alternées. Déterminants.
36. - Exemples de déterminants. Applications.
37. - Sous-espaces propres, sous-espaces vectoriels stables pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
38. - Réduction de Jordan ; applications.
39. - Polynôme minimal. Polynôme caractéristique.
40. - Formes bilinéaires symétriques ; formes alternées.
41. - Orthogonalité, isotropie pour une forme bilinéaire symétrique.
42. - Décomposition en carrés d'une forme quadratique.
43. - Groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée.

4. BIBLIOTHÈQUE DE L'AGRÉGATION

Les candidats étaient autorisés à apporter tout livre vendu dans le commerce (à l'exclusion des textes dactylographiés ou ronéotypés) et dépourvu de notes manuscrites.

Ils pouvaient en outre consulter sur place les ouvrages suivants:

ARTIN	*Algèbre géométrique* (Gauthier-Villars)
BASS	*Cours de Mathématiques* (Masson) tomes 1 et 2
BERGER	*Géométrie* (Nathan) : index, tomes 1 à 5
BERGER et GOSTIAUX	*Géométrie différentielle* (Colin)
BLANCHARD	*Corps non commutatifs* (Presses Universitaires)
BOURBAKI	Les tomes suivants :
	Théorie des ensembles
	Algèbre
	Fonctions d'une variable réelle
	Topologie générale
	Espaces vectoriels topologiques
	Intégration
BOUVIER et RICHARD	*Groupes* (Hermann)
BROUSSE	*Mécanique* (Colin)
CABANNES H.	*Cours de mécanique générale* (Dunod)
CAGNAC, RAMIS et COMMEAU	*Nouveau cours de Mathématiques spéciales* (Masson)
CAGNAC et THIBERGE	*Géométrie, classes terminales C* (Masson)
CARTAN	*Fonctions analytiques* (Hermann)
	Formes différentielles (Hermann)
	Calcul différentiel (Hermann)
CHAMBADAL et OVAERT	*Cours de mathématiques* (Gauthier Villars) (tome I - tome 2 : algèbre et analyse)
	Algèbre linéaire et algèbre tensorielle (Dunod)
CHOQUET	*Cours d'analyse* (Masson)
	L'enseignement de la géométrie (Hermann)
COUTY	*Analyse* (Colin)
DIEUDONNE	*Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (Hermann).
	Sur les groupes classiques (Hermann)
	Calcul infinitésimal (Hermann)
	Eléments d'analyses (Gauthier Villars) tomes 1 et 2
DIXMIER	*Analyse M.P.* (Gauthier Villars)
DUBREUIL (M. et Mme)	*Leçons d'algèbre moderne* (Dunod)
DUBUC	*Géométrie plane* (Presses Universitaires)
EXBRAYAT et MAZET	*Algèbre, Analyse, Topologie.*
FELLER	*An introduction to probability theory an its applications* (Viley) tomes 1 et 2
FLORY	Exercices: *topologie et analyse.* Tomes 1,2,3,4, (Vuibert)