

ministère de l'éducation nationale

10980  
Doc.  
AGREGATION  
1983

---

direction des personnels enseignants à gestion  
nationale des lycées et collèges

# Agrégation mathématiques

Université de Nancy I  
BIBLIOTHÈQUE  
I.E.C.N. Mathématiques

*Rapport présenté par Monsieur NICOLAS  
Professeur à l'université de Limoges  
Président du jury*

**1983**

# présentation

## 1. COMPOSITION DU JURY

M.	NICOLAS Jean-Louis	<i>Professeur à l'université de Limoges, président</i>
M.	VELU Jacques	<i>Professeur au C.N.A.M. à Paris, vice-président</i>
M.	ANDLER Martin	<i>Attaché de recherche au C.N.R.S.</i>
M.	BERARD Pierre	<i>Professeur à l'université de la Savoie</i>
M.	BERARD-BERGERY Lionel	<i>Professeur à l'université de Nancy I</i>
M.	BREZINSKI Claude	<i>Professeur à l'université de Lille I</i>
M.	DABLANC Jacques	<i>Inspecteur général de l'Éducation nationale</i>
M.	DELAHAYE Jean-Paul	<i>Assistant à l'université de Lille I</i>
M.	FEVRIER Pierre	<i>Professeur au lycée de Fontainebleau</i>
M.	GERMAIN-BONNE Bernard	<i>Maître assistant à l'université de Lille I</i>
M.	LAVIGNE Jean-Pierre	<i>Maître assistant à l'université de Nancy I</i>
M.	LEDRAPPIER François	<i>Chargé de recherche au C.N.R.S.</i>
M.	LEGRAND Pierre	<i>Inspecteur général de l'Éducation nationale</i>
M.	LEMAIRE Jean-Michel	<i>Professeur à l'université de Nice</i>
M.	LÉPINGLE Dominique	<i>Professeur à l'université d'Orléans</i>
Mme	LEVY-BRUHL Anne	<i>Maître assistante à l'université de Paris VI</i>
Mme	LOSCO Lucette	<i>Professeur à l'université de Besançon</i>
M.	MAILLARD Bénédicte	<i>Assistant à l'université de Paris VII</i>
M.	MANTIN Gérard	<i>Professeur au lycée Fénelon à Paris</i>
M.	MARLE Charles	<i>Professeur à l'université P. et M. Curie à Paris VI</i>
M.	MOLLIER Daniel	<i>Professeur au lycée Louis le Grand à Paris</i>
M.	MONASSE Denis	<i>Professeur au lycée Louis le Grand à Paris</i>
Mme	PERY Marie-Hélène	<i>Professeur au lycée Pasteur à Paris</i>
M.	RAMIS Jean-Pierre	<i>Professeur à l'université de Strasbourg I</i>
M.	RANDÉ Bernard	<i>Professeur au lycée Louis le Grand à Paris</i>
Mme	RAOULT Anne	<i>Professeur au lycée Condorcet à Paris</i>
M.	RAYMOND Bernard	<i>Professeur au lycée Faidherbe à Lille</i>
M.	ROUSSIGNOL Michel	<i>Maître assistant à l'université de Paris VI</i>
M.	ROUVIERE François	<i>Professeur à l'université de Nice</i>
M.	SCHIFFMANN Gérard	<i>Professeur à l'université de Strasbourg I</i>
M.	SCHREIBER Jean-Pierre	<i>Professeur à l'université d'Orléans</i>
M.	SPECTOR René	<i>Professeur à l'université d'Orléans</i>
M.	VAN DER OORD Eric	<i>Professeur au lycée Chateaubriand à Rennes</i>
Mme	VAN ISEGNEM Jeannette	<i>Assistante agrégée à l'université de Lille I</i>
M.	VANDECASTEELE Patrick	<i>Professeur au lycée Faidherbe à Lille</i>
M.	VIAL Jean-Pierre	<i>Professeur au lycée Charlemagne à Paris</i>

## 2. CALENDRIER DES ÉPREUVES

### 2.1. Épreuves écrites

- Elles ont eu lieu dans les divers centres aux dates suivantes :  
 Mathématiques générales : 2 mai de 8 à 14 heures  
 Analyse : 3 mai de 8 à 14 heures  
 Mathématiques appliquées : 5 mai de 8 à 14 heures
- La liste d'admissibilité a été affichée le 8 juin au lycée Montaigne et 34, rue de Châteaudun à Paris.

### 2.2. Épreuves orales

Elles se sont déroulées du 14 juin au 9 juillet au lycée Montaigne à Paris.  
 La liste d'admission a été affichée le 11 juillet au lycée Montaigne et 34, rue de Châteaudun à Paris.

## 3. STATISTIQUES DIVERSES

### 3.1. Résultats généraux

Postes mis au concours .....	130
Candidats inscrits .....	1281
Candidats présents à l'épreuve de mathématiques générales .....	922
Candidats présents à l'épreuve d'analyse .....	870
Candidats présents à l'épreuve de mathématiques appliquées .....	819
Admissibles .....	276
Admis .....	130
Proposés pour l'équivalence des épreuves théoriques du Capes ..	6
Liste supplémentaire .....	9

Moyenne sur 20 des points obtenus par :

Le premier admissible .....	19,25
Le dernier admissible .....	6,25
Le premier agrégé .....	18,3
Le dernier agrégé .....	9

### 3.2. Répartition des notes d'écrit

Le tableau ci-dessous indique le nombre N(m) des candidats ayant obtenu aux épreuves écrites une moyenne sur 20, supérieure (au sens large) à m.

m	17,5	15	12,5	10	9	8	7	6,25
N(m)	7	18	58	126	162	204	241	276

m	6	5	4	3	2
N(m)	292	353	421	485	555

### 3.3. Répartition entre les options

	ANALYSE NUMÉRIQUE	MÉCANIQUE	PROBABILITÉS
Inscrits	603	126	552
Présents	392	81	346
Admissibles	139	23	114
Admis	60	6	64

### 3.4. Situation universitaire des candidats

Dans le tableau suivant, les notations U, J, C, F, T correspondent aux candidats des E.N.S. ULM, JORDAN, ST-CLOUD, FONTENAY et ENSET.

Les autres abréviations sont les suivantes :

E .....	Étudiants
C.P.R. ....	Stagiaires de C.P.R.
B.A. ....	Professeurs bi-admissibles
P.C. ....	Certifiés ; certifiés stagiaires
A. ....	Assistants
CO .....	Coopérants ou détachés
S.N. ....	Professeurs au service militaire, en congé, en sursis, en disponibilité
D .....	A.E., P.E.G.C., Instituteurs, M.I.-S.E., Professeurs L.T., Divers
M.A. ....	Maîtres auxiliaires
P .....	Enseignement privé
I .....	Ingénieurs

CANDIDATS	U	J	C	F	T	E	C.P.R.	B.A.	PC
Inscrits	21	17	17	31	27	119	84	52	460
Admissibles	20	17	14	29	24	18	17	26	51
Admis	18	14	11	20	17	8	6	9	9

CANDIDATS	A	CO	S.N.	M.A.	P	D	I	TOTAL
Inscrits	16	86	52	139	63	89	8	1 281
Admissibles	5	10	26	2	13	4	0	276
Admis	2	1	12	0	1	2	0	130

### 3.5. Répartition entre candidats et candidates

	CANDIDATS	CANDIDATES
Inscrits	881	400
Admissibles	190	86
Admis	79	51

### 3.6. Répartition suivant les centres d'écrit

CENTRES	CANDIDATS	INSCRITS	AYANT COMPOSÉ AUX TROIS ÉPREUVES	ADMISSIBLES	ADMIS
Aix-Marseille		43	27	5	2
Amiens		37	21	3	0
Besançon		17	12	1	0
Bordeaux-Pau		23	14	1	0
Caen		19	11	2	1
Clermont-Ferrand		9	6	0	0
Dijon		20	9	6	4
Grenoble		41	26	8	1
Lille		112	76	13	2
Limoges		7	2	0	0
Lyon-St-Étienne		50	32	7	4
Montpellier		34	19	3	0
Nancy-Metz		39	24	5	1
Nantes		38	26	3	1
Nice		20	14	4	0
Orléans-Tours		26	18	2	0
Paris		382	258	160	101
Poitiers		14	10	0	0
Reims		20	16	5	1
Rennes-Brest		30	20	8	2
Rouen		64	44	6	2
Strasbourg-Mulhouse		35	27	4	0
Toulouse		43	18	2	0
Corse		3	1	1	0
Autres centres		155	92	27	8

# écrit

## MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

---

*Les parties II et III du problème sont indépendantes*

On désigne par  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension finie, le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  étant noté  $(x|y)$ . Si  $x$  est un élément non nul de  $E$ , on note  $H_x$  l'hyperplan orthogonal à  $x$  et  $w_x$  la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan  $H_x$ . On appelle partie radicielle de  $E$  toute partie  $R$  de  $E$  vérifiant :

- (i)  $R$  est finie, engendre  $E$  et ne contient pas  $0$
- (ii)  $\forall r \in R \quad w_r(R) \subset R$
- (iii)  $\forall r \in R \quad \forall \lambda \in R \quad (\lambda r \in R \Rightarrow \lambda = \pm 1.)$

On se fixe par la suite une telle partie radicielle de  $E$ . On note  $\mathcal{H} = \{H_r \mid r \in R\}$  et  $W$  le sous-groupe du groupe orthogonal de  $E$  engendré par les  $w_r$  pour  $r$  parcourant  $R$ .  $E$  est muni de sa topologie naturelle.

### PARTIE I

I.1. Montrer que  $W$  est fini. Son cardinal sera noté par la suite  $|W|$ .

I.2. Soit  $E' = E \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ . Soit  $x$  un élément de  $E'$ . Rappeler pourquoi il existe une partie connexe maximale de  $E'$  contenant  $x$  (composante connexe de  $x$  dans  $E'$ ). Une telle partie sera appelée une chambre (relativement à  $R$ ). Montrer que deux chambres distinctes sont disjointes.

I.3. Montrer que la chambre contenant le vecteur  $x$  de  $E'$  est l'intersection des demi-espaces ouverts délimités par les hyperplans de  $\mathcal{H}$  et qui contiennent  $x$ .

I.4. Soit  $C$  une chambre. On dit qu'un hyperplan  $H \in \mathcal{H}$  est un mur de  $C$  si l'adhérence  $\bar{C}$  de  $C$  contient un ouvert de  $H$ . Montrer que tout hyperplan  $H$  de  $\mathcal{H}$  est mur d'au moins une chambre.

Dans toute la suite du problème on se fixe une chambre  $C$  dont on note les murs  $H_1, \dots, H_l$ . Pour  $i \in \{1, \dots, l\}$ , on désigne par  $w_i$  la symétrie orthogonale par rapport à  $H_i$ . Soit  $W'$  le sous-groupe de  $W$  engendré par  $w_1, \dots, w_l$ .

I.5.a. Soit  $b \in E'$ . On suppose que  $b$  est du même côté que  $C$  par rapport à tout mur de  $C$ . Montrer que  $b$  appartient à  $C$ .

I.5.b. Soit  $C'$  une chambre. Montrer qu'il existe  $w \in W'$  tel que  $w(C') = C$  (Indication : on se fixe  $a \in C$  et  $a' \in C'$ . Considérer  $\inf_{w \in W'} d(a, w(a'))$ ).

I.5.c. En déduire, en utilisant I.4., que  $W' = W$ .

I.6.a. Soit  $x \in C$ . On note  $R^+$  l'ensemble des  $r \in R$  tels que  $(x | r) > 0$  et  $R^-$  l'ensemble des  $r \in R$  tels que  $(x | r) < 0$ . Montrer que la partition de  $R$  en  $R^+$  et  $R^-$  ne dépend pas du choix de  $x$  dans  $C$ . Les éléments de  $R^+$  seront dits positifs, ceux de  $R^-$  négatifs.

Si  $w$  appartient à  $W$ , on note  $n(w)$  le cardinal de l'ensemble  $\{r \in R^+ | w(r) \in R^-\}$ . Pour  $i \in \{1, \dots, l\}$ , on désigne par  $s_i$  l'élément de  $R^+$  orthogonal à  $H_i$ . Soit  $\Pi = \{s_1, \dots, s_l\}$ . On définit d'autre part une application, dite longueur, de  $W$  dans l'ensemble des entiers naturels de la manière suivante : on pose  $l(\text{Id}) = 0$  et si  $w \in W \setminus \{\text{Id}\}$ ,  $l(w)$  est le plus petit entier  $k$  tel qu'il existe  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, l\}$  tels que l'on ait :

$$w = w_{i_1} \dots w_{i_k}.$$

I.6.b. Soit  $H$  un mur de  $C$  et  $r$  l'élément de  $R^+$  orthogonal à  $H$ . On considère  $H'$  un hyperplan appartenant à  $\mathcal{H}$ , distinct de  $H$ . Montrer que  $C$  et  $w_r(C)$  sont d'un même côté de  $H'$  (Indication : on pourra utiliser une boule centrée sur  $H$  et ne rencontrant pas  $H'$ ).

En déduire que  $w_r(r') \in R^+$  pour tout  $r' \in R^+$  distinct de  $r$ .

I.6.c. Montrer :  $\forall w \in W \quad \forall r \in \Pi \quad n(w w_r) = n(w) + \varepsilon_{r, w}$  avec :  
 $\varepsilon_{r, w} = +1$  si  $w(r) \in R^+$  et  $\varepsilon_{r, w} = -1$  si  $w(r) \in R^-$ . En déduire :  $\forall w \in W \quad n(w) \leq l(w)$ .

I.6.d. Soit  $w \in W$  et soit  $w = w_{r_1} \dots w_{r_k}$  une décomposition de  $w$  avec :  $\forall i \in \{1, \dots, k\} \quad r_i \in \Pi$ . On suppose  $k > n(w)$ . Montrer qu'il existe un indice  $j \in \{1, \dots, k-1\}$  tel que  $w_{r_1} \dots w_{r_j}(r_{j+1}) \in R^-$ , puis qu'il existe un indice  $i \in \{1, \dots, j\}$  tel que  $w_{r_i} \dots w_{r_j}(r_{j+1}) \in R^-$  et  $w_{r_{i+1}} \dots w_{r_j}(r_{j+1}) \in R^+$ . En déduire que :  $w_{r_{i+1}} \dots w_{r_{j+1}} = w_{r_i} \dots w_{r_j}$ , puis que  $l(w) < k$ .

I.6.e. Montrer que :  $\forall w \in W \quad n(w) = l(w)$ .

I.7. Montrer que si  $w \in W$  vérifie  $w(C) = C$ , alors  $w = \text{Id}_E$ .

## PARTIE II

II.1. Soit  $x$  un élément non nul de  $E$  et  $y \in E$ . Montrer

$$w_x(y) = y - \frac{2(x|y)}{(x|x)}x.$$

II.2.a. Montrer :  $\forall r \in R \quad \exists w \in W \quad \exists s \in \Pi \quad r = w(s)$ .

II.2.b. Montrer que le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $\Pi$  est stable par  $W$  et en déduire que  $\Pi$  est une partie génératrice de  $E$ .

II.3. Soient  $r_1$  et  $r_2$  deux éléments distincts de  $\Pi$ .

II.3.a. Montrer, pour  $i \in \{1, 2\}$  l'existence d'un élément  $b_i$  de  $\bar{C} \cap H_{r_i}$  tel que  $b_i$  n'appartienne à aucun hyperplan  $H \in \mathcal{H} \setminus \{H_{r_i}\}$ .

II.3.b.  $b_1$  et  $b_2$  étant ainsi choisis, montrer que tout point du segment  $[b_1, b_2]$  distinct de  $b_1$  et  $b_2$  appartient à  $C$ .

II.3.c. Soit  $L$  un hyperplan de  $E$  contenant l'intersection  $H_{r_1} \cap H_{r_2}$ . On suppose que  $L$  contient un élément  $x$  vérifiant :  $(x | r_1) > 0$  et  $(x | r_2) > 0$ . Montrer que  $L$  rencontre  $C$  (on pourra prendre un vecteur  $v \in L^\perp \setminus \{0\}$  et considérer les signes de  $(v | b_1)$  et  $(v | b_2)$ ).

II.3.d. En considérant l'hyperplan  $L = w_{r_2}(H_{r_1})$  montrer que  $(r_1 | r_2) \leq 0$ .

II.4. Montrer que  $\Pi$  est une base de  $E$  (dans une relation de dépendance linéaire entre les  $s_i$  on pourra séparer les coefficients positifs et les coefficients négatifs).

II.5. Soit  $R^{++}$  l'ensemble des éléments de  $R$  dont toutes les coordonnées dans la base  $\Pi$  sont positives ou nulles. On fait l'hypothèse suivante :  $R^{++} \neq R^+$ . Si  $r$  appartient à  $R^+ \setminus R^{++}$ , on note  $\theta(r)$  la somme des coordonnées de  $r$  dans la base  $\Pi$  et on choisit  $r_0$  dans  $R^+ \setminus R^{++}$  vérifiant :  $\forall r \in R^+ \setminus R^{++} \quad \theta(r_0) \leq \theta(r)$ .

On pose

$$r_0 = \sum_{i=1}^l \lambda_i s_i.$$

II.5.a. Soit  $i \in \{1, \dots, l\}$  tel que  $\lambda_i \geq 0$ . En considérant  $w_{s_i}(r_0)$  montrer que  $(r_0 | s_i) \leq 0$ .

II.5.b. Soit  $v = \sum_i \lambda_i s_i$  la somme étant prise sur les indices  $i$  pour lesquels  $\lambda_i \geq 0$ . Montrer :  $(v | v) \leq 0$  et en conclure que l'hypothèse faite était absurde et que donc  $R^+ = R^{++}$ .

Soit  $J$  une partie de  $\Pi$ . Soit  $E_J$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $J$ , soit  $R_J = R \cap E_J$ ,  $W_J$  le sous-groupe de  $W$  engendré par  $\{w_r | r \in J\}$  et  $C_J = \{x \in E_J | \forall r \in J \quad (r | x) > 0\}$ .

II.6. Montrer que  $R_J$  est un système radiciel dans  $E_J$ , que  $C_J$  en est une chambre et que les murs de  $C_J$  sont les  $H_r \cap E_J$  pour  $r$  parcourant  $J$ . En déduire que le groupe associé à ce système radiciel est isomorphe à  $W_J$ .

II.7. Soit  $D_J = \{w \in W | \forall r \in J \quad w(r) \in R^+\}$ . Montrer que pour tout élément  $w$  de  $W$  il existe un unique couple  $(d_J, w_J) \in D_J \times W_J$  tel que  $w = d_J w_J$ . Montrer de plus que  $l(w) = l(d_J) + l(w_J)$ .

II.8. Soit  $K_J = \{v \in E_J^\perp | \forall r \in \Pi \setminus J \quad (v | r) > 0\}$ .



II.8.a. Montrer que  $K_J$  n'est pas vide.

II.8.b. Montrer que  $K_J$  est contenu dans l'adhérence de la chambre  $C$ .

II.8.c. Soient  $J$  et  $J'$  deux parties de  $\Pi$ . On suppose qu'il existe  $w \in W$  vérifiant  $w(K_J) \cap K_{J'} \neq \emptyset$ . Montrer que  $J = J'$ .

II.9. Montrer :  $W_J = \{ w \in W \mid w(K_J) \subset K_J \} = \{ w \in W \mid \forall x \in K_J \quad w(x) = x \}$ .

II.10. Soit  $x$  un élément de  $E$ . Montrer qu'il existe une unique partie  $J$  de  $\Pi$  vérifiant : il existe  $w \in W$  tel que  $w(x) \in K_J$ .

### PARTIE III

Soit  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_l)$  une base de  $E$ . Une application  $f$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  est dite polynomiale s'il existe

$$P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_l]$$

tel que  $\forall (x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^l \quad f(x_1 e_1 + \dots + x_l e_l) = P(x_1, \dots, x_l)$ . Il est clair que cette définition est en fait indépendante de la base choisie, de même que le degré de  $P$  (qui sera donc appelé degré de  $f$ ) ou que le fait que le polynôme  $P$  soit homogène (on dira alors que  $f$  est homogène). Les applications polynomiales forment une sous-algèbre de l'algèbre des applications de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ . Cette sous-algèbre sera notée  $S$ ; elle est isomorphe à  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_l]$ . Soit  $S^+ = \{ f \in S \mid f(0) = 0 \}$ .

On fait agir  $W$  sur  $S$  en posant :  $\forall w \in W, \forall p \in S, \forall x \in E, \quad w(p)(x) = p(w^{-1}(x))$ . Soit  $I$  la sous- $\mathbb{R}$ -algèbre de  $S$  des éléments invariants par  $W$  :  $I = \{ p \in S \mid \forall w \in W \quad w(p) = p \}$ . Soit  $I^+ = S^+ \cap I$  et soit  $SI^+$  l'idéal de  $S$  engendré par  $I^+$ . Si  $p \in S$ , on pose

$$m(p) = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} w(p).$$

III.1. Montrer que si  $p$  appartient à  $S$  alors  $m(p)$  appartient à  $I$  et que si  $p$  appartient à  $S^+$  alors  $m(p)$  appartient à  $I^+$ .

III.2. Montrer qu'il existe une partie finie de  $I$  formée de fonctions polynomiales homogènes et engendrant l'idéal  $SI^+$  (on admettra que  $S$  vérifie la propriété suivante : Soit  $J$  un idéal de  $S$  et  $G$  une partie génératrice de  $J$  alors  $G$  contient une partie finie génératrice de  $J$ ). On se fixe une telle partie  $\{ I_1, \dots, I_s \}$ , que l'on suppose de plus minimale pour cette propriété. On pose  $d_i = \deg(I_i)$  pour  $i$  variant de 1 à  $s$ .

III.3. Montrer :  $\forall f \in I \quad \exists P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_s] \quad f = P(I_1, \dots, I_s)$ . (On se ramènera à montrer le résultat pour  $f$  homogène et on fera une récurrence sur le degré de  $f$ .)

III.4. Soient  $f_1, \dots, f_k$  des éléments de  $I$  tels que  $f_1$  n'est pas dans l'idéal de  $I$  engendré par  $f_2, \dots, f_k$ . Soient  $p_1, \dots, p_k$  des éléments homogènes de  $S$ . On cherche à démontrer par récurrence sur le degré  $p_1$  la propriété suivante :

$$p_1 f_1 + \dots + p_k f_k = 0 \Rightarrow p_1 \in SI^+.$$

III.4.a. Montrer que  $f_1$  n'est pas dans l'idéal de  $S$  engendré par  $f_2, \dots, f_k$  et conclure dans le cas où  $p_1$  est constant.

III.4.b. On suppose désormais  $\deg(p_1) > 0$ . Soit  $r \in R$  et  $h_r$  l'élément de  $S$  défini par :  $\forall x \in E$   $h_r(x) = (r|x)$ . Montrer que  $h_r$  divise dans  $S$   $w_r(p_i) - p_i$  pour  $i$  variant de 1 à  $k$ . On posera

$$w_r(p_i) - p_i = h_r q_i.$$

III.4.c. Montrer  $q_1 f_1 + \dots + q_k f_k = 0$ .

III.4.d. En utilisant l'hypothèse de récurrence, montrer que :

$\forall w \in W$   $w(p_1) - p_1 \in SI^+$  et en déduire que  $p_1$  appartient à  $SI^+$ .

III.5. Soit :

$$d \in \mathbb{N}, P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_s] \quad P = \sum_{(k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^s} a_{k_1, \dots, k_s} X_1^{k_1} \dots X_s^{k_s}.$$

On suppose vérifiées les trois conditions :

(a)  $P \neq 0$ ; (b)  $P(I_1, \dots, I_s) = 0$ ; (c) si  $a_{k_1, \dots, k_s}$  est non nul, alors  $k_1 d_1 + \dots + k_s d_s$  est égal à  $d$ . Pour  $i = 1, \dots, s$  soit  $p_i = \frac{\partial P}{\partial X_i}(I_1, \dots, I_s)$ . Soit  $K$  l'idéal de  $I$  engendré par  $\{p_1, \dots, p_m\}$  et on suppose les notations choisies de telle manière que  $\{p_1, \dots, p_m\}$  soit une partie génératrice minimale de cet idéal.

III.5.a. Montrer que les applications polynomiales  $p_i$  sont homogènes.

III.5.b. Montrer qu'il existe pour  $i > m$  et  $1 \leq j \leq m$  des applications polynomiales  $q_{i,j}$  homogènes de degré  $\deg(I_j) - \deg(I_i)$  telles que :

$$\forall i > m \quad p_i = \sum_{j=1}^m q_{i,j} p_j.$$

III.5.c. On se fixe une base  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_l)$  de  $E$  et si  $f$  est élément de  $S$  on note  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  la  $k$ -ième dérivée partielle de l'application  $(x_1, \dots, x_l) \mapsto f(x_1 e_1 + \dots + x_l e_l)$ .

Montrer pour  $k = 1, \dots, l$

$$\sum_{i=1}^m p_i \left( \frac{\partial I_i}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^s q_{j,i} \frac{\partial I_j}{\partial x_k} \right) = 0$$

et en déduire :

$$\forall k \in \{1, \dots, l\} \quad \frac{\partial I_1}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^s q_{j,1} \frac{\partial I_j}{\partial x_k} \in SI^+$$

III.5.d. Montrer : il existe des éléments  $R_1, \dots, R_s$  de  $S^+$  tels que

$$d_1 I_1 + \sum_{j=m+1}^s d_j q_{j,1} I_j = \sum_{i=1}^s I_i R_i.$$

III.5.e. Montrer que ceci contredit la définition de  $I_1, \dots, I_s$ .

III.6. Soit  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_s]$  tel que  $P(I_1, \dots, I_s) = 0$ . Montrer que  $P = 0$  (c'est-à-dire que  $I$  est isomorphe à  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_s]$ ).

III.7. Soit  $I'_1, \dots, I'_t$  une autre partie finie de  $I$  formée de fonctions polynomiales homogènes, engendrant l'idéal  $SI^+$  et minimale pour cette propriété. Montrer que  $s = t$ .

#### PARTIE IV

Soit  $N$  le cardinal de  $R^+$ .

IV.1. Montrer qu'il existe un unique élément  $w_0$  de  $W$  de longueur  $N$  et que :  $\forall w \in W \quad l(w) \leq N$ .

A toute partie  $J$  de  $\Pi$  on associe les deux polynômes :

$$P_J(t) = \sum_{w \in W_J} t^{l(w)} \quad \text{et} \quad T_J(t) = \sum_{w \in D_J} t^{l(w)} \quad (D_J \text{ est défini en II.7})$$

IV.2. Montrer :  $P_\Pi(t) = P_J(t) T_J(t)$  et en déduire : ( $|J|$  désignant le cardinal de la partie  $J$ )

$$\sum_{J \subset \Pi} (-1)^{|J|} \frac{P_\Pi(t)}{P_J(t)} = t^N.$$

IV.3. Soit  $F$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{H}$  une famille finie d'hyperplans de  $F$ . On introduit sur  $F$  la relation d'équivalence suivante :  $x \mathcal{R} y$  signifie : pour tout hyperplan  $H$  de  $\mathcal{H}$ , ou bien  $x$  et  $y$  sont tous deux sur  $H$ , ou bien  $x$  et  $y$  appartiennent à un même demi-espace ouvert limité par  $H$ . Pour  $i$  entier naturel on désigne par  $n_i$  le nombre de classes d'équivalence engendrant dans  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension  $i$ . Montrer que :

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i n_i = (-1)^{\dim F}$$

(On pourra faire une récurrence sur le nombre d'hyperplans).

Si  $J$  est une partie de  $\Pi$  et  $w$  un élément de  $W$ , on note  $n_J(w)$  le nombre de classes à gauche  $vW_J$  dans  $W$  telles que  $wvW_J = vW_J$ .

IV.4.a. Soit  $v$  un élément de  $W$ . Montrer que  $wvW_J = vW_J$  si et seulement si  $wv(K_J) = v(K_J)$  (cf notations de II.8.) et que dans ce cas  $v(K_J)$  est contenu dans  $\text{Ker}(w - \text{Id}_E)$ .

IV.4.b. En appliquant les résultats de la question IV.3 à  $F = \text{Ker}(w - \text{Id}_E)$  montrer que :

$$\sum_{J \subset \Pi} (-1)^{|J|} n_J(w) = \det(w).$$

IV.5. Soit  $f$  un élément de  $S$  vérifiant :  $\forall w \in W \quad w(f) = \det(w)f$ . Montrer qu'il existe un élément  $p$  de  $I$  tel que

$$f = p \prod_{r \in R^+} h_r$$

(se reporter à III.4 pour la signification de  $h_r$ ).

Soit  $S_n$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales homogènes de degré  $n$ , soit

$$I_n = I \cap S_n, \quad A_n = \{f \in S_n \mid \forall w \in W \quad w(f) = \det(w)f\}$$

Soit  $U_n$  l'application linéaire de  $S_n$  dans  $S_n$  définie par : (cf III)  $U_n(f) = m(f)$ . Pour un élément  $w$  de  $W$  on désigne par  $\chi_n(w)$  la trace de l'application linéaire  $f \mapsto w(f)$  de  $S_n$  dans  $S_n$ .

IV.6. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dim A_n = \dim I_{n-N}$  ( $= 0$  si  $n < N$ ) et  $\dim I_n = \text{tr}(U_n)$ .

IV.7. Montrer :

$$\forall w \in W \quad \sum_{v \in W, v w v^{-1} \in W_J} \chi_n(v w v^{-1}) = \chi_n(w) n_J(w) |W_J|$$

et en déduire

$$\sum_{J \subset \Pi} \frac{(-1)^{|J|}}{|W_J|} \sum_{v \in W, v w v^{-1} \in W_J} \chi_n(v w v^{-1}) = \chi_n(w) \det(w).$$

IV.8. En sommant l'identité précédente sur  $w \in W$ , montrer que :

$$\sum_{J \subset \Pi} (-1)^{|J|} \dim(I_{J,n}) = \dim A_n.$$

où

$$I_{J,n} = \{f \in S_n \mid \forall w \in W_J \quad w(f) = f\}.$$

IV.9. Soient  $d_1, \dots, d_s$  les entiers naturels définis en III.2.

On définit le polynôme

$$Q(t) = \prod_{i=1}^s \left( \frac{t^{d_i} - 1}{t - 1} \right)$$

et de même à toute partie  $J$  de  $\Pi$  on associe un polynôme  $Q_J(t)$  défini de la même manière, mais pour le système radical  $R_J$  dans  $E_J$ .

IV.9.a. Montrer que le coefficient de  $t^n$  dans le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{(1-t)^s Q(t)}$$

est  $\dim(I_n)$ .

IV.9.b. On admettra à partir de maintenant que  $s = l$ . Montrer que :

$$\sum_{J \subset \Pi} (-1)^{|J|} \frac{Q_J(t)}{Q(t)} = t^N$$

IV.10.a. Soit  $J$  une partie de  $\Pi$  et  $w$  un élément de  $W_J$ . Montrer que la longueur de  $w$  est la même que l'on considère  $w$  comme élément du groupe  $W$  associé au système radical  $R$  ou du groupe  $W_J$  associé à  $R_J$ .

IV.10.b. Montrer que  $Q = P_\Pi$  (utiliser un raisonnement par récurrence).

## RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Cette année le problème de Mathématiques Générales proposait l'étude des fonctions polynômes invariantes par un groupe d'isométries engendré par des symétries orthogonales, suivant les méthodes développées par C. CHEVALLEY ("Invariants of finite groups generated by reflections", Amer. Journ. of Math., t. LXXVII (1955)) et L. SOLOMON ("Invariants of finite reflection groups", Nagoya Math. Journal, t. XXII (1963)).

Les parties I et II, consacrées à l'étude des groupes finis engendrés par des symétries, utilisaient principalement des méthodes géométriques et topologiques, tandis que les parties III et IV étaient de nature plus algébrique.

Malgré l'absence dans les parties I et II de questions réellement très difficiles, leur niveau assez soutenu et leur nature géométrique et topologique ont constitué un obstacle insurmontable pour bon nombre de candidats, ce qui explique l'abondance de notes faibles. L'absence de vision géométrique et l'imprécision des connaissances en Topologie expliquent pour une grande partie ces mauvais résultats.

Si le manque de connaissances en Géométrie a pour origine le peu d'intérêt rencontré dans l'enseignement secondaire et supérieur pendant un certain nombre d'années par cette partie essentielle des Mathématiques, on ne peut que s'étonner du peu de familiarité des candidats avec la Topologie la plus élémentaire, celle de  $R^n$ , qu'ils ont abordé déjà depuis quatre ans lorsqu'ils passent l'agrégation. Des erreurs grossières sont rencontrées dans la presque totalité des copies : c'est ainsi que 90 % de celles qui abordent la question I.3° prétendent que l'intersection de deux connexes est connexe ! On ne saurait trop conseiller aux candidats de réfléchir sur les notions les plus élémentaires de la Topologie et de la Géométrie de  $R^n$  (ouverts, fermés, connexes, convexes, compacts, sous-espaces, etc.) avant de s'intéresser aux "pathologies", particulièrement abondantes en Topologie.

## PARTIE I

La question I.1 est traitée correctement dans un très petit nombre de copies, les arguments se limitant en général à : "un groupe engendré par un nombre fini d'éléments d'ordre fini ne saurait être que fini" (avec parfois démonstration à l'appui !) ou bien : "on a un morphisme de  $W$  dans le groupe des permutations de  $R$ " (sans vérifier l'injectivité de ce morphisme). Les questions I.2 et I.3 sont particulièrement révélatrices de mauvaises connaissances en Topologie. Dans I.2, une grande partie des candidats utilisent sans nécessité le théorème de Zorn (et souvent sans en vérifier les hypothèses). Dans I.3, la convexité de chacun des demi-espaces n'est pas remarquée (elle seule permettait de faire un raisonnement correct).

Dans I.4, les démonstrations complètes sont rares, bien que certains candidats aient une idée assez juste de la situation. Certains utilisent le théorème de Baire (dont on pouvait très bien se passer) mais en oubliant de mentionner l'hypothèse essentielle de dénombrabilité.

La presque totalité des candidats ne voient absolument pas l'intérêt de la question I.5.a (la plus difficile de la partie I), confondant allègrement mur de la chambre et hyperplan quelconque de la famille. Evidemment, être du même côté que  $C$  par rapport à tout mur de  $C$  n'est pas a priori la même chose qu'être du même côté que  $C$  par rapport à tout hyperplan de la famille. Signalons pour l'anecdote que certains candidats refusent toute formulation d'aspect intuitif même consacrée par l'usage comme "être du même côté d'un hyperplan" sous prétexte qu'on ne leur en a pas donné une définition dans l'énoncé ! Cependant des candidats parviennent heureusement à une démonstration correcte par élimination successive des hyperplans non murs pour délimiter  $C$ .

La question I.5.c montre que beaucoup de candidats ignorent ce qu'est l'image d'une symétrie orthogonale par un automorphisme intérieur (ou transmuée) :  $w s_H w^{-1} = s_{w(H)}$ .

Les questions I.6 et I.7 plus algébriques sont abordées dans un certain nombre de copies et traitées avec assez de réussite.

## PARTIE II

Alors que la question II.2.a est très rarement résolue, sa conséquence II.2.b est souvent bien faite. Les questions de II.3 sont fréquemment abordées mais de manière très imprécise. La remarque essentielle qu'une réunion finie de fermés d'intérieurs vides est encore d'intérieur vide n'est pas faite, et II.3.b donne lieu à des raisonnements trop vagues alors que l'étude du signe de  $(tb_1 + (1-t)b_2, r)$  permet de conclure.

La question très classique II.4 (famille de vecteurs formant deux à deux un angle obtus) n'est presque jamais abordée, sans doute par manque de familiarité avec les espaces euclidiens.

Les questions de II.5, assez faciles, sont rarement traitées correctement. Les candidats qui abordent la question II.6 (la plus difficile de cette partie) se contentent en général d'affirmer que tout est évident. On en voit beaucoup affirmer que l'intersection d'une partie génératrice de  $E$  avec  $E_J$  ne peut être qu'une partie génératrice de  $E_J$  (sic). La suite de la partie II n'est presque jamais entamée.

## PARTIE III

Signalons dans III.1 les habituelles confusions entre l'indice de sommation (muet) et l'élément de  $W$  par lequel on recherche l'invariance.

Faute d'avoir fait la remarque essentielle qu'un polynôme invariant est somme de polynômes homogènes invariants, les candidats n'ont pu en général traiter III.2 et III.3 correctement. Dans III.4.a, on relève souvent une confusion entre idéal de  $I$  et idéal de  $S$ . La question III.4.c, qui n'est autre que l'intégrité de  $S$ , donne quelque fois lieu à des développements longs et peu concluants. Pour III.4.d, il fallait évidemment observer que  $SI^+$  est stable par  $W$ .

Les questions III.5 et III.6 sont parfois abordées avec quelque bonheur et plusieurs candidats pensent à utiliser le théorème d'Euler.

La partie IV est ignorée en général. Seuls quelques rares candidats essaient (en général sans succès) de grapiller quelques points dans IV.1 ou IV.3.



En conclusion, ce problème long et de difficulté soutenue a révélé chez de trop nombreux candidats de graves lacunes à des niveaux élémentaires que ce soit en Algèbre, en Géométrie ou en Topologie. Espérons cependant que cette épreuve pourra servir de révélateur aux candidats des agrégations futures qui y verront l'utilité de préciser leurs connaissances de base.

NOTES (SUR 60) OBTENUES PAR LES CANDIDATS A L'EPREUVE DE  
MATHEMATIQUES GENERALES

de 0 à 4	.....	373
de 5 à 9	.....	122
de 10 à 14	.....	99
de 15 à 19	.....	87
de 20 à 24	.....	55
de 25 à 29	.....	44
de 30 à 34	.....	40
de 35 à 39	.....	30
de 40 à 44	.....	23
de 45 à 49	.....	21
de 50 à 54	.....	18
de 55 à 60	.....	9

# COMPOSITION D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

## PRÉAMBULE

Si  $z$  est un nombre complexe non nul, on note  $\text{Arg}(z)$  l'unique détermination de l'argument de  $z$  qui appartient à l'intervalle  $[-\pi, \pi[$ , et on pose :

$\text{Log}(z) = \text{Log}|z| + i \text{Arg}(z)$ , puis pour tout nombre complexe  $a$  :  
 $z^a = e^{a \text{Log}(z)}$ .

Si  $z$  est un nombre complexe, on note  $\text{Re}(z)$  sa partie réelle,  $\text{Im}(z)$  sa partie imaginaire.

Les propriétés suivantes de la fonction  $\Gamma$  pourront être utilisées sans démonstration.

Pour  $\text{Re}(z) > 0$ , on pose :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

La fonction  $\Gamma$  est holomorphe dans le demi-plan  $\text{Re}(z) > 0$ . Elle se prolonge en une fonction méromorphe dans  $\mathbb{C}$  dont les pôles sont les entiers négatifs ou nuls. Si  $z$  n'est pas un pôle, on a :  $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$  et  $\Gamma(z) \neq 0$ .

Soit  $\delta$  un nombre réel,  $0 < \delta \leq \pi$ . Le nombre complexe  $a$  étant fixé, on a, pour  $z$  complexe, vérifiant  $|\text{Arg} z| \leq \pi - \delta$  :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z) z^a} = 1.$$

## PREMIÈRE PARTIE

Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres complexes.

On lui associe la série de fonctions

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n n!}{z(z+1) \dots (z+n)}$$

où  $z$  est un nombre complexe dont on suppose toujours la partie réelle positive. Les séries de ce type sont appelées séries de facultés. On note que

$$\frac{n!}{z(z+1) \dots (z+n)} = \frac{\Gamma(n+1) \Gamma(z)}{\Gamma(z+n+1)}.$$

1° a. Soit  $z$  un nombre complexe,  $\text{Re}(z) > 0$ .

Trouver la limite quand  $n$  tend vers l'infini de  $\frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \cdot \frac{n^z}{\Gamma(z)}$ ,  
 et en déduire que la série de facultés est absolument convergente au point  $z$  si et  
 seulement si la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^z}$$

est absolument convergente au point  $z$ .

On suppose désormais jusqu'à la fin de cette partie qu'il existe un nombre réel  
 $k > 0$  tel que la série de facultés soit absolument convergente pour  $z = k$ .

b. Démontrer que la série de facultés converge uniformément dans le demi-  
 plan  $\operatorname{Re}(z) \geq k$ . Que peut-on en conclure pour sa somme  $F$  ?

c. Démontrer qu'il existe une suite  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  de nombres complexes et  
 une suite  $(c_n)_{n \geq 1}$  de nombres réels positifs telles que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  
 on ait

$$\sup_{\operatorname{Re}(z) \geq k} \left| z^n \left( F(z) - \sum_{p=1}^n \frac{\alpha_{p-1}}{z^p} \right) \right| \leq c_n.$$

(On ne demande pas de calculer les  $\alpha_n$ .)

2° a. Soit  $n$  un entier,  $n \geq 1$ . Calculer le maximum pour  $r \in [0, 1]$  de la  
 fonction

$$r \mapsto r^n (1-r)^k$$

b. Démontrer que la série entière

$$\psi(w) = \sum_{n \geq 0} a_n w^n$$

a un rayon de convergence au moins égal à un et qu'il existe un nombre réel  
 $d > 0$ , ne dépendant que de  $k$ , tel que

$$|\psi(w)(1-|w|)^k| \leq d \left( |a_0| + \sum_{n \geq 1} |a_n| n^{-k} \right)$$

pour  $|w| < 1$ .

c. Établir la formule

$$\frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)} = \int_0^1 s^{z-1} (1-s)^n ds,$$

pour  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

d. On pose

$$\varphi(s) = \psi(1-s) \quad \text{pour} \quad |1-s| < 1.$$

Démontrer que, pour  $\operatorname{Re}(z) > k$ , on a

$$F(z) = \int_0^1 s^{z-1} \varphi(s) ds.$$

3° Soit  $\theta$  l'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $\theta(t) = e^{-t}$ .

a. Démontrer que  $\theta$  est une bijection biholomorphe de la bande ouverte  $\left\{ t \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(t) \in \left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[ \right\}$  sur le demi-plan ouvert  $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0\}$ .

On note  $\Delta$  l'image réciproque par cette bijection du disque ouvert  $|1 - s| < 1$  et  $\mathbb{C}$  l'image réciproque du cercle  $|1 - s| = 1$ . Calculer la partie réelle d'un élément de  $\mathbb{C}$  en fonction de sa partie imaginaire. Représenter graphiquement  $\mathbb{C}$  et  $\Delta$ .

b. La fonction  $\varphi$  étant définie comme au 2° d., soit, pour  $t \in \Delta$ ,  $f(t) = \varphi(e^{-t})$ .

Démontrer que  $f$  est holomorphe dans  $\Delta$  et que la fonction  $t \mapsto |f(t) e^{-kt}|$  est bornée pour  $t \in [0, +\infty[$ .

c. Démontrer que, pour  $\operatorname{Re}(z) > k$ , on a

$$F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t) dt.$$

## DEUXIÈME PARTIE

L'ouvert  $\Delta$  de  $\mathbb{C}$  est défini comme dans la première partie. On note  $D$  le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1. On identifie  $\mathbb{C}$  à  $\mathbb{R}^2$  et on note  $\nu$  la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^2$ . Enfin soit  $k$  un nombre réel,  $k > 1$ .

1° Soit  $f$  une fonction définie et holomorphe dans  $\Delta$ . Soit  $\varphi$  la fonction holomorphe dans  $D$  définie par

$$\varphi(e^{-t}) = f(t), \quad \text{pour } t \in \Delta$$

On pose  $\psi(w) = \varphi(1 - w)$ , pour  $|w| < 1$ , et on note

$$\psi(w) = \sum_{n \geq 0} a_n w^n$$

le développement en série entière de  $\psi$  en 0. On suppose que la fonction

$$t \mapsto |f(t) e^{-kt}|$$

est bornée sur  $\Delta$ .

a. Démontrer que si  $r > k - 1$ , l'intégrale

$$\iint_{\Delta} e^{-2(r+1)\operatorname{Re} t} |f(t)|^2 d\nu(t)$$

converge, et en déduire que l'intégrale

$$\iint_{|w| < 1} (1 - |w|)^{2r} |\psi(w)|^2 d\nu(w)$$

converge.

b. Sous les hypothèses précédentes, montrer que la série

$$\sum_{n > 0} |a_n|^2 \int_0^1 \rho^{2n+1} (1-\rho)^{2r} d\rho$$

converge.

Trouver un équivalent simple du terme général de cette série et en déduire que la série  $\sum_{n > 1} |a_n|^2 n^{-2r-1}$  converge.

Soit  $m > r + 1$ . Par une application convenable de l'inégalité de Cauchy-Schwarz montrer que la série  $\sum_{n > 1} |a_n| n^{-m}$  converge.

c. Que peut-on conclure de ce qui précède pour la série de facultés associée à la suite  $(a_n)_{n > 0}$  ?

Soit  $\omega$  un nombre réel,  $\omega \geq 1$ . On note  $\Delta_\omega$  l'homothétie de  $\Delta$  dans l'homothétie de centre l'origine et de rapport  $1/\omega$ . Une série de facultés généralisées de type  $\omega$  est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n > 0} \frac{a_n n! \omega^n}{z(z+\omega) \dots (z+n\omega)}$$

où  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de nombres complexes.

2° Soit  $f$  une fonction définie et holomorphe dans  $\Delta_\omega$  et telle que  $|f(t) e^{-kt}|$  soit borné dans  $\Delta_\omega$ . Pour  $\text{Re}(z) > k$ , on pose à nouveau

$$F(z) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt.$$

Démontrer que, pour  $k$  convenable, la fonction  $F$  est développable en série de facultés généralisées de type  $\omega$ .

3° Soit  $a$  un entier,  $a \geq 1$ , et soit  $c$  un nombre complexe. Soit, pour  $\text{Re } t > -1$

$$f(t) = t^{a-1} (1+t)^{c-a-1}.$$

Pour quelles valeurs de  $k$  et de  $\omega$  peut-on appliquer les résultats précédents?

### TROISIÈME PARTIE

Soit  $A$  un nombre réel strictement positif.

On lui associe l'ouvert

$$V_A = \left\{ t \in \mathbb{C} \mid |t| < \frac{1}{A} \right\} \cup \left\{ t \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(t) > 0 \text{ et } \text{Im}(t) < \frac{1}{A} \right\}.$$

Soit  $\mu$  un nombre réel strictement positif.

1° Soit  $f$  une fonction à valeurs complexes définie sur la demi-droite fermée  $[0, +\infty[$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes.

i. La fonction  $f$  se prolonge en une fonction, encore notée  $f$ , holomorphe dans  $V_A$  et quels que soient les nombres réels  $\mu_1 > \mu$  et  $A_1 > A$  la fonction  $t \mapsto |f(t) e^{-\mu_1 t}|$  est bornée dans  $V_{A_1}$ .

ii. Quels que soient les nombres réels  $\mu_1 > \mu$  et  $A_1 > A$ , il existe un nombre réel positif  $C(\mu_1, A_1)$  tel que, quels que soient le nombre réel  $t \geq 0$  et l'entier  $n \geq 0$ , on ait

$$|f^{(n)}(t) e^{-\mu_1 t}| \leq C(\mu_1, A_1) n! A_1^n.$$

2° On suppose que la fonction  $f$  vérifie les conditions de la question précédente et, pour  $\operatorname{Re}(z) > \mu$ , on pose

$$F(z) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz} dt.$$

a. Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a

$$F(z) = \sum_{p=1}^n f^{(p-1)}(0) z^{-p} + z^{-n} \int_0^{+\infty} e^{-tz} f^{(n)}(t) dt.$$

b. Soient  $\mu_1 > \mu$  et  $A_1 > A$  deux nombres réels. Démontrer qu'il existe un nombre réel  $K(\mu_1, A_1)$  tel que, quel que soit le nombre entier  $n \geq 1$ , on ait

$$\sup_{\operatorname{Re}(z) > \mu_1} \left| z^n \left( F(z) - \sum_{p=1}^n f^{(p-1)}(0) z^{-p} \right) \right| \leq K(\mu_1, A_1) n! A_1^n.$$

3° Soit  $F$  une fonction définie et holomorphe dans le demi-plan  $\operatorname{Re}(z) > \mu$ . On suppose que, quel que soit le nombre réel  $\mu_1 > \mu$ , la fonction  $z \mapsto |z^2 F(z)|$  est bornée dans le demi-plan  $\operatorname{Re}(z) \geq \mu_1$ . Si  $t$  est un nombre réel,  $t \geq 0$ , on pose

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(z)=\mu_1} e^{tz} F(z) dz$$

où  $\mu_1 > \mu$  et où la droite  $\operatorname{Re}(z) = \mu_1$  est orientée dans le sens des ordonnées croissantes.

a. Montrer que l'intégrale qui définit  $f$  est convergente, que  $f$  est continue et indépendante de  $\mu_1$ .

b. Soit

$$\Phi(z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t) dt.$$

Montrer que  $\Phi$  est définie et holomorphe pour  $\operatorname{Re}(z) > \mu$ , et que si  $\mu < \mu_1 < \operatorname{Re}(z_0)$ , alors

$$\Phi(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(z)=\mu_1} F(z) \frac{dz}{z_0 - z}.$$

En déduire que  $\Phi = F$ .

c. On suppose qu'il existe une suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres complexes, avec  $\alpha_0 = 0$ , et telle que, quels que soient les nombres réels  $\mu_1 > \mu$  et  $A_1 > A$ , il existe un nombre réel  $K(\mu_1, A_1)$ , vérifiant, pour tout nombre entier  $n \geq 1$ ,

$$\sup_{\operatorname{Re}(z) \geq \mu_1} \left| z^n \left( F(z) - \sum_{p=1}^n \frac{\alpha_{p-1}}{z^p} \right) \right| \leq K(\mu_1, A_1) n! A_1^n.$$

Démontrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et qu'elle vérifie la condition ii. de la première question. (On pourra d'abord exprimer sous forme intégrale l'expression

$$f(t) - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\alpha_p}{p!} t^p.$$

d. On conserve les hypothèses précédentes.

Démontrer qu'il existe un nombre réel  $\omega_0 > 0$  tel que, pour  $\omega > \omega_0$ , la fonction  $F$  soit développable en série de facultés généralisées de type  $\omega$ . Préciser un demi-plan de convergence absolue de ce développement. Que se passe-t-il si on supprime l'hypothèse  $\alpha_0 = 0$  ?

4° On définit  $f$  comme dans la 3° question de la deuxième partie.

Appliquer à  $f$  et à la fonction correspondante  $F$  les résultats des questions précédentes. Comparer avec la deuxième partie. Calculer la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . La série entière  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n T^n$  est-elle convergente ?

5° On revient pour  $F$  à la situation du 3° c. ci-dessus.

Montrer que,  $\omega > \omega_0$  étant fixé, la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  permet de déterminer de façon unique les coefficients  $a_n$  du développement en série de facultés généralisées de type  $\omega$  de  $F$ . (On ne cherchera pas une formule explicite.)

## RAPPORT SUR L'ÉPREUVE D'ANALYSE

Connues depuis longtemps au niveau des exemples, les séries de facultés ont été étudiées systématiquement au début du siècle en liaison avec la théorie analytique des équations aux différences finies où elles jouent un rôle voisin de celui des séries entières dans la théorie des équations différentielles linéaires. De manière plus surprenante elles permettent dans certains cas d'attribuer une valeur à des séries entières divergentes notamment celles qui interviennent dans l'étude d'une équation différentielle linéaire au voisinage d'un point singulier irrégulier. L'exemple esquissé en II 3°) et III 4°) correspond à l'équation hypergéométrique confluyente. L'objet principal du problème était de montrer qu'une fonction définie et holomorphe dans un demi-plan de la forme  $\text{Re}(z) > \mu$  et admettant un développement asymptotique avec des estimations à la Gevrey (cf. III 3°) c)) est développable en série de facultés et de montrer comment de telles fonctions s'obtiennent par transformation de Laplace.

A l'exception de I 1)c), les deux premières parties étaient faciles, ainsi d'ailleurs que le début de III 3°). Un assez grand nombre de candidats ont su aborder valablement le problème et l'impression d'ensemble est assez bonne. Outre quelques erreurs importantes qu'on signalera plus loin, le principal défaut rencontré est l'imprécision des rédactions (ce n'est pas une question de longueur!) qui laisse souvent le correcteur perplexe. Enfin, comme chaque année, on constate l'incapacité de la très grande majorité des candidats à appliquer correctement les théorèmes de passage à la limite dans la théorie de Lebesgue (convergence dominée, intégration terme à terme d'une série et théorème de Fubini).

Voici maintenant quelques remarques particulières et quelques éléments de solution concernant les parties les plus fréquemment abordées par les candidats.



Première partie

1°) a) On a de suite

$$\left| \frac{a_n n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \right| \sim \left| \frac{a_n}{z} \right| |\Gamma(z)| .$$

Dans trop de copies on trouve des phrases du type "si les termes généraux de deux séries sont équivalents alors les séries sont de même nature".

b) Il suffit de noter que, pour  $\operatorname{Re}(z) \geq k$ , on a

$$\frac{|a_n|}{|z||z+1|\dots|z+n|} \leq \frac{|a_n|}{k(k+1)\dots(k+n)}$$

la fonction  $F$  est donc continue pour  $\operatorname{Re}(z) \geq k$  et holomorphe pour  $\operatorname{Re}(z) > k$ . Une erreur fréquente a consisté à démontrer que la série de Dirichlet convergeait uniformément pour  $\operatorname{Re}(z) \geq k$  et à affirmer que, d'après la question précédente, ceci impliquait la convergence uniforme de la série de facultés. Hélas pour les candidats, l'équivalence établie en a) n'est pas "uniforme" en  $z \dots$

c) Cette question est un peu délicate et a été sautée par la quasi totalité des candidats. Voici comment on peut procéder. On a

$$F(z) = \sum_0^{n-1} \frac{a_p}{z(z+1)\dots(z+p)} + R_n(z)$$

et

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &\leq \frac{1}{|z||z+1|\dots|z+n|} \sum_{p \geq n} \frac{|a_p|}{|z+n+1|\dots|z+p|} \\ &\leq \frac{1}{|z|^{n+1}} \sum_{p \geq n} \frac{|a_p|}{|k+n+1|\dots|k+p|} . \end{aligned}$$

Par suite

$$|z|^{n+1} |R_n(z)|$$

est borné dans le demi-plan  $\operatorname{Re}(z) \geq k$ .

D'autre part, pour tout  $p$ , la fonction

$$\frac{a_p}{z(z+1)\dots(z+p)}$$

est holomorphe à l'infini et admet donc un développement de la forme

$$\frac{a_p}{z(z+1)\dots(z+p)} = \sum_{q \geq p+1} \frac{b_{p,q}}{z^q}$$

(elle a un zéro d'ordre  $p+1$  à l'infini), développement convergeant pour  $|z| > p$ .

Prenons  $p < n$ . On a

$$\left| \frac{a_p}{z(z+1)\dots(z+p)} - \sum_{q=p+1}^n \frac{b_{p,q}}{z^q} \right| \leq \sum_{q \geq n+1} \frac{|b_{p,q}|}{|z|^q}.$$

Le produit par  $z^n$  du membre de gauche de cette inégalité tend donc vers 0 quand  $|z|$  augmente indéfiniment. On prend

$$\alpha_{q-1} = \sum_{p=0}^{q-1} b_{p,q}$$

et il résulte des inégalités précédentes que

$$z^n \left( F(z) - \sum_{p=1}^n \frac{\alpha_{p-1}}{z^p} \right)$$

tend vers 0 quand  $z$  tend vers l'infini dans le demi-plan  $\operatorname{Re}(z) \geq k$  et est donc borné dans ce demi-plan.

2°) a) sans commentaires.

b) Comme la série de Dirichlet converge pour  $z = k$ , la suite  $(a_n n^{-k})$  est bornée ce qui implique aisément la convergence de la série entière dans le disque  $|z| < 1$ . Une erreur grossière (et fréquente) consiste à affirmer que la règle de d'Alembert donne une condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série.

La majoration était évidente à partir de a) et a, en général, été bien faite.

c) Correctement traité.

d) Bien peu de candidats ont été capables de justifier l'intégration terme à terme. Il suffisait de noter que, si  $x = \operatorname{Re}(z)$

$$\int_0^1 s^{x-1} \sum_0^\infty |a_n| (1-s)^n ds = \sum_0^\infty \frac{|a_n| n!}{(x(x+1) - (x+n))} < +\infty$$

pour  $x \geq k$  et d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série (Lebesgue).

3°) Question très élémentaire mais demandant un peu de soin. La plupart des rédactions sont filandreuses et laissent planer des doutes sur un point ou un autre.

### Deuxième partie.

1°) a) L'intégrale se majore de suite par

$$\iint_{\Delta} e^{-2(r+1-k)\operatorname{Re}(t)} dv(t)$$

et il suffisait de noter que  $\Delta \subset [-\log 2, +\infty [ \times [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ . Un nombre surprenant de candidats affirme que  $\Delta$  est d'aire finie alors qu'ils l'ont correctement dessiné à la question précédente !

b) On a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_0^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n}$$

(égalité  $L^2$  de la théorie des séries de Fourier) et il suffit de passer en coordonnées polaires dans l'intégrale double de a). Très peu de candidats y sont arrivés. La fin de la question a) par contre a été bien traitée. En particulier les correcteurs ont eu l'heureuse surprise de voir appliquée de façon correcte l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

La fin de cette partie n'a pas soulevé de difficultés pour les candidats arrivés jusque là.

### Troisième partie.

1°) Cette question a arrêté presque tous les candidats.

i)  $\Rightarrow$  ii) Pour  $t \geq 0$  et  $A_1 > A$

$$f^{(n)}(t) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|z-t|=1/A_1} f(z)/(z-t)^{n+1} dz$$

et on majore l'intégrale.

ii)  $\Rightarrow$  i) La série de Taylor de  $f$  en  $t \geq 0$  a un rayon de convergence au moins égal à  $1/A$ , ce qui fournit une fonction analytique dans ce disque. On montre que ces fonctions se recollent et qu'on a ainsi construit un prolongement de  $f$ .

2°) Sans difficultés.

3°) Le début de la question (a) et b)) est un exercice très classique de théorie des fonctions analytiques. Les candidats arrivés jusque là l'ont dans l'ensemble bien traité. Seuls quelques-uns des meilleurs candidats sont allés plus loin.

#### Bibliographie

##### NÖRLUND

1) Vorlesungen über Differenzenrechnung. Die Grundlehren der Math. Wiss. Bd 13, Springer.

2) Leçons sur les séries d'interpolation. Paris Gauthier-Villars 1926. Collection de Monographies sur la théorie des fonctions.

3) Leçons sur les équations linéaires aux différences finies. Paris Gauthier-Villars 1929.

Collection de Monographies sur la théorie de fonctions.

#### Répartition des notes

Notes	Nombre de copies
0	52
1 - 4	192
5 - 8	105
9 - 12	100
13 - 16	109
17 - 20	76
21 - 24	62
25 - 28	47
29 - 32	48
33 - 36	26
37 - 40	21
41 - 44	14
45 - 48	10
49 - 52	5
53 - 56	2
57 - 60	1

Nombre de copies corrigées 870.

## ANALYSE NUMÉRIQUE

---

*Les candidats sont priés de respecter les notations et la numérotation de l'énoncé. Les notations ou abréviations abusives risquent de ne pas être comprises.*

*Les démonstrations et présentations concises, claires et soignées seront particulièrement bien appréciées.*

Le but de ce problème est d'étudier les liens entre un certain nombre de méthodes d'analyse numérique linéaire.

Dans la partie I, des résultats utiles pour les autres parties sont établis.

La partie II est consacrée à la méthode des moments et la partie III à celle de Lanczos.

Dans la partie IV la méthode du gradient conjugué est déduite de la méthode des moments et de la méthode de Lanczos.

Dans la partie V on présente une transformation de suites de vecteurs qui est reliée à la méthode du gradient conjugué.

Dans la partie VI un algorithme récursif pour mettre en œuvre cette transformation (restreinte au cas scalaire) est étudié.

$\mathbb{N}$  est l'ensemble des entiers naturels.

Dans le cas où  $E = \mathbb{R}^n$  on identifiera les applications linéaires de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  et les matrices qui les représentent dans la base canonique.

$I$  est la matrice identité.

### I

Soit  $\mathcal{P}$  l'espace vectoriel des polynômes réels, soit  $\mathcal{P}_k$  le sous-espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à  $k$  et soit  $(c_n)$  une suite de nombres réels.

On définit une forme linéaire  $c$  sur  $\mathcal{P}$  en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N} : c(x^n) = c_n.$$

On rappelle qu'un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à un.

Q.1. Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur les  $c_n$  pour qu'il existe une famille de polynômes unitaires uniques  $P_k \in \mathcal{P}$  de degré  $k$  et telle que :

$$P_0(x) = 1$$

$$\forall k > 0, \forall i \in \{0, 1, \dots, k-1\} : c(x^i P_k(x)) = 0 ?$$

Dans toute la suite on supposera que cette condition est satisfaite. On dit que les polynômes  $P_k$  forment une famille de polynômes orthogonaux par rapport à  $c$ .

Q.2. Écrire une expression de  $P_k(x)$  sous la forme d'un déterminant d'ordre  $k+1$  dont la dernière ligne est  $(1, x, x^2, \dots, x^k)$  et dont les autres lignes sont des coefficients réels ne dépendant que des  $c_n$ .

Q.3. On convient que  $P_{-1}(x) = 0$ . Montrer qu'il existe deux suites de constantes  $(B_k)$  et  $(C_k)$  telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N} : P_{k+1}(x) = (x + B_{k+1}) P_k(x) - C_{k+1} P_{k-1}(x).$$

Donner des expressions de  $B_{k+1}$  et  $C_{k+1}$  en fonction uniquement de :

$$c(x P_k^2(x)), \quad c(P_k^2(x)) \quad \text{et} \quad c(P_{k-1}^2(x)).$$

## II

Soit  $E$  un espace de Hilbert réel. Soient  $z_0, z_1, \dots, z_k$  des éléments de  $E$ , linéairement indépendants. On note  $E_k$  le sous-espace engendré par  $z_0, z_1, \dots, z_{k-1}$ . On considère l'application linéaire  $A_k$  définie sur  $E_k$  et à valeurs dans  $E_k$  telle que :

$$\begin{aligned} z_1 &= A_k z_0 \\ z_2 &= A_k z_1 \\ \dots & \\ z_{k-1} &= A_k z_{k-2} \\ H_k z_k &= A_k z_{k-1} \end{aligned}$$

où  $H_k$  désigne la projection sur  $E_k$ .

Cette méthode s'appelle méthode des moments.

Q.4. Montrer que les relations précédentes définissent entièrement  $A_k$  et déterminer le polynôme caractéristique  $R_k$  de  $A_k$ .

Q.5. On cherche à résoudre l'équation :

$$(*) \quad z = A_k z + b$$

où  $b \in E_k$  et où  $\text{Id} - A_k$  est supposé inversible.  $\text{Id}$  désigne l'identité dans  $E_k$ .

On pose  $P(t) = R_k(t) / R_k(1)$ . Montrer qu'il existe un polynôme  $Q$  tel que :

$$1 - P(t) = (1 - t) Q(t)$$

et que la solution  $z$  de (\*) est donnée par  $Q(A_k) b$ .

Q.6. On cherche à résoudre l'équation :

$$(**) \quad A_k z = b.$$

où  $b \in E_k$  et où  $A_k$  est supposé inversible.

Comment faut-il choisir le polynôme  $P$  pour que : d'une part il existe un polynôme  $Q$  tel que  $1 - P(t) = t Q(t)$  et, d'autre part, la solution  $z$  de (\*\*) soit donnée par  $Q(A_k) b$  quel que soit  $b \in E_k$  ?

Q.7. Soit  $A$  une application linéaire de  $E$  dans  $E$ . Soit  $z_0 \in E$ . On définit la suite  $(z_n)$  en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N} : z_{n+1} = A z_n.$$

a. Soit  $k \in \mathbb{N}$  fixé. On suppose que  $(z_0, z_1, \dots, z_k)$  sont linéairement indépendants. Montrer que la restriction de  $H_k A H_k$  à  $E_k$  est égale à  $A_k$ .

b. On suppose que  $A$  est auto-adjoint et que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(z_0, z_1, \dots, z_k)$  sont linéairement indépendants. On pose  $R'_k = (-1)^k R_k$ . Montrer que la famille  $(R'_k)$  est la famille de polynômes orthogonaux unitaires par rapport à la forme linéaire  $c$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : c(x^n) = c_n = (z_0, z_n)$$

où  $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire de  $E$ .

Q.8. Dans le cas où  $E = \mathbb{R}^n$  montrer que :

$$H_k = U(U^T U)^{-1} U^T$$

où  $U$  est la matrice dont les colonnes sont  $z_0, z_1, \dots, z_{k-1}$ .

### III

On va maintenant étudier une méthode de calcul du polynôme caractéristique connue sous le nom de méthode de Lanczos.

Soit  $E$  un espace vectoriel réel et  $E'$  son dual algébrique. On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la forme bilinéaire qui met  $E$  et  $E'$  en dualité.

Soit  $A$  une application linéaire de  $E$  à valeurs dans  $E$ . Soient  $z \in E$ ,  $y' \in E'$  arbitraires non nuls.

On considère les suites  $(z_k)$  d'éléments de  $E$  et  $(y'_k)$  d'éléments de  $E'$  définies par :

$$\begin{aligned} z_0 &= z, & y'_0 &= y', \\ \forall k \in \mathbb{N} : z_{k+1} &= Az_k, & y'_{k+1} &= A^* y'_k, \end{aligned}$$

où  $A^*$  désigne l'application linéaire adjointe de  $A$ .

Soit  $c$  la forme linéaire définie sur  $\mathcal{E}$  en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N} : c(x^n) = c_n = \langle y', z_n \rangle.$$

Soit  $(P_k)$  la famille de polynômes orthogonaux unitaires par rapport à  $c$ . On rappelle que la suite  $(c_n)$  est supposée telle que la famille  $(P_k)$  existe.

On pose :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \hat{y}'_k = P_k(A^*) y', \quad \hat{z}_k = P_k(A) z.$$

Q.9. Exprimer les coefficients  $B_{k+1}$  et  $C_{k+1}$  (question Q.3) en fonction de  $A$ ,  $(\hat{y}'_k)$  et  $(\hat{z}_k)$ .

Q.10. Donner les relations de récurrence permettant le calcul des suites  $(\hat{y}'_k)$  et  $(\hat{z}_k)$ .

Q.11. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \neq k \Rightarrow \langle \hat{y}'_k, \hat{z}_n \rangle = 0.$$

Q.12. Montrer que si  $E$  est de dimension finie  $k$  et si  $z_0, \dots, z_{k-1}$  sont linéairement indépendants, alors  $(-1)^k P_k$  est le polynôme caractéristique de  $A$ .

### IV

Soit  $A$  une matrice réelle symétrique définie positive ayant  $n$  lignes et  $n$  colonnes. On cherche à résoudre l'équation  $Ax = b$  où  $b \in \mathbb{R}^n$ .

On applique la méthode de Lanczos à cette matrice avec  $y' = z$ . Puis on applique la méthode des moments à  $z_0, \dots, z_k$  pour  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . On suppose que  $z_0, \dots, z_{n-1}$  sont linéairement indépendants.

Q.13. Montrer que pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$   $(-1)^k P_k$  est le polynôme caractéristique de  $A_k$ ,  $P_k$  étant le polynôme défini dans la partie III.

Q.14. Dans la question Q.6. on choisit pour P le polynôme  $P_k(x) / P_k(0)$ . Soit  $Q_k$  le polynôme qui lui correspond.

Montrer que si  $z = b$  la solution  $x_k$  de l'équation  $A_k x = b$  est donnée par  $x_k = Q_k(A) b$ .

Q.15. Montrer que  $A_n = A$  et que  $x_n$  est la solution de l'équation  $Ax = b$ .

Q.16. Dans la méthode de Lanczos on prend maintenant  $y_0 = z_0 = b$ .

Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\hat{z}_{k+1} = (A + \beta_{k+1} I) \hat{z}_k - \gamma_{k+1} \hat{z}_{k-1}$$

avec

$$\beta_{k+1} = -(\hat{z}_k, A \hat{z}_k) / (\hat{z}_k, \hat{z}_k)$$

$$\gamma_{k+1} = (\hat{z}_k, \hat{z}_k) / (\hat{z}_{k-1}, \hat{z}_{k-1})$$

et

$$\hat{z}_{-1} = 0, \hat{z}_0 = b.$$

Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$P_{k+1}(t) = (t + \beta_{k+1}) P_k(t) - \gamma_{k+1} P_{k-1}(t)$$

où  $(-1)^k P_k$  est le polynôme caractéristique de la matrice  $A_k$  obtenue par la méthode des moments à partir de  $b, Ab, \dots, A^k b$ . On posera par convention :

$$P_{-1}(t) = 0 \quad \text{et} \quad P_0(t) = 1.$$

Q.17. En déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$x_{k+1} = x_k + \mu_k u_k$$

avec

$$u_k = -r_k + \mu_{k-1} \gamma_{k+1} (x_{k-1} - x_k)$$

$$\mu_k = -P_k(0) / P_{k+1}(0)$$

$$r_k = Ax_k - b.$$

On posera

$$x_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_0 = -r_0.$$

Q.18. On pose :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \lambda_k = -\mu_{k-1}^2 \gamma_{k+1}.$$

Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$u_k = -r_k + \lambda_k u_{k-1}$$

avec

$$u_{-1} = 0.$$

Q.19. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N} : i \neq k \Rightarrow (r_k, r_i) = 0.$$

Q.20. Déduire de ce qui précède l'algorithme suivant :

$$x_0 = 0, r_0 = -b, u_0 = -r_0,$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\mu_k = -(u_k, r_k) / (u_k, A u_k)$$

$$x_{k+1} = x_k + \mu_k u_k$$

$$r_{k+1} = r_k + \mu_k A u_k$$

$$\lambda_{k+1} = -(r_{k+1}, r_{k+1}) / (r_k, r_k)$$

$$u_{k+1} = -r_{k+1} + \lambda_{k+1} u_k.$$

Cette méthode s'appelle méthode du gradient conjugué.



Q.21. En utilisant les résultats de Q.2. et de Q.14. exprimer  $x_k$  sous forme d'un rapport de deux déterminants d'ordre  $k + 1$ .

Q.22. Montrer qu'il existe une matrice symétrique  $D$  telle que  $A = D^2$ .

Q.23. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$  on considère les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} v &= D^{-1} b \\ v_1 &= D b \\ v_2 &= A v_1 \\ &\dots\dots\dots \\ v_k &= A v_{k-1} \end{aligned}$$

et soit  $E_k$  le sous-espace engendré par  $v_1, \dots, v_k$ . Soit  $w_k$  la projection orthogonale de  $v$  sur  $E_k$ .

Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$w_k = D x_k$$

et que

$$(x - x_k, A(x - x_k)) = \frac{\begin{vmatrix} (x, b) & (b, b) & \dots & (A^{k-1} b, b) \\ (b, b) & (Ab, b) & \dots & (A^k b, b) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A^{k-1} b, b) & (A^k b, b) & \dots & (A^{2k-1} b, b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (Ab, b) & \dots & (A^k b, b) \\ \dots & \dots & \dots \\ (A^k b, b) & \dots & (A^{2k-1} b, b) \end{vmatrix}}.$$

V

Soit  $(g_i)$  une suite de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $(d_i)$  une suite de nombres réels.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $i \in \mathbb{N}$  on définit le vecteur  $e_k(g_i)$  par

$$e_k(g_i) = \frac{\begin{vmatrix} g_i & \dots & g_{i+k} \\ d_i & \dots & d_{i+k} \\ d_{i+1} & \dots & d_{i+k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{i+k-1} & \dots & d_{i+2k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ d_i & \dots & d_{i+k} \\ d_{i+1} & \dots & d_{i+k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{i+k-1} & \dots & d_{i+2k-1} \end{vmatrix}}$$

où le numérateur est le vecteur obtenu en développant ce déterminant par rapport à sa première ligne en utilisant les règles habituelles.

Q.24. On considère le même système d'équations linéaires  $Ax = b$  que dans la partie IV. On pose  $B = I - A$  et on définit la suite  $(g_i)$  par :

$$\begin{aligned} g_0 &= 0 \\ \forall i \in \mathbb{N} : g_{i+1} &= B g_i + b. \end{aligned}$$

Pour tout  $i \in \mathbb{N}$  on pose :

$$d_i = (b, g_{i+1} - g_i).$$

Soit  $(x_k)$  la suite de vecteurs obtenue par la méthode du gradient conjugué (partie IV).

Montrer que :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\} : x_k = e_k(g_0).$$

Q.25. Soient  $\bar{B}_{k+1}$  et  $\bar{C}_{k+1}$  les coefficients de la relation de récurrence de la famille de polynômes orthogonaux unitaires  $(\bar{P}_k)$  par rapport à la forme linéaire  $d$  définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N} : d(x^i) = d_i.$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on pose :

$$a_k = \bar{P}_k(1).$$

Montrer, en précisant les conditions initiales, que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$e_{k+1}(g_0) = \bar{B}_{k+1} \frac{a_k}{a_{k+1}} e_k(g_0) + \frac{a_k}{a_{k+1}} (B e_k(g_0) + b) - \bar{C}_{k+1} \frac{a_{k-1}}{a_{k+1}} e_{k-1}(g_0).$$

## VI

$(g_i)$  est maintenant une suite de nombres réels. On va étudier une méthode récursive de calcul des  $e_k(g_i)$  définis dans la partie V.

On rappelle l'identité de Sylvester :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{t1} & \dots & a_{tt} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2,t-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{t-1,2} & \dots & a_{t-1,t-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,t-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{t-1,1} & \dots & a_{t-1,t-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2t} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{t2} & \dots & a_{tt} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{t-1,2} & \dots & a_{t-1,t} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,t-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{t1} & \dots & a_{t,t-1} \end{vmatrix}.$$

On appellera  $N_k^{(i)}$  le numérateur de  $e_k(g_i)$  et  $D_k^{(i)}$  son dénominateur. Pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  on posera :

$$H_k^{(i)} = \begin{vmatrix} d_i & \dots & d_{i+k-1} \\ d_{i+1} & \dots & d_{i+k} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{i+k-1} & \dots & d_{i+2k-2} \end{vmatrix}$$

et  $r_k^{(i)} = H_k^{(i)} / D_{k-1}^{(i)}$ .

On pose :

$$\forall i \in \mathbb{N} : H_0^{(i)} = 1.$$

Q.26. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $i \in \mathbb{N}$  :

$$e_{k+1}(g_i) = \frac{r_{k+1}^{(i+1)} e_k(g_i) - r_{k+1}^{(i)} e_k(g_{i+1})}{r_{k+1}^{(i+1)} - r_{k+1}^{(i)}}.$$

Q.27. Pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on pose :

$$s_k^{(i)} = D_k^{(i)} / H_k^{(i)}.$$

Montrer que pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{s_{k+1}^{(i+1)}}{s_{k+1}^{(i)}} = 1 + \frac{r_{k+2}^{(i)}}{r_{k+1}^{(i+1)}}$$
$$\frac{r_{k+1}^{(i+1)}}{r_{k+1}^{(i)}} = 1 + \frac{s_{k+1}^{(i)}}{s_k^{(i+1)}}$$

avec  $s_0^{(i)} = 1$  et  $r_1^{(i)} = d_i$ .

Q.28. Dans quel ordre faut-il utiliser les relations des deux questions précédentes pour calculer récursivement les  $e_k(g_i)$  à partir des conditions initiales?

# RAPPORT SUR L'ÉPREUVE D'ANALYSE NUMÉRIQUE

## 1 - REMARQUES GENERALES

L'objet de l'épreuve d'analyse numérique était de mettre en lumière le lien entre un certain nombre de méthodes classiques (la méthode de Lanczos, le gradient conjugué) par l'intermédiaire de propriétés des polynômes orthogonaux formels. La succession des questions du problème correspond d'ailleurs au développement historique de ces méthodes, alors que maintenant elles sont présentées de façon séparée dans les cours d'analyse numérique.

Ainsi qu'il l'a été souligné dans le rapport de l'année précédente, l'épreuve d'analyse numérique se caractérise par une absence de programme, ce qui fait que certains candidats sont étrangers à certaines techniques de démonstration et à une forme de raisonnement particulière à l'analyse numérique. Ce phénomène se ressent dans les résultats de l'épreuve de cette année : certains candidats ne savent pas redémontrer les propriétés classiques des polynômes orthogonaux.

## 2 - ANALYSE DU SUJET

La première partie du problème est une approche des polynômes orthogonaux formels (orthogonaux par rapport à une forme linéaire), et l'étude des propriétés algébriques vérifiées par ces polynômes (rapport de déterminants, récurrence à trois termes). Les démonstrations sont rigoureusement identiques à celles du cas classique.

La seconde partie présente la méthode des moments et deux de ses utilisations : calcul du polynôme caractéristique d'une application linéaire et résolution d'une équation linéaire.

La troisième partie est la méthode de bi-orthogonalisation de Lanczos (basée sur les résultats de la première partie).

Dans la quatrième partie, la méthode du gradient conjugué est présentée comme une conséquence de la méthode de Lanczos et de celle des moments.

La cinquième partie est l'étude d'une transformation de suite de vecteurs : la suite des itérés obtenus par la méthode du gradient conjugué est transformée en une autre suite (dont les éléments sont des rapports de déterminants).

La sixième partie est la mise en oeuvre pratique de cette transformation : le calcul des déterminants peut être évité par un algorithme récursif.

### 3 - COMMENTAIRE SUR LES QUESTIONS

#### Partie I

$$\text{Soit } D_k = \begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_{k-1} \\ c_{k-1} & \dots & c_{2k-2} \end{vmatrix}$$

La condition de  $Q_1$  est :  $\forall k \quad D_k \neq 0$ .

L'utilisation des formules de Cramer conduit à

$$P_k(x) = \frac{1}{D_k} \begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_k \\ c_{k-1} & \dots & c_{2k-1} \\ 1 & x & \dots & x^k \end{vmatrix} \quad (\text{Question } Q_2)$$

et si on exprime  $p_k(x) = P_{k+1}(x) - x P_k(x)$  (polynôme de degré  $k$ ) sur la base des polynômes  $P_j(x)$ , les conditions  $c(x^i p_k(x)) = 0$  fournissent  $Q_3$  et

$$B_{k+1} = - \frac{c(x P_k^2)}{c(P_k^2)} \quad c_{k+1} = \frac{c(P_k^2)}{c(P_{k-1}^2)}$$

Cette partie a été traitée correctement par le tiers des candidats, les erreurs les plus fréquentes étant dans l'écriture de déterminants et l'oubli de la condition  $c(P_k^2) \neq 0$ .

#### Partie II

La matrice de  $A_k$  dans la base  $z_0, \dots, z_{k-1}$  de  $E_k$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \alpha_0 \\ 1 & & \\ & \dots & 1 \\ & & & \alpha_{k-1} \end{pmatrix}$$

d'où le polynôme caractéristique

$$R_k(\lambda) = (-1)^{k+1} \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \lambda^i - \lambda^k \right]$$

(En n'oubliant pas le signe, car  $R'_k$  devient alors unitaire).

Les questions  $Q_5$ ,  $Q_6$  utilisent le théorème de Cayley-Hamilton et  $Q_7$  b) est une conséquence du fait que  $z_k - H_k(z_k)$  est orthogonal à  $E_k$ .

Les trois quarts des candidats ont traité correctement cette partie.

### Partie III

Les questions  $Q_9$  et  $Q_{10}$  sont des conséquences directes de  $Q_3$ .  $Q_{11}$  utilise le fait que  $c(P_k P_n) = (\hat{y}_n, \hat{z}_k)$  et  $Q_{12}$  revient à démontrer que  $P_k(A) z_i = 0$  pour  $i = 0 \dots k-1$ . Cette partie a été abordée par tous ceux qui ont traité complètement la partie I.

Notons que les trois premières parties, qui regroupent des questions classiques d'analyse numérique, permettaient d'obtenir 20/40.

### Parties IV, V, VI

Ces parties n'ont été traitées que par un petit nombre de candidats.

La partie IV utilise les résultats des parties précédentes et V et VI exigeaient une manipulation de déterminants et de l'identité de Sylvester.

## 4 - REPARTITION DES NOTES

Nombre de copies corrigées : 393

Moyenne (sur 40) : 10,38

Répartition :	Notes	Nombre de candidats
	0-4	151
	5-9	64
	10-14	58
	15-19	42
	20-24	37
	25-29	23
	30-34	13
	35-40	5

# MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Le problème porte sur l'identification de certains mouvements d'un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , de l'espace physique représenté par un espace affine euclidien réel de dimension 3, à certains mouvements d'un point « matériel »  $M$  d'un espace affine réel de dimension 4, ceci en vue de la résolution de certains problèmes gravitationnels.

Les différentes fonctions ou champs de vecteurs considérés seront supposés  $C^\infty$  sauf éventuellement en un point.

Le point  $M$  est soumis à une force  $\vec{F}$  dérivant d'une fonction de forces  $U$  ( $\vec{F} = \text{Grad } U$ ). Les coordonnées de  $M$  dans un repère orthonormé  $\mathcal{R}$  seront notées  $(x_1, x_2, x_3)$ , la coordonnée temporelle étant notée  $t$ . La fonction de forces  $U$  est supposée conservative ( $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ ).

La mise en équations se fera par la méthode de Lagrange : si  $T$  est l'énergie cinétique à considérer, nous rappelons que les équations de Lagrange pour les paramètres  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$\mathcal{E}_n$  désignera un espace affine euclidien réel de dimension  $n$ , d'espace vectoriel directeur  $E_n$ .  $\mathcal{E}_n$  sera rapporté à un repère orthonormé.  $O$  désignera l'origine de ce repère.

Comme usuellement, si  $f$  est une fonction de  $\mathcal{E}_n$  dans  $\mathbb{R}$ , nous désignerons par  $\dot{f} = \frac{df}{dt}$  la dérivée de la restriction de  $f$  le long du mouvement considéré dans  $\mathcal{E}_n$ .

## I

$u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  désigne la suite des coordonnées d'un point  $M$  de  $\mathcal{E}_4$ .  $x = (x_1, x_2, x_3)$  désigne la suite des coordonnées d'un point  $M$  de  $\mathcal{E}_3$ . On considère l'application  $\varphi$  de  $\mathcal{E}_4$  dans  $\mathcal{E}_3$  définie analytiquement par :

$$\begin{aligned} M &\longmapsto \varphi(M) = M \\ (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2}{2} \\ x_2 = u_1 u_2 - u_3 u_4 \\ x_3 = u_1 u_3 + u_2 u_4 \end{array} \right. \end{aligned}$$

1° En considérant des coordonnées polaires dans les plans  $(u_1, u_4)$  et  $(u_2, u_3)$ , montrer que  $\varphi$  est surjective. Calculer  $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  en fonction de  $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}$ .

On considère la matrice  $L$

$$(2) \quad L = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix}$$

Montrer que  $L$  est une matrice de similitude. Montrer que la matrice extraite de  $L$ , formée des trois premières lignes, est la jacobienne de  $\varphi$ . En déduire que pour  $\|u\| \neq 0$ ,  $\varphi$  est de rang maximum.

2° On considère le mouvement fictif d'un point  $\mathbf{M}$  de  $\mathcal{E}_4$  pour une variable temporelle fictive  $\tau$ , d'énergie cinétique fictive  $\mathcal{C} = \frac{m}{2} \|u'\|^2$ , où  $m$  est une constante positive, et où  $u'$  désigne  $\frac{du}{d\tau}$ . Ce point  $\mathbf{M}$  est soumis à l'action d'une force dérivant d'une fonction de forces  $\mathcal{U}$ . *Sauf dans 2° c. où  $\mathcal{U}$  est une fonction différentiable quelconque de  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , on supposera que  $\mathcal{U}$  ne dépend de  $\mathbf{M}$  que par  $\|u\|$ .* Les équations du mouvement de  $\mathbf{M}$  sont définies par les équations de Lagrange associées à  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{U}$ .

a. On pose

$$(3) \quad \omega(u, u') = u_4 u'_1 - u_3 u'_2 + u_2 u'_3 - u_1 u'_4$$

Déterminer une relation matricielle entre  $(x'_1, x'_2, x'_3, \omega)$  et  $(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4)$ . En déduire l'expression de  $\|u'\|^2$  en fonction de  $r, x'_1, x'_2, x'_3$  et  $\omega$ .

b. On définit le moment cinétique de  $\mathbf{M}$  par la matrice antisymétrique d'ordre 4 :

$$(4) \quad \sigma = (\sigma_{ij}) \quad \sigma_{ij} = m(u_i u'_j - u_j u'_i) \\ i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Montrer que  $\sigma$  est une matrice d'intégrales premières pour le mouvement de  $\mathbf{M}$ . Que peut-on déduire pour  $\omega$  ?

c. Cette question est une généralisation de b. et est indépendante de la suite du problème. On considère dans  $\mathcal{E}_4$  le mouvement de  $\mathbf{M}$  d'énergie cinétique  $\mathcal{C} = \frac{m}{2} \|u'\|^2$  et de fonction de forces  $\mathcal{U}$  quelconque.

Soit  $\{g_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$  une famille d'isométries de  $\mathcal{E}_4$ , dépendant d'un paramètre réel  $\lambda$ , et s'exprimant analytiquement par :

$$(5) \quad \tilde{u}_i = g_i(u_1, u_2, u_3, u_4, \lambda)$$

On suppose les fonctions  $g_i$  différentiables par rapport à l'ensemble des variables  $(u_1, u_2, u_3, u_4, \lambda)$ ; de plus  $g_\lambda$  est l'identité pour  $\lambda = 0$ . On désigne par  $\gamma_i$  la fonction définie par :

$$(6) \quad \gamma_i = \left. \frac{\partial g_i}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$$

Montrer que si  $\mathcal{U}$  est invariante par  $g_\lambda$ , quel que soit  $\lambda$  ( $\mathcal{U} \circ g_\lambda = \mathcal{U}$ ), alors la fonction  $F$  définie par :

$$(7) \quad F(u, u') = m \sum_{i=1}^4 \gamma_i(u_1, u_2, u_3, u_4) u'_i$$

est une intégrale première du mouvement de  $\mathbf{M}$ . Considérant à nouveau le cas particulier où  $\mathcal{U}$  est une fonction de  $\|u\|$ , déterminer une famille d'isométries pour laquelle l'intégrale première (7) est  $\sigma_{ij}$  ( $1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 4$ ).

3° On repère  $\mathbf{M}$  (pour  $\|u\| \neq 0$ ) par les trois coordonnées curvilignes  $(x_1, x_2, x_3)$  et une quatrième notée  $y$  (qu'il est inutile de préciser), de telle sorte que les coordonnées de  $\mathbf{M}$  sont des fonctions de  $(x_1, x_2, x_3, y)$ . Montrer que si la fonction  $\omega$ , définie au I.2 a. par l'équation (3) est nulle à un instant  $\tau_0$ , alors elle est nulle tout le long du mouvement de  $\mathbf{M}$ . On désignera par  $\Omega$  l'ensemble des mouvements satisfaisant à cette condition.

Montrer que pour les mouvements de  $\Omega$ , les trois premières équations de Lagrange, relatives aux coordonnées curvilignes de  $\mathbf{M}$ , s'identifient aux équations de Lagrange pour un certain mouvement d'un point  $\mathbf{M}$  de  $\mathcal{E}_3$  de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$ , associées à une certaine fonction  $T$  de  $x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3$  et une certaine fonction  $U$  de  $x_1, x_2, x_3$ , dont on précisera les expressions. (On remarquera que  $T$  n'est pas l'énergie cinétique usuelle.) Montrer que  $E = T - U$  est intégrale première du mouvement de  $\mathbf{M}$ . Montrer qu'à toute condition initiale  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x'_1(0), x'_2(0), x'_3(0))$  pour laquelle  $\|x\|$  est non nul, on peut associer une condition initiale  $(u_1(0), u_2(0), u_3(0), u_4(0), u'_1(0), u'_2(0), u'_3(0), u'_4(0))$  satisfaisant à

$$(8) \quad u_4(0) u'_1(0) - u_3(0) u'_2(0) + u_2(0) u'_3(0) - u_1(0) u'_4(0) = 0$$

4° Soit  $\mu$  une fonction de  $x = (x_1, x_2, x_3)$  strictement positive. On dit qu'on remplace la coordonnée temporelle  $\tau$  par la coordonnée temporelle  $t$ , définie par la relation notée symboliquement :

$$(9) \quad d\tau = \mu dt$$



lorsqu'on remplace les vitesses  $x'_i$  par les vitesses notées  $\dot{x}_i$  définies par :

$$(10) \quad \dot{x}_i = \mu x'_i$$

Préciser comment, connaissant un mouvement de  $M$  paramétré par  $\tau$ , on peut lui faire correspondre un mouvement de  $M$  paramétré par  $t$ . Montrer que les mouvements de  $M$  satisfaisant, en coordonnée temporelle  $\tau$ , à la condition  $E = 0$ , vérifient en coordonnée temporelle  $t$ , les équations de Lagrange associées à la fonction  $\bar{T}$  et la fonction de forces  $\bar{U}$  définies par :

$$(11) \quad \begin{cases} \bar{T}(x_i, \dot{x}_i) = \mu(x) T\left(x_i, x'_i = \frac{\dot{x}_i}{\mu(x)}\right) \\ \bar{U}(x) = \mu(x) U(x) \end{cases}$$

Montrer que  $\bar{T} - \bar{U} = 0$ .

## II

On considère dans toute cette partie le cas où le point  $M$  de  $\mathcal{E}_4$  est soumis à la fonction de forces  $\mathcal{U}$  :

$$(12) \quad \mathcal{U} = h \|u\|^2 + 2k$$

où  $h$  et  $k$  sont deux constantes données,  $k$  étant strictement positive. On choisira aussi dans toute cette partie la fonction  $\mu$  :

$$(13) \quad \mu = \frac{1}{2r} \quad \text{où } r = \|x\|$$

1° Montrer qu'on est dans les conditions d'application du I. Calculer  $T$ ,  $U$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{U}$ . Montrer que, à partir de certains mouvements de  $M$  dans  $\mathcal{E}_4$ , on peut déterminer dans  $\mathcal{E}_3$  les mouvements d'énergie  $h$  d'un point soumis à une attraction newtonienne de la part de l'origine (problème képlérien; force d'attraction de la part de l'origine inversement proportionnelle au carré de la distance). Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement de  $M$  soit borné dans  $\mathcal{E}_4$ ; intégrer ces mouvements en précisant les conditions à considérer; en déduire l'intégration des mouvements bornés du problème képlérien dans  $\mathcal{E}_3$ .

2° Montrer que dans  $\mathcal{E}_4$ , la trajectoire de  $M$  est dans un plan fixe (sous-espace affine de dimension 2). Montrer qu'en particulier, pour les mouvements de  $\mathcal{E}_4$  situés dans le plan de coordonnées  $(u_1, u_2)$  (d'équations  $u_3 = u_4 = 0$ ), les mouvements correspondants de  $\mathcal{E}_3$  ont leur trajectoire contenue dans le plan d'équation  $x_3 = 0$ . Montrer qu'alors la transformation  $\phi$  se réduit à une transformation conforme du plan.

3° Comparer le passage à l'origine pour  $M$  dans  $\mathcal{E}_4$ , en coordonnée temporelle  $\tau$ , et  $M$  dans  $\mathcal{E}_3$  en coordonnée temporelle  $t$ . Quelle conclusion pratique peut-on dégager?

## III

On considère dans  $\mathcal{E}_3$  le mouvement d'un satellite soumis à l'attraction newtonienne de deux masses fixes, l'une d'elles étant supposée à l'infini (ou de façon équivalente le mouvement d'un électron soumis à la superposition d'un champ de Coulomb et d'un champ électrique constant). Ces deux problèmes se modélisent par le mouvement d'un point matériel  $M$  de  $\mathcal{E}_3$  d'énergie cinétique  $T = \frac{m}{2} \|\dot{x}\|^2$  et de fonction de forces  $U = \frac{k}{r} + ax_1$  ( $a$  et  $k$  étant deux constantes positives données).

1° On considère dans  $\mathcal{E}_4$  le mouvement du point  $M$  correspondant aux expressions suivantes de l'énergie cinétique et de la fonction de forces :

$$(14) \quad \begin{cases} \mathcal{E} = \frac{m}{2} \|u'\|^2 \\ \mathcal{U} = h \|u\|^2 + 2k + \frac{a}{2} \|u\|^2 (u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2) \end{cases}$$

Montrer que  $\omega$  est encore une intégrale première. En déduire qu'on peut traiter le problème du point  $M$  de  $\mathcal{E}_3$  en employant la même méthode que dans la partie II, et par conséquent déterminer les mouvements d'énergie  $h$  de  $M$  dans  $\mathcal{E}_3$  à partir de l'étude de certains mouvements de  $M$  dans  $\mathcal{E}_4$ , qu'on précisera.

2° Montrer que les équations du mouvement de  $M$  dans  $\mathcal{E}_4$  se découpent en deux systèmes d'équations, décrivant respectivement les mouvements des deux projections  $M_1$  et  $M_2$  de  $M$  sur les deux plans ( $u_2 = u_3 = 0$ ) et ( $u_1 = u_4 = 0$ ). Montrer que les mouvements de  $M_1$  et  $M_2$  sont à accélération centrale, et indiquer comment les équations qui les décrivent peuvent s'intégrer. Ces deux mouvements sont-ils bornés? Dans le cas où le mouvement de  $M$  dans  $\mathcal{E}_4$  est associé à un mouvement de  $M$  dans  $\mathcal{E}_3$ , comparer les moments cinétiques des deux projections  $M_1$  et  $M_2$  de  $M$ .

#### IV

On appelle champ de vecteurs  $V$  de  $\mathcal{E}_n$  une application de  $\mathcal{E}_n$  dans son espace vectoriel directionnel  $E_n$ . On dira que  $V$  est un champ de vitesses d'un solide si pour tout couple de solutions  $(M_1(t), M_2(t))$  du système différentiel

$$(15) \quad \frac{dM}{dt} = V(M)$$

on a

$$(16) \quad \frac{d}{dt} \|\overrightarrow{M_1(t) M_2(t)}\| = 0 \quad \forall t$$

ou de façon équivalente

$$(17) \quad \|\overrightarrow{M_1(t) M_2(t)}\| = \|\overrightarrow{M_1(0) M_2(0)}\| \quad \forall t$$

1° Montrer que le champ de vecteurs  $V$  est alors caractérisé par la relation

$$(18) \quad \forall M \in \mathcal{E}_n \quad V(M) = V(0) + \tilde{\Omega}(\overrightarrow{0M})$$

où  $\tilde{\Omega}$  est un endomorphisme antisymétrique de  $E_n$ .

Montrer qu'il existe un sous-espace affine  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{E}_n$  tel que :

$$(19) \quad M \in \mathcal{A} \Leftrightarrow V(M) \in \text{Ker } \tilde{\Omega}$$

Préciser l'espace vectoriel directionnel de  $\mathcal{A}$ . Montrer que  $V$  est constant sur  $\mathcal{A}$ .

2° On utilise pour repérer la position dans  $\mathcal{E}_n$  du point mobile  $M$ , à l'instant repéré par la variable temporelle  $t$ , d'une part les coordonnées usuelles  $u = (u_1, \dots, u_n)$  et d'autre part un système de coordonnées curvilignes  $(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ . On suppose d'autre part qu'il existe une fonction  $\omega$  des coordonnées curvilignes et de leurs dérivées par rapport à  $t(x_1, \dots, x_{n-1}, y, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{n-1}, \dot{y})$  dont la dérivée partielle  $\frac{\partial \omega}{\partial \dot{y}}$  ne s'annule pas, telle que l'énergie cinétique fictive du point  $M$  :

$$\mathcal{C} = \frac{m}{2} \|u'\|^2$$

s'exprime, en coordonnées curvilignes, uniquement au moyen de  $(x_1, \dots, x_{n-1}, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{n-1}, \omega)$

$$(20) \quad \mathcal{C}(x_i, y, \dot{x}_i, \dot{y}) = \mathcal{C}(x_i, \dot{x}_i, \omega(x_i, y, \dot{x}_i, \dot{y}))$$

On suppose de plus que la fonction de forces  $\mathcal{U}$  s'exprime, en coordonnées curvilignes, uniquement au moyen de  $x_1 \dots x_{n-1}$ .

Montrer que si  $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \omega}$  est nul à l'instant initial,  $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \omega}$  reste nul au cours du mouvement. On appelle  $\Omega$  l'ensemble des mouvements caractérisés par  $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \omega} = 0$  et on suppose que l'équation  $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \omega} = 0$  permet de définir  $\omega$  en fonction de  $x_1, \dots, x_{n-1}, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{n-1}$ . Montrer que pour tout mouvement de  $\Omega$  les équations relatives aux coordonnées curvilignes  $x_i$  sont les équations de Lagrange d'un point  $M$  de  $\mathcal{E}_{n-1}$ , de coordonnées  $x_1, \dots, x_{n-1}$ , relatives à une certaine fonction  $T$ , et une fonction de forces  $U$ . Préciser  $T$  et  $U$ .

3° Soit  $\Lambda$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , dont la dernière ligne est formée des composantes d'un champ de vitesses d'un solide de  $\mathcal{E}_n$  noté  $V$ , et dont les  $(n - 1)$  premières lignes sont les suites des dérivées partielles de  $(n - 1)$  intégrales premières indépendantes de  $V$  notées  $x_1, \dots, x_{n-1}$ . Montrer que  $\Lambda^t \Lambda$  est une matrice d'intégrales premières de  $V$ . En déduire que les résultats de la question IV.2° peuvent être appliqués au mouvement d'un point matériel  $M$  de  $\mathcal{E}_n$ , d'énergie cinétique  $\mathcal{C} = \frac{m}{2} \|\dot{u}\|^2$ , dont la fonction de forces est intégrale première de  $V$ .

4° Applications.

- Montrer que  $L$  définie par (2) est du type  $\Lambda$ . Préciser  $V$  et les intégrales premières à considérer.
- Construire dans  $\mathcal{E}_2$  un exemple de telle matrice  $\Lambda$ . Quels sont les mouvements de la droite  $\mathcal{E}_1$  associés à cet exemple?
- Interpréter IV.2° et IV.3° pour :

$$(21) \quad \Lambda = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ -\frac{u_2}{\alpha(u_1^2 + u_2^2)} & \frac{u_1}{\alpha(u_1^2 + u_2^2)} & -\frac{1}{v} \\ -\alpha u_2 & \alpha u_1 & v \end{pmatrix}$$

où  $\alpha$  et  $v$  sont des constantes non nulles.

5° On considère un point matériel  $M$  de  $\mathcal{E}_3$  de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$ , d'énergie cinétique  $T = \frac{1}{2} m \|\dot{x}\|^2$ , dans un champ de forces de fonction de forces  $U$ .

Soit  $\Phi$  une application surjective de  $\mathcal{E}_4$  dans  $\mathcal{E}_3$  définie par

$$(22) \quad x_i = \Phi_i(u_1, u_2, u_3, u_4) \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

Les relations

$$(23) \quad \dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} \dot{u}_j$$

seront notées

$$(24) \quad \dot{x} = \Phi^*(u, \dot{u})$$

Soit  $\omega$  une fonction quelconque de  $u$  et de  $\dot{u}$ .

Montrer que

$$(25) \quad \mathcal{C} = T \circ \Phi^* + \omega^2$$

et

$$(26) \quad \mathcal{U} = U \circ \Phi$$

satisfont aux conditions d'application de IV.2° et que l'on peut ainsi obtenir les mouvements de  $M$  dans  $\mathcal{E}_3$  à partir de certains mouvements de  $M$  dans  $\mathcal{E}_4$ , formant un ensemble  $\Omega$ .

## RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE

L'ensemble des résultats obtenus a été assez étalé, l'éventail des notes ayant été très large. Une excellente copie s'est dégagée. Plusieurs bonnes copies ont donné satisfaction. Peu de copies blanches ont été remises. La répartition semble donc bonne et en progression sur l'an dernier.

Plusieurs parties, voire plusieurs questions, étant indépendantes, l'ensemble du problème a donc été plus ou moins abordé. A propos du I, la question 2)c) (forme très particulière du théorème de Noether) n'a été traitée que par les meilleurs candidats. Peu d'ailleurs ont reconnu que  $\sigma_{ij}$  était associé à un groupe de rotations dans le plan  $(u_i, u_j)$ . Pour I 3), il est à déplorer que pratiquement aucune copie n'a traité de façon rigoureuse la réduction par  $\omega = 0$ ; la plupart ont annulé  $\omega = 0$  dans l'énergie cinétique sans vérifier l'influence que cela avait sur les équations de Lagrange. De façon générale, les équations de Lagrange sont mal connues des candidats. La question I 4) n'a pas toujours été traitée par ceux qui sont arrivés jusque là, mais le résultat ayant été donné, ils ont pu poursuivre les applications mécaniques proposées aux II et III.

Un seul candidat a su dégager l'intérêt pratique du problème, demandé au II 3) (question difficile concernant la régularisation de la collision à l'origine).

La partie IV, indépendante, et constituant une généralisation a été souvent abordée.

Dans l'ensemble, de bons candidats se sont dégagés, mais de trop nombreuses copies n'ont guère dépassé le I,1).

### NOTES (SUR 40) OBTENUES PAR LES CANDIDATS A L'ÉPREUVE DE MÉCANIQUE

de 0 à 5	.....	29	de 21 à 25	.....	7
de 6 à 10	.....	19	de 26 à 30	.....	5
de 11 à 15	.....	8	de 31 à 35	.....	1
de 16 à 20	.....	9	de 36 à 40	.....	3

## CORRIGÉ

I. 1) Montrons que  $\varphi$  est surjective

$$\begin{array}{l} (\pi, \theta) \text{ coordonnées polaires de } (u_1, u_4) \\ (\rho, \varphi) \text{ " " " } (u_2, u_3) \\ x_1 = \frac{\pi^2 - \rho^2}{2} \quad x_2 = \pi\rho \cos(\theta + \alpha) \quad x_3 = \pi\rho \sin(\theta + \alpha) \end{array}$$

$x_2^2$  et  $-x_3^2$  sont solutions de l'équation du second degré  
 $X^2 - 2x_1X - (x_2^2 + x_3^2) = 0$

Par conséquent, connaissant  $(x_1, x_2, x_3)$ , on peut toujours calculer  $\pi$  et  $\rho$  donc  $\theta + \alpha$ . Par contre  $\theta - \alpha$  est indéterminée.

L'application  $\varphi$  est surjective mais non injective,  $\varphi^{-1}(x)$  est en général une courbe.

Cas particuliers.  $x_2 = x_3 = 0$   $\begin{cases} x_1 > 0 & \rho = 0 & u_2 = u_3 = 0 \\ x_1 < 0 & \pi = 0 & u_1 = u_4 = 0 \end{cases}$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \iff u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$$

Calcul de  $\pi$   $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(\frac{\pi^2 - \rho^2}{2}\right)^2 + \pi\rho^2 = \frac{(\pi^2 + \rho^2)^2}{4} = \frac{\|u\|^4}{4} = \pi^2$

$$\boxed{\|u\|^2 = 2\pi}$$

L matrice de similitude  ${}^t L L = \|u\|^2 I$

La matrice formée des 3 premières lignes de L est la matrice jacobienne de  $\varphi$ , la 1<sup>o</sup> ligne est celle des dérivées partielles de  $x_1$  par rapport à  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , la 2<sup>o</sup> ligne est celle des dérivées partielles de  $x_2$  par rapport à  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , la 3<sup>o</sup> ligne est celle des dérivées partielles de  $x_3$  par rapport à  $u_1, u_2, u_3, u_4$ . Si  $u \neq 0$  L est régulière donc  $\varphi$  est de rang maximum.

2) a)  $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ \omega \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \end{pmatrix}$

ou en notation abrégée  $\begin{pmatrix} x' \\ \omega \end{pmatrix} = L u'$

donc  $\begin{pmatrix} x' \\ \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ \omega \end{pmatrix} = {}^t u' {}^t L L u' = \|u\|^2 \|u'\|^2$

$$\boxed{\begin{aligned} \|x'\|^2 + \omega^2 &= \|u\|^2 \|u'\|^2 \\ \|u'\|^2 &= \frac{1}{2\pi} (\|x'\|^2 + \omega^2) \end{aligned}}$$

$$b) \frac{d\sigma_{ij}}{dt} = m(u_i u_j'' - u_j u_i'') \text{ or } \mathcal{L} = \mathcal{L}(\|u\|)$$

$$\text{donc } m u_i'' = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = \frac{u_i}{\|u\|} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \|u\|}$$

$$\text{donc } \frac{d\sigma_{ij}}{dt} = \frac{u_i u_j}{\|u\|} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \|u\|} - \frac{u_j u_i}{\|u\|} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \|u\|} = 0$$

Or  $\omega = \frac{\sigma_{23} + \sigma_{41}}{m}$ . Donc  $\omega$  est une intégrale première.

c) Traduisons que  $\mathcal{L}$  est invariante par  $g_\lambda : \mathcal{L} \circ g_\lambda = \mathcal{L}$   
Dérivons par rapport à  $\lambda$  pour  $\lambda = 0$  :

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \delta^i = 0$$

De plus  $g_\lambda$  est une isométrie de  $\mathbb{E}_4$ ; c'est donc une application affine et  $g_\lambda(u) = f_\lambda(u) + g_\lambda(0)$  où  $f_\lambda$  est une application linéaire et orthogonale.

Donc  $\delta(u) = f(u) + \delta(0)$  où  $f$  est linéaire.

De plus  $\|g_\lambda(u) - g_\lambda(0)\| = \|u\|$  donc  $\|f_\lambda(u)\| = \|u\|$

En dérivant par rapport à  $\lambda$  pour  $\lambda = 0$ , on déduit

$f(u) \cdot u = 0$ . Donc  $f$  est un endomorphisme antisymétrique.

$$\text{Alors } \frac{1}{m} \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \delta_i u_i' = \sum_i \delta_i u_i'' + \sum_i \delta_i' u_i'$$

$$\text{Or } \sum_i \delta_i u_i'' = \frac{1}{m} \sum_i \delta_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 0$$

et  $\delta_i' = f(u_i')$  donc  $\sum_i \delta_i' u_i' = f(u') \cdot u' = 0$  car  $f$  est antisymétrique. Donc  $\frac{dF}{dt} = 0$  et  $F$  est bien une intégrale première.

(Cette question est à rapprocher du IV)

$\sigma_{ij}$  est relative aux rotations d'angle  $\lambda$  dans le plan  $(i, j)$ , les autres coordonnées étant fixes.

3)  $\omega$  est une intégrale première, donc si  $\omega(t_0) = 0 \Rightarrow \omega(t) = 0$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \|u'\|^2 = \frac{m}{4\pi} (\|x'\|^2 + \omega^2)$$

$$\text{Posons } T = \frac{m}{4\pi} \|x'\|^2 \quad \mathcal{L} = T + \frac{m\omega^2}{4\pi}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{dT}{\partial x_i'} - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{m\omega}{2\pi} \frac{\partial \omega}{\partial x_i'} \right) - \frac{m\omega^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\pi} \right) - \frac{m}{2\pi} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_i}$$

pour  $\Omega$  ce terme est nul

Donc les équations sont celles de

$$T = \frac{m}{4\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)$$

$$U = U(x) = U_0 \left( \|u\| = \sqrt{2\pi} \right)$$

On est dans les conditions d'application de l'intégrale de l'énergie  $T = U + h$ , que l'on peut redémontrer en multipliant chaque équation de Lagrange en  $x_i$  par  $x_i'$  et en sommant.

Conditions initiales.

L'application  $\varphi$  est surjective, donc connaissant  $x(0)$  on peut déterminer au moins un  $u(0) \in \varphi^{-1}(x_0)$  non vide. Ensuite, de  $\begin{pmatrix} x'(0) \\ 0 \end{pmatrix} = L(u(0)) u'(0)$

on peut déduire  $u'(0)$  à condition que  $L$  soit inversible, c'est-à-dire  $u(0) \neq 0$

$$u'(0) = L^{-1}(u(0)) \begin{pmatrix} x'(0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) Soit  $x(\tau)$  une solution paramétrée par  $\tau$

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\mu(x(\tau))} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \frac{dt(\tau)}{d\tau}$$

Pour la solution considérée  $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\mu(x(\tau))}$  permet de déter-

miner  $t$  par quadrature, en fonction de  $\tau$ . Comme  $t$  est une fonction monotone croissante de  $\tau$ ,  $\tau$  peut donc être défini en fonction de  $t$  par fonction inverse. On obtient alors  $x(\tau(t))$ , mouvement de  $M$  paramétré par  $t$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i'} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial x_i} T - \mu \left[ \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \dot{x}_i \frac{\partial T}{\partial x_i'} \right] \\ &= \mu \frac{d}{d\tau} \frac{\partial T}{\partial x_i'} - \frac{\partial \mu}{\partial x_i} T - \mu \frac{\partial T}{\partial x_i} + 2T \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \\ &= \mu \left[ \frac{d}{d\tau} \frac{\partial T}{\partial x_i'} - \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial x_i} T = \mu \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu}{\partial x_i} U = \frac{\partial U}{\partial x_i} \\ &= U_{,i} = E = 0 \end{aligned}$$

$\bar{T} - \bar{U} = 0$  est conséquence de  $E = T - U = 0$

II. 1)  $\mathcal{U}_0 = h\|u\|^2 + 2k$ . Donc  $\mathcal{U}_0$  ne dépend de  $u$  que par  $\|u\|$ .

$$\mathcal{C}_0 = \frac{m}{2}\|u\|^2 = \frac{m}{2\|u\|^2}(\|x'\|^2 + \omega^2)$$

$$T = \frac{m}{2\|u\|^2}\|x'\|^2 \quad \mu = \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{\|u\|^2}$$

$$\bar{T} = \frac{m}{2\|u\|^2}\|x'\|^2\|u\|^4 \frac{1}{\|u\|^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{T} = \frac{m}{2}\|\dot{x}\|^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{U} = \frac{1}{2\pi}(2h\pi + 2k) = \frac{h}{\pi} + h \end{array} \right.$$

$\bar{U}$  est donc le potentiel képlérien.

$\bar{T} - \bar{U} = 0$  permet d'interpréter  $h$  comme étant l'intégrale d'é-

nergie  $\frac{m}{2}\|\dot{x}\|^2 - \frac{k}{\pi}$ . Par conséquent, si on considère dans  $\mathbb{R}^4$  les mouvements de  $M$  d'énergie cinétique  $\mathcal{C}_0$ , de fonction de forces  $\mathcal{U}_0$ , tels que  $\omega=0$  et  $\mathcal{C}_0 - \mathcal{U}_0 = 0$ , on obtient d'une part par  $\varphi$ , d'autre part par le changement temporel les mouvements d'énergie  $h$  de  $\mathbb{R}^3$ . Réciproquement, du fait de la correspondance des conditions initiales et des énergies, tout mouvement d'énergie  $h$  de  $\mathbb{R}^3$  peut être associé à au moins un mouvement de  $\mathbb{R}^4$  vérifiant  $\omega=0$  et d'énergie nulle par ce procédé. Donc dans  $\mathbb{R}^4$  on doit considérer les 2 conditions  $\omega=0$  et  $\mathcal{C}_0 - \mathcal{U}_0 = 0$ .

Condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement de

$M$  soit borné :

Dans  $\mathcal{E}_4$  les équations sont  $mu'' - 2hu = 0$  soit  $u'' - \frac{2h}{m}u = 0$

Le mouvement est borné ssi  $h < 0$  auquel cas  $u_i$  est sinusoidale. Posons  $\alpha^2 = -\frac{2h}{m}$ ; on obtient  $u_i = a_i \cos \alpha \tau + b_i \sin \alpha \tau$

avec  $\alpha = \sqrt{\frac{2h}{m}}$

Conditions:  $\boxed{\omega = 0}$

$$\begin{aligned} \omega = & (a_4 \cos \alpha \tau + b_4 \sin \alpha \tau)(-a_2 \sin \alpha \tau + b_2 \cos \alpha \tau) \\ & - (a_3 \cos \alpha \tau + b_3 \sin \alpha \tau)(a_2 \sin \alpha \tau + b_2 \cos \alpha \tau) \\ & + (a_2 \cos \alpha \tau + b_2 \sin \alpha \tau)(-a_3 \sin \alpha \tau + b_3 \cos \alpha \tau) \\ & - (a_1 \cos \alpha \tau + b_1 \sin \alpha \tau)(-a_4 \sin \alpha \tau + b_4 \cos \alpha \tau) \end{aligned}$$



$$\omega = \alpha(a_4 b_1 - a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_1 b_4) \cos^2 \alpha \tau + \alpha(a_4 b_1 - a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_1 b_4) \sin^2 \alpha \tau$$

$$= \alpha(a_4 b_1 - a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_1 b_4) \tau$$

D'autre part  $\mathcal{L} \cdot \mathcal{V}_0 = 0$ , donc

$$0 = \frac{m}{2} \alpha^2 \sum (-a_i \sin \alpha \tau + b_i \cos \alpha \tau)^2 - h \sum (a_i \cos \alpha \tau + b_i \sin \alpha \tau)^2 - 2k \tau = 0$$

$$= -h \left( \sum (-a_i \sin \alpha \tau + b_i \cos \alpha \tau)^2 + (a_i \cos \alpha \tau + b_i \sin \alpha \tau)^2 \right) - 2k \tau = 0$$

$$0 = -h (\|a\|^2 + \|b\|^2) - 2k \tau$$

Comme  $\|u\|^2 = 2\tau$ , un mouvement est borné dans  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si il est borné dans  $\mathbb{R}^4$ . Donc pour les mouvements bornés dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère les mouvements  $h \leq 0$ . Ayant déterminé plus haut les solutions  $u(\tau)$ , on a  $x(\tau) = \varphi(u(\tau))$

puis  $d\tau = \frac{1}{\|u(\tau)\|^2} dt$  donc  $dt = \int \|u(\tau)\|^2 d\tau$  d'où  $t(\tau)$

On obtient ainsi  $x$  et  $t$  paramétrés par  $\tau$ , d'où l'intégration.

2) La trajectoire dans  $\mathcal{E}_4$  est dans un plan fixe.

$$u'' - \frac{2h}{m} u = 0$$

$$h < 0 \quad \alpha^2 = -\frac{2h}{m}$$

$$u = a \cos \alpha \tau + b \sin \alpha \tau$$

$u \in \text{plan}(a, b)$ , plan affine passant par 0.

$$h = 0 \quad u = a\tau + b$$

$u \in \text{plan}(a, b), \mathbb{M}$  dans plan affine passant par 0.

$$h > 0 \quad \alpha^2 = \frac{2h}{m} \quad u = a e^{\alpha \tau} + b e^{-\alpha \tau}$$

$u \in \text{plan}(a, b), \mathbb{M}$  dans un plan affine passant par 0.

Remarquons que ce plan n'est pas quelconque car  $(a, b)$  vérifie la condition

$$a_4 b_1 - a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_1 b_4 = 0$$

Le plan  $(u_1, u_2)$  passant par 0 est invariant car

$$u_3'' - \frac{2h}{m} u_3 = 0$$

$$u_4'' - \frac{2h}{m} u_4 = 0$$

$\Rightarrow$  et

$$u_3(0) = u_3'(0) = 0$$

$$u_4(0) = u_4'(0) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_3(t) = 0 \\ u_4(t) = 0 \end{cases}$$

Considérons les mouvements dans ce plan. On a alors :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \\ x_2 = u_1 u_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Les orbites sont dans le plan  $x_3 = 0$  et dans ce plan

$x_1 + i x_2 = \frac{1}{2} (u_1 + i u_2)^2$ . C'est une transformation conforme du plan  $(u_1, u_2)$  dans le plan  $(x_1, x_2)$ . Pour l'étude des trajectoires d'un même plan, cette transformation conforme suffit, mais toutes les trajectoires du problème képlérien n'étant pas dans le même plan, l'application  $\varphi$  de  $\mathcal{E}_4$  dans  $\mathcal{E}_3$  est essentielle.

3) Quand  $M \rightarrow 0$  il n'y a pas de singularité dans  $\mathcal{E}_4$  (la vitesse est finie, l'accélération est nulle), alors que pour  $M \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{E}_3$ , il y a singularité dite de "collision" (l'accélération est infinie). Par conséquent, pour le passage à la collision, on a intérêt à remplacer  $M$  par  $M$ . Cette opération s'appelle une "régularisation". Dans le cas du plan, elle est due à Lévi-Civita ; dans le cas de  $\mathcal{E}_3$  à Stiefel.

Remarquons que, de façon remarquable, on a identifié le problème képlérien de  $\mathcal{E}_3$  à un oscillateur harmonique de  $\mathcal{E}_4$ !

III. 1) 
$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = \frac{m}{2} \|u\|^2 \\ \mathcal{U}_0 = h \|u\|^2 + 2k + \frac{a}{2} \|u\|^2 (u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2) \end{cases}$$

Ici  $\mathcal{U}_0$  ne dépend pas que de  $\|u\|$ , d'où la différence avec II. Cependant, montrons que  $\omega$  est encore une intégrale première. Posons  $R_1 = u_1^2 + u_4^2$   $R_2 = u_2^2 + u_3^2$

Alors  $\mathcal{U}_0 = h(R_1 + R_2) + 2k + a(R_1 + R_2) \frac{R_1 - R_2}{2}$

Donc  $\mathcal{U}_0$  est une fonction de  $R_1$  et  $R_2$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= u_4 u_1' - u_1 u_4' + u_2 u_3' - u_3 u_2' = u_4 \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial u_4} + u_2 \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial u_3} - u_3 \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial u_2} \\ &= u_4 \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial R_1} 2u_1 - u_1 \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial R_1} 2u_4 + u_2 \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial R_2} 2u_3 - u_3 \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial R_2} 2u_2 = 0 \end{aligned}$$

Donc  $\omega$  est encore une intégrale première.

Considérons les mouvements  $\Omega$  pour lesquels  $\omega(t) = \alpha$ . La méthode du I peut alors être appliquée dans ce cadre, bien que  $U_0$  ne soit pas fonction de  $\|\dot{x}\|$  parce que  $U_0$  est fonction de  $(u_1^2 + u_4^2)$  et  $(u_2^2 + u_3^2)$  et que de ce fait,  $\omega$  est intégrale première et que  $U_0$  est une fonction uniquement de  $x_1, x_2, x_3$ .

$$C_0 = \frac{m}{4\pi} (\|\dot{x}\|^2 + \omega^2) \text{ Donc } T = \frac{m}{4\pi} (\|\dot{x}\|^2) = \frac{m}{4\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)$$

$$U_0 = 2\pi h + 2k + 2a\pi x_1 \text{ est une fonction de } x_1, x_2, x_3$$

Prenons toujours  $\mu = \frac{1}{2\pi}$

$$\begin{cases} \bar{T} = \frac{m}{2} \|\dot{x}\|^2 \\ \bar{U} = \frac{1}{2\pi} U = h + \frac{k}{\pi} + ax_1 \end{cases}$$

On trouve donc les solutions d'énergie  $h(\bar{T} - \bar{U} = 0)$  de la fonction de force  $U = \frac{k}{\pi} + ax_1$

2) Pour  $M_1$   $U_{01} = h(u_1^2 + u_4^2) + \frac{a}{2} (u_1^2 + u_4^2)^2$

Pour  $M_2$   $U_{02} = h(u_2^2 + u_3^2) - \frac{a}{2} (u_2^2 + u_3^2)^2$

$U_{01}$  et  $U_{02}$  sont des fonctions de  $\sqrt{u_1^2 + u_4^2}$ ,  $\sqrt{u_2^2 + u_3^2}$  respectivement. Les mouvements de  $M_1$  et  $M_2$  sont donc des mouvements à accélération centrale très classiques. Pour  $M_1$  et  $M_2$  on a l'intégrale des aires et le problème s'intègre de façon très classique. On a :

$$\begin{cases} m(u_1 u_4' - u_4 u_1') = C_1 & m\left(\dot{r}_{14}^2 + \frac{C_1^2}{2\pi r_{14}^2}\right) = U_{01} + k_1 \\ m(u_2 u_3' - u_3 u_2') = C_2 & m\left(\dot{r}_{23}^2 + \frac{C_2^2}{2\pi r_{23}^2}\right) = U_{02} + k_2 \end{cases}$$

Les équations en  $r_{14}$  et  $r_{23}$  sont du type classique  $\dot{r}^2 = f(r)$  et s'intègrent par quadratures ( $t = \int \frac{dr}{\sqrt{f(r)}}$ ). Ensuite les intégrales des aires permettent de calculer par quadratures les angles polaires  $m r_{14}^2 \dot{\theta}_{14} = C_1$   $m r_{23}^2 \dot{\theta}_{23} = C_2$

On sait que l'étude qualitative des mouvements  $\ddot{\theta} = f(\theta)$  se fait par la discussion  $f(\theta) \geq 0$ .

Pour  $M_1$  
$$-\frac{mC_1^2}{2R_1} + hR_1 + \frac{a}{2} R_1^2 + k_1 \geq 0$$

Pour  $M_2$  
$$-\frac{mC_2^2}{2R_2} + hR_2 - \frac{a}{2} R_2^2 + k_2 \geq 0$$

Soit 
$$\begin{cases} aR_1^3 + 2hR_1^2 + 2k_1R_1 - mC_1^2 \geq 0 \\ -aR_2^3 + 2hR_2^2 + 2k_2R_2 - mC_2^2 \geq 0 \end{cases}$$

Le mouvement de  $M_2$  est toujours borné car l'inégalité n'a pas lieu si  $R_2 \rightarrow \infty$ . On ne peut pas conclure pour  $M_1$  : il existe des mouvements non bornés puisque l'inégalité est vraie si

$R_1 \rightarrow \infty$ . Par contre, si le polynôme en  $R_1$  admet au moins 2 racines positives, il existe des mouvements bornés pour  $M_2$ .

Si le mouvement de  $M_1$  est associé à un mouvement de  $M_2$  on aura  $\omega(t) = 0$  donc  $-C_1 + C_2 = 0$  donc  $C_1 = C_2$

D'autre part si l'énergie totale est nulle :  $2k = k_1 + k_2$

IV. 1) C'est la fameuse expression du champ de vecteurs d'un solide

$\vec{V}(M) = \vec{V}(O) + \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$  où  $\vec{\Omega}$  est la rotation instantanée, généralisée à  $\mathcal{E}_n$ .

Nous allons la démontrer par l'équiprojectivité très classique  $\frac{d}{dt} (\|M_1, M_2\|^2) = 0$  donc  $(\vec{V}(M_1) - \vec{V}(M_2)) \cdot \vec{M}_1 \vec{M}_2 = 0$

Soit  $M_i$  tel que  $\vec{OM}_i = \vec{e}_i$  :  $(\vec{V}(M) - \vec{V}(M_i)) \cdot (\vec{OM} - \vec{OM}_i) = 0$

C'est-à-dire 
$$\underbrace{(\vec{V}(M) - \vec{V}(O)) + \vec{V}(O) - \vec{V}(M_i))}_{=0} \cdot \underbrace{(\vec{OM} - \vec{OM}_i)}_{=0} = 0$$

Donc  $(\vec{V}(M) - \vec{V}(O)) \cdot \vec{OM}_i = (\vec{V}(O) - \vec{V}(M_i)) \cdot \vec{OM}$

$(\vec{V}(M) - \vec{V}(O)) \cdot \vec{e}_i = (\vec{V}(O) - \vec{V}(M_i)) \cdot \vec{OM}$

Donc la  $i^{\circ}$  composante de  $\vec{V}(M) - \vec{V}(O)$  est une forme linéaire par rapport à  $\vec{OM}$ . Donc l'application  $\vec{OM} \rightarrow \vec{V}(M) - \vec{V}(O)$  est linéaire.

$$\vec{V}(M) - \vec{V}(O) = \vec{\Omega}(\vec{OM})$$

Montrons que  $\tilde{\Omega}$  est antisymétrique.

$$(V(M) - V(O)) \cdot OM = 0 \text{ donc } \tilde{\Omega}(OM) \cdot OM = 0$$

Réciproquement si  $V(M) = V(O) + \tilde{\Omega}(OM)$

Montrons que  $\mathcal{A}$  est bien un sous espace affine (généralisant l'axe central).

$$\begin{aligned} V(M) = \text{Ker } \tilde{\Omega} &\Leftrightarrow \tilde{\Omega}(V(M)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \tilde{\Omega}(V(O)) + \tilde{\Omega}^2(OM) = 0 \\ \tilde{\Omega}^2(OM) &= -\tilde{\Omega}(V(O)) \end{aligned}$$

Or  $\tilde{\Omega}$  est un endomorphisme antisymétrique. On sait que

$$E_n = \text{Ker } \tilde{\Omega} \oplus \text{Im } \tilde{\Omega} \quad \text{somme directe orthogonale}$$

et que 
$$\begin{cases} \text{Im } \tilde{\Omega}^2 = \text{Im } \tilde{\Omega} \\ \text{Ker } \tilde{\Omega}^2 = \text{Ker } \tilde{\Omega} \end{cases}$$

Donc  $\tilde{\Omega}^2(OM) = -\tilde{\Omega}(V(O))$  admet au moins une solution et

$\mathcal{A}$  n'est pas vide. D'autre part si  $M \in \mathcal{A}, M' \in \mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned} V(M) - V(M') &= \tilde{\Omega}(MM') \in \text{Ker } \tilde{\Omega} \\ \Leftrightarrow \tilde{\Omega}^2(MM') &= 0 \\ \Leftrightarrow MM' &\in \text{Ker } \tilde{\Omega}^2 = \text{Ker } \tilde{\Omega} \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{A}$  est un sous espace affine de direction  $\text{Ker } \tilde{\Omega}$ .

$V$  est constant sur  $\mathcal{A}$  car  $V(M) - V(M') = \tilde{\Omega}(MM') = 0$

2) Ecrivons l'équation de Lagrange relative à  $y$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \dot{y}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

Si  $\frac{\partial \omega}{\partial y} \neq 0$  on obtient une équation de la forme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} + \lambda(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = 0, \lambda(t) \text{ calculée le long du mouvement.}$$

Donc  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}(0) e^{\int \lambda(t) dt}$

Si  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}(0) = 0$  alors  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}(t) = 0$

Ecrivons alors pour  $\Omega$  l'équation en  $x_i$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}_i} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

Pour  $\Omega$  :  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = 0$  donc

Soit  $T = \mathcal{L}(x, \dot{x}, \omega)$  calculée par  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = 0$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \quad \text{car } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = 0$$

De même  $\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}$

Donc  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}$

L'identification ici est plus simple que dans I, II, III car nous ne faisons pas de changement temporel.

3)  $\Lambda$  est la matrice de Gram des lignes de  $\Lambda$ . L'élément  $(i, j)$  est le produit scalaire  $L_i \cdot L_j$ .

$$\frac{d}{dt} (L_n \cdot L_n) = \frac{d}{dt} V^2 = 2V \cdot \frac{dV}{dt} = 2V \cdot \tilde{\Omega}(V) = 0$$

car  $\tilde{\Omega}$  est antisymétrique.

$$\frac{d}{dt} (L_i \cdot L_j) = \frac{d}{dt} \left( \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial u^k} \frac{\partial x_j}{\partial u^k} \right)$$

Or  $\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \dot{u}^j = \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} u^j$

Si  $f$  est une intégrale première  $\frac{df}{dt} = 0$  donc  $\frac{\partial f}{\partial u^i} u^i = 0$

donc  $\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} u^j + \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u^j} = 0$

donc  $\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u^i} = - \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u^j}$

et  $\frac{d}{dt} (L_i \cdot L_j) = - \frac{\partial x_i}{\partial u^l} \frac{\partial u^l}{\partial u^k} \frac{\partial x_j}{\partial u^k} - \frac{\partial x_i}{\partial u^l} \frac{\partial u^k}{\partial u^l} \frac{\partial x_j}{\partial u^k}$

Or  $\tilde{\Omega}$  étant antisymétrique  $\frac{\partial u^l}{\partial u^i} + \frac{\partial u^k}{\partial u^l} = 0$

et  $\frac{d}{dt} (L_i \cdot L_j) = 0$  pour  $i < n$   $j < n$ .

$$\frac{d}{dt} (L_i \cdot L_n) = \frac{d}{dt} (L_i \cdot V) \quad \text{or } L_i \cdot V = \frac{\partial x_i}{\partial u^k} u^k \quad \text{car } x_i$$

est une intégrale première. Donc  $\frac{d}{dt} (L_i \cdot L_n) = 0$

Considérons un système fondamental d'intégrales premières de  $V: x_1 \dots x_{n-1}$ . Posons  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \omega \end{pmatrix} = \Lambda \dot{u}$

Les  $(n - 1)$  premières lignes de  $\Lambda$  sont indépendantes puisque ce sont les gradients d'un système fondamental d'intégrales premières. La  $n^{\circ}$  ligne est perpendiculaire aux  $(n - 1)$  premières lignes puisqu'elle représente  $V$ .  
Donc aux points où  $V \neq 0$   $\Lambda$  est inversible. On en déduit

$$\dot{u} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\|\dot{u}\|^2 = (\dot{x} \ \omega) {}^t \Lambda^{-1} \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$= (\dot{x} \ \omega) (\Lambda {}^t \Lambda)^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \omega \end{pmatrix}$$

$\Lambda {}^t \Lambda$  s'exprime uniquement au moyen des  $x_i$ .  
Par conséquent  $\mathcal{L}$  est une fonction des  $x_i, \dot{x}_i, \omega$ .  
Si  $\mathcal{U}_0$  ne dépend que des  $x_i$ , c'est-à-dire si  $\mathcal{U}$  est intégrale première, on peut alors appliquer III 2). On considère  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = 0$ , on calcule  $\omega$ , on en déduit dans  $\mathcal{L}_{n-1}$  une énergie cinétique et une fonction de forces.  
Ce schéma généralise I.

#### 4) Applications.

a)  $L$  est du type  $\Lambda$ .

Le champ de vitesses est  $V = (u_4 \ u_3 \ u_2 \ -u_1)$  avec

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V(M) = \tilde{\Omega}(OM) \text{ car } V(0) = 0$$

$x_1, x_2, x_3$  sont bien des intégrales premières de  $V$  car

$L_i \cdot L_i = 0$  dans  $L$ .

b) Exemple dans  $\mathcal{L}_2$   $V(-u_2, u_1) \quad \Lambda = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{cases} x = \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} \\ \omega = -u_2 \dot{u}_1 + u_1 \dot{u}_2 \end{cases}$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \|\dot{u}\|^2, \mathcal{U}_0(x) \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}^2 + \omega^2 = 2x (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2)$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{m}{2x} (\dot{x}^2 + \omega^2) \quad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \omega} = 0 \Leftrightarrow \omega = 0 \quad T = \frac{m}{2x} \dot{x}^2 \quad U = U(x)$$

Les mouvements de la droite  $\mathcal{E}_1$ , associés à  $(T, v)$  s'identifient à des mouvements du plan  $\mathcal{E}_2$  associés à  $(\frac{m}{2} \|\dot{u}\|^2, \mathcal{U}(x))$  avec  $-v_2 \dot{u}_1 + v_1 \dot{u}_2 = 0$ .

$$c) \quad V = (-\alpha v_2 \quad \alpha v_1 \quad v) \quad \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V(M) = v + \tilde{\Omega}(OM)$$

$$x_1 = \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} \quad x_2 = -\frac{v_3}{v} + \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{u_1}{u_2} \quad \omega = -\alpha \dot{u}_1 u_2 + \alpha v_1 \dot{u}_2 + v \dot{u}_3$$

$$\Lambda \text{ et } \Lambda = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2x_1 \alpha^2} & 0 \\ 0 & 0 & v^2 + 2\alpha^2 x_1 \end{pmatrix}$$

$$\|\dot{u}\|^2 = \frac{1}{2x_1} \dot{x}_1^2 + 2\alpha^2 x_1 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{v^2 + 2\alpha^2 x_1} \omega^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = 0 \Rightarrow \omega = 0 \quad T = \frac{m}{2} \left[ \frac{1}{2x_1} \dot{x}_1^2 + 2x_1 \alpha^2 \dot{x}_2^2 \right]$$

$$5) \text{ En effet } \bar{\mathcal{L}} = T + \alpha \omega^2 = T(x, \dot{x}) + \alpha \omega^2$$

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \omega} = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$$

On peut donc considérer les mouvements de  $\mathcal{E}_3$  comme associés à des mouvements de  $\mathcal{E}_4$  avec  $\bar{\mathcal{L}} = T_0 \Phi + \omega^2$   
 $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_0 \Phi$  et  $\omega = 0$ .



## PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

N.B. — Les troisième et quatrième parties sont indépendantes de la deuxième partie.

\*  
\* \*

### DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS

1° Dans tout le problème,  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{R}$  l'ensemble des réels,  $\mathbb{R}^+$  l'ensemble des réels positifs ou nuls,  $\mathbb{R}^-$  l'ensemble des réels négatifs ou nuls. Si  $a$  et  $b$  sont deux réels, on utilisera parfois la notation abrégée  $a \wedge b$  pour désigner le minimum de  $a$  et de  $b$ .

2° Désignant par  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé, on appelle variable aléatoire réelle (en abrégé *v.a.r.*) de loi  $\mu$  une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ , mesurable relativement à la tribu  $\mathcal{F}$  et à la tribu borélienne de  $\mathbb{R}$ , telle que la probabilité image de  $P$  par cette application soit la mesure  $\mu$  sur  $\mathbb{R}$ .

On note  $1_A$  la fonction indicatrice d'un ensemble  $A \in \mathcal{F}$ , c'est-à-dire la *v.a.r.* qui vaut 1 sur  $A$  et 0 sur le complémentaire de  $A$ .

Si  $(X_1, \dots, X_n)$  est une suite de  $n$  *v.a.r.*, on note  $\sigma(X_1, \dots, X_n)$  la plus petite sous-tribu de  $\mathcal{F}$  rendant mesurables ces applications de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

3° Si  $\mathcal{B}$  est une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ , le symbole  $E(X | \mathcal{B})$  désigne l'espérance conditionnelle de la *v.a.r.* intégrable  $X$  par rapport à la tribu  $\mathcal{B}$ , ou plutôt un représentant de cette espérance conditionnelle.

On rappelle l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles : si  $\varphi$  est une fonction convexe, si  $X$  est une *v.a.r.* intégrable telle que  $\varphi(X)$  soit intégrable, alors

$$\varphi(E(X | \mathcal{B})) \leq E(\varphi(X) | \mathcal{B}) \quad \text{p.s.}$$

4° Si  $(\mathcal{B}_n, n \geq 0)$  est une suite de sous-tribus de  $\mathcal{F}$ , croissante pour l'inclusion ( $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1}$ ), et si  $(X_n, n \geq 0)$  est une suite de *v.a.r.* intégrables, on dit que  $(X_n, n \geq 0)$  est une martingale adaptée à  $(\mathcal{B}_n, n \geq 0)$  si chaque  $X_n$  est un représentant de l'espérance conditionnelle  $E(X_{n+1} | \mathcal{B}_n)$  : on écrira simplement  $X_n = E(X_{n+1} | \mathcal{B}_n)$  p.s. On pourra avoir en mémoire le théorème de convergence p.s. des martingales positives, mais son utilisation ne sera pas nécessaire.

Si  $T$  est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , on dira que  $T$  est un temps d'arrêt de la famille  $(\mathcal{B}_n, n \geq 0)$  si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{T = n\} \in \mathcal{B}_n$ .

### PREMIÈRE PARTIE

Soit  $(Z_n, n \geq 0)$  une martingale adaptée à une famille croissante  $(\mathcal{B}_n, n \geq 0)$  de sous-tribus de  $\mathcal{F}$ .

1° a. Montrer que pour tout  $p \geq 0$  et tout  $n \geq 0$  :

$$E(Z_{n+p} | \mathcal{B}_n) = Z_n \quad \text{p.s.}$$

b. Si  $(Z_n, n \geq 0)$  est positive et si on pose  $\underline{Z} = \liminf_{k \rightarrow \infty} Z_k$ , montrer que pour tout  $n \geq 0$  :

$$E(\underline{Z} | \mathcal{B}_n) \leq Z_n \quad \text{p.s.}$$

- c. Si  $(Z_n, n \geq 0)$  est positive et converge p.s. vers une v.a.r.  $Z_\infty$ , et si  $E(Z_\infty) = E(Z_0)$ , montrer que pour tout  $n \geq 0$ ,

$$E(Z_\infty | \mathcal{B}_n) = Z_n \quad \text{p.s.}$$

- 2° a. Soit  $T$  un temps d'arrêt de la famille  $(\mathcal{B}_n, n \geq 0)$ .

Montrer que la suite  $(Z_{n \wedge T}, n \geq 0)$  définie par

$$\begin{aligned} Z_{n \wedge T} &= Z_n && \text{sur } \{T > n\} \\ &= Z_T && \text{sur } \{T \leq n\} \end{aligned}$$

est encore une martingale adaptée à la famille  $(\mathcal{B}_n, n \geq 0)$ .

- b. On pose pour  $b > 0$

$$\begin{aligned} T_b &= \inf \{n \geq 0 : Z_n > b\} \\ &= +\infty && \text{si } Z_n \leq b \quad \text{pour tout } n \geq 0. \end{aligned}$$

Montrer que  $T_b$  est un temps d'arrêt de la famille  $(\mathcal{B}_n, n \geq 0)$ .

- c. Montrer que si  $(Z_n, n \geq 0)$  est positive,

$$b P(T_b < +\infty) \leq E(Z_{T_b} \mathbf{1}_{\{T_b < +\infty\}}) \leq E(Z_0),$$

et en déduire que  $Z^* = \sup_{n \geq 0} Z_n$  est finie p.s.

## DEUXIÈME PARTIE

Soit  $(Y_k, k \geq 1)$  une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées de loi commune  $\mu$  définie par  $\mu(\{1\}) = \mu(\{-1\}) = 1/2$ . On pose

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 && \mathcal{B}_0 = (\Phi, \Omega) \\ X_n &= \sum_{k=1}^n Y_k && \mathcal{B}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n) \quad \text{pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

Si  $c$  et  $d$  sont deux entiers  $\geq 1$ , on pose

$$\begin{aligned} U &= \inf \{n \geq 1 : X_n \geq c \text{ ou } X_n \leq -d\} \\ &= +\infty && \text{si } -d < X_n < c \quad \text{pour tout } n \geq 1. \end{aligned}$$

Le but de cette partie est d'obtenir la transformée de Laplace de la loi du temps d'atteinte  $U$  de la double barrière  $\{c, -d\}$  par la promenade aléatoire  $(X_n, n \geq 0)$ .

- 1° Pour  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ , montrer que la suite  $(S_n^\alpha, n \geq 0)$  définie par

$$S_n^\alpha = (\cos \alpha)^{-n} \cos \left\{ \alpha \left( X_n - \frac{c-d}{2} \right) \right\}$$

est une martingale adaptée à  $(\mathcal{B}_n, n \geq 0)$ .

- 2° On suppose désormais  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{c+d}$ . Montrer :

a. Que  $(S_{n \wedge U}^\alpha, n \geq 0)$  est une martingale positive adaptée à la famille  $(\mathcal{B}_n, n \geq 0)$  ;

b. Que pour tout  $n \geq 0$ ,

$$E((\cos \alpha)^{-(n \wedge U)}) \leq \frac{\cos \left\{ \alpha \frac{c-d}{2} \right\}}{\cos \left\{ \alpha \frac{c+d}{2} \right\}} ;$$

c. Que  $P(U < +\infty) = 1$  ;

d. Que  $(\cos \alpha)^{-U}$  est intégrable.

3° Calculer, toujours pour  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{c+d}$ , la valeur de  $E((\cos \alpha)^{-U})$ .

### TROISIÈME PARTIE

Soit  $(Z_n, n \geq 0)$  une martingale positive adaptée à une famille croissante  $(\mathcal{B}_n, n \geq 0)$  de sous-tribus de  $\mathcal{A}$ . On suppose que  $Z_0 = 1$  et que la suite  $(Z_n, n \geq 0)$  tend p.s. quand  $n$  tend vers  $+\infty$  vers une v.a.r.  $Z_\infty$ . On pose pour tout  $k \geq 1$ .

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{Z_k}{Z_{k-1}} && \text{sur } \{Z_{k-1} > 0\} \\ &= 1 && \text{sur } \{Z_{k-1} = 0\} \end{aligned}$$

On suppose que  $\alpha_k \text{ Log } \alpha_k$  est intégrable pour tout  $k \geq 1$  (ici  $0 \text{ Log } 0 = 0$ ) et on va introduire la condition

$$(c) \quad E \left( \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} E(\alpha_k \text{ Log } \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1}) \right\} \right) < +\infty$$

après lui avoir donné un sens grâce au résultat de la question 2°.

Le but de cette partie est de montrer que sous la condition (c),  $E(Z_\infty) = 1$ .

1° Montrer que pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\mathbf{1}_{\{Z_{k-1}=0\}} \leq \mathbf{1}_{\{Z_k=0\}} \quad \text{p.s.}$$

2° Montrer que pour tout  $k \geq 1$ ,

$$E(\alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1}) = 1 \quad \text{p.s.}$$

puis que

$$E(\alpha_k \text{ Log } \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1}) \geq 0 \quad \text{p.s.}$$

3° Soit  $\lambda \in ]0, 1[$ .

a. Montrer que pour tout  $k \geq 1$ ,  $(\alpha_k)^\lambda$  est intégrable et

$$E((\alpha_k)^\lambda \mid \mathcal{B}_{k-1}) > 0 \quad \text{p.s.}$$

b. Soit  $P_k$  la probabilité définie sur  $(\Omega, \mathcal{B}_k)$  par

$$P_k(A) = E(\mathbf{1}_A \alpha_k), \quad A \in \mathcal{B}_k, \quad k \geq 1.$$

Montrer que les restrictions à  $\mathcal{B}_{k-1}$  de  $P$  et  $P_k$  ont mêmes ensembles négligeables. Si  $E_k$  désigne l'espérance relative à  $P_k$ , montrer que

$$E(\alpha_k \text{ Log } \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1}) = E_k(\text{Log } \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1}) \quad \text{p.s.}$$

et que

$$E((\alpha_k)^\lambda \mid \mathcal{B}_{k-1}) = E_k((\alpha_k)^{\lambda-1} \mid \mathcal{B}_{k-1}) \quad \text{p.s.}$$

c. En déduire que

$$\exp \{(\lambda - 1) E(\alpha_k \text{ Log } \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1})\} \leq E((\alpha_k)^\lambda \mid \mathcal{B}_{k-1}) \quad \text{p.s.}$$

4° On considère pour  $n \geq 1$

$$R_n = \sum_{k=1}^n E(\alpha_k \text{ Log } \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1})$$

et on note

$$R_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n \quad \text{p.s.}$$

On suppose, comme on l'a annoncé au début de cette partie, qu'est vérifiée la condition

$$(c) \quad E(\exp R_\infty) < +\infty.$$

Pour tout  $\lambda \in ]0, 1[$ , on introduit la suite  $(Y_n(\lambda), n \geq 0)$  définie par

$$Y_0(\lambda) = 1$$

$$Y_n(\lambda) = \prod_{k=1}^n \frac{(\alpha_k)^\lambda}{E((\alpha_k)^\lambda | \beta_{k-1})} \quad \text{p.s.}$$

et on pose

$$\bar{Y}(\lambda) = \limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n(\lambda)$$

a. Montrer que  $(Y_n(\lambda), n \geq 0)$  est une martingale positive adaptée à  $(\beta_n, n \geq 0)$ .

b. Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$Y_n(\lambda) \leq (Z_n)^\lambda \exp \{ (1 - \lambda) R_n \} \quad \text{p.s.}$$

c. Montrer que pour tout  $B \in \mathcal{F}$  et tout  $n \geq 1$ ,

$$E(\mathbf{1}_B Y_n(\lambda)) \leq (E(\mathbf{1}_B \exp R_\infty))^{1-\lambda}$$

d. Montrer que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $E(\mathbf{1}_{\{Y_n(\lambda) \geq \bar{Y}(\lambda) + \varepsilon\}} Y_n(\lambda))$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  et en déduire que  $E(\bar{Y}(\lambda)) \geq 1$ .

e. Montrer que

$$E(\bar{Y}(\lambda)) \leq (E(Z_\infty))^\lambda (E(\exp R_\infty))^{1-\lambda}.$$

f. En conclure que sous la condition (c),  $E(Z_\infty) = 1$ .

#### QUATRIÈME PARTIE

Soit  $(Y_k, k \geq 1)$  une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées dont on désigne par  $\mu$  la loi commune et soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  la fonction définie par

$$\varphi(u) = \text{Log } E(\exp \{ u Y_1 \}) = \text{Log} \int e^{uz} d\mu(x).$$

On pose

$$X_0 = 0 \quad \beta_0 = (\Omega, \Phi)$$

$$X_n = \sum_{k=1}^n Y_k \quad \beta_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n) \quad \text{pour } n \geq 1,$$

et pour un réel  $a \geq 0$ ,

$$T = \inf \{ n \geq 1 : X_n \geq a \}$$

$$= +\infty \text{ si } X_n < a \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Le but de cette partie est d'étudier en fonction des valeurs de  $\varphi$  la transformée de Laplace  $E(\exp \theta T)$  de la loi de  $T$ , et principalement de déterminer pour quelles valeurs de  $\theta$  cette expression est finie.

1° Soit  $I$  l'ensemble des  $u \in \mathbb{R}$  tels que  $\varphi(u) < +\infty$ .

a. Montrer que la fonction  $\varphi$  est convexe et en déduire que  $I$  est un intervalle contenant l'origine 0.

b. Si  $\mu$  n'est pas une mesure de Dirac, montrer que  $\varphi$  est strictement convexe sur  $I$ .

- c. Si  $(u_n, n \geq 1)$  est une suite d'éléments de  $I$  tendant vers un nombre réel  $v$ , montrer que  $\varphi(u_n) \rightarrow \varphi(v) \leq +\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- d. Montrer que pour tout réel  $u$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $c$  telle que pour tout  $v \in ]u - \varepsilon, u + \varepsilon[$  et pour tout  $x$  réel, on ait  

$$|x| \exp vx \leq c (\exp \{(u + 2\varepsilon)x\} + \exp \{(u - 2\varepsilon)x\}).$$
 En déduire que  $\varphi$  est dérivable à l'intérieur  $\overset{\circ}{I}$  de  $I$ , donner une expression de  $\varphi'$  et montrer que  $\varphi'$  est croissante et continue dans  $\overset{\circ}{I}$ .
- e. Montrer que la suite  $(Z_n^u = \exp \{u X_n - n \varphi(u)\}, n \geq 0)$ , où  $u \in I$ , est une martingale positive adaptée à la famille  $(\mathcal{B}_n, n \geq 0)$ .
- f. Si  $\mu$  n'est pas une mesure de Dirac, et si  $u \in I \setminus \{0\}$ , comparer  $Z_n^u$  et  $(Z_n^{u/2})^2$ , et en déduire que  $(Z_n^u, n \geq 0)$  converge p.s. vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2° On suppose dans tout ce paragraphe que

$$\int x^- d\mu(x) < \int x^+ d\mu(x) \leq +\infty,$$

où  $x^+ = \max(x, 0)$ ,  $x^- = -\min(x, 0)$ .

- a. Montrer que  $P(T < +\infty) = 1$  et que  $E(Z_T^u) \leq 1$  pour tout  $u \in I$ .
- b. Soit  $\psi$  la fonction définie sur  $\overset{\circ}{I}$  par :

$$\psi(u) = u\varphi'(u) - \varphi(u).$$

Montrer à l'aide du paragraphe III.4° que l'on a  $E(Z_T^u) = 1$  dès que  $E(\exp \{\psi(u) T\}) < +\infty$ .

- c. Montrer que  $\varphi(u) \in [0, +\infty]$  pour  $u \geq 0$ .
- d. Pour tout  $c > 0$ , on considère la suite  $(Y_k^c = \min(Y_k, c), k \geq 1)$ ;  $\mu^c, \varphi^c, T^c, Z_{T^c}^{u,c}$  désignent respectivement les valeurs de  $\mu, \varphi, T, Z_T^u$  associées à cette suite  $(Y_k^c, k \geq 1)$ .  
 Montrer que si  $u \in I \cap \mathbb{R}^-$ , alors  $\varphi^c(u) < +\infty$ , que si  $c$  est choisi assez grand, alors  $P(T^c < +\infty) = 1$ , et que si ces deux conditions sont réalisées, alors  

$$E(Z_{T^c}^{u,c}) \geq \exp \{u(a+c)\} E(\exp \{-\varphi^c(u) T^c\}).$$

Montrer, toujours pour  $u \in I \cap \mathbb{R}^-$ , que  $\varphi^c(u)$  converge vers  $\varphi(u)$  lorsque  $c$  tend vers  $+\infty$ . En déduire par comparaison de  $T$  et  $T^c$  que :

$$E(\exp \theta T) < +\infty \quad \text{pour } \theta < -\inf \varphi,$$

où  $\inf \varphi$  désigne la borne inférieure de  $\varphi(u)$  pour  $u$  dans  $I$ .

- e. On suppose  $\mu(\mathbb{R}^+) = 1$ ,  $\mu(\{0\}) > 0$  et  $a > 0$ . On pose  

$$T_0 = \inf \{n \geq 1 : X_n > 0\}$$

$$= +\infty \quad \text{si } X_n \leq 0 \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Calculer pour tout  $j \geq 1$ ,  $P(T_0 = j)$ . Montrer que  $T_0 \leq T$ , que  $\inf \varphi = \text{Log } \mu(\{0\})$  et que  

$$E(\exp \theta T) = +\infty \quad \text{pour } \theta = -\inf \varphi.$$

- f. On suppose  $\mu(\mathbb{R}^+) < 1$ . Montrer que  $\varphi(u)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $u$  tend vers  $-\infty$  et que  $\varphi$  atteint sa borne inférieure pour une valeur  $u_0 \leq 0$ .
- g. On suppose que  $\mu(\mathbb{R}^+) < 1$  et qu'il existe  $c > 0$  tel que  $\mu(]-\infty, c]) = 1$ . Montrer que  

$$E(\exp \theta T) < +\infty \quad \text{pour } \theta = -\inf \varphi.$$
- h. On suppose que  $\mu(\mathbb{R}^+) < 1$  et qu'il existe un réel  $d < 0$  tel que  $\mu([d, +\infty[) = 1$ . Montrer que  $\mathbb{R}^- \subset I$  et que s'il existait  $\theta > -\varphi(u_0)$  tel que  $E(\exp \theta T) < +\infty$ , alors il existerait  $u_1 < u_0$  tel que  $E(\exp \{\psi(u_1) T\}) < +\infty$ ; comparant les valeurs de  $E(Z_T^{u_1})$  et  $E(Z_T^{u_0})$ , en déduire que  

$$E(\exp \theta T) = +\infty \quad \text{pour } \theta > -\inf \varphi.$$

i. On suppose  $\mu(\mathbb{R}^+) < 1$ . Montrer que

$$E(\exp \theta T) = +\infty \quad \text{pour } \theta > -\inf \varphi.$$

j. Au vu des questions précédentes, pour quelles valeurs de  $\theta$  peut-on affirmer que

$$E(\exp \theta T) < +\infty$$

- si  $\mu$  est la loi gaussienne de moyenne  $m > 0$  et de variance  $\sigma^2 > 0$  ?
- si  $\mu$  est la loi de densité  $\frac{p^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-p(x+1)} (x+1)^{\alpha-1}$  sur  $] -1, +\infty [$ , avec  $\alpha > p > 0$  ?

3° On suppose désormais que les valeurs prises par les v.a.r.  $(Y_k, k \geq 1)$  sont des entiers relatifs inférieurs ou égaux à 1, que  $\mu(\{1\}) > 0$  et que le seuil  $a$  est un entier strictement positif.

a. Montrer que  $X_T = a$  sur  $\{T < +\infty\}$ .

b. Montrer que  $\mathbb{R}^+ \subset I$  et que  $\varphi(u)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $u$  tend vers  $+\infty$ .

c. Soit  $u^* = \max \{u \geq 0 : \varphi(u) = 0\}$ . Montrer que la martingale  $(Z_n^u \wedge T, n \geq 0)$  est bornée pour tout  $u \geq u^*$ , puis que

$$P(T < +\infty) = e^{-au^*}.$$

d. On suppose

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \mu(\{-k\}) < \mu(\{1\}).$$

Montrer que si  $u \in \overset{\circ}{I} \cap \mathbb{R}^-$  et vérifie  $\varphi'(u) \geq 0$ , alors on a  $E(Z_T^u) = 1$ . En déduire la valeur de  $E(\exp \theta T)$  pour toutes les valeurs réelles de  $\theta$  pour lesquelles cette quantité est finie.

e. Calculer  $P(T < +\infty)$  dans les deux cas suivants :

- $\mu(\{1 - k\}) = p(1 - p)^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ , avec  $0 < p \leq \frac{1}{2}$ ;
- $\mu(\{1 - k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$  pour  $k \in \mathbb{N}$ , avec  $\lambda = \frac{e}{e-1}$ .

f. Calculer  $E(\exp \theta T)$  dans les trois cas suivants :

- $\mu(\{1\}) = \mu(\{-1\}) = \frac{1}{2}$ ;
- $\mu(\{1\}) = \mu(\{0\}) = \frac{1}{2}$ ;
- $\mu(\{1 - k\}) = p(1 - p)^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ , avec  $\frac{1}{2} < p < 1$ .

# RAPPORT SUR L'ÉPREUVE «PROBABILITÉS ET STATISTIQUES»

## 1. Analyse du sujet

L'objet du problème était l'étude de la transformée de Laplace de la loi du temps d'atteinte d'une barrière double (partie II) ou simple (partie IV) par une somme de variables aléatoires indépendantes équidistribuées: quand c'est possible, c'est-à-dire lorsque la barrière est atteinte sans être dépassée (partie II et partie IV 3°), on obtient exactement la transformée de Laplace; sinon (partie IV 2°), il faut se contenter de son abscisse de sommabilité. La méthode proposée était basée sur l'arrêt de certaines martingales exponentielles. Après quelques préliminaires sur les martingales (partie I), on demandait de démontrer une condition suffisante (partie III) pour qu'une martingale positive soit uniformément intégrable, ce qui est équivalent au problème suivant important en théorie du filtrage stochastique: si  $Q$ , fonction définie sur  $\mathcal{B}_n$ , est sur chaque tribu  $\mathcal{B}_n$  une probabilité absolument continue par rapport à la probabilité  $P$ ,  $Q$  se prolonge-t-elle en une probabilité sur  $\mathcal{B}_\infty = \bigvee_n \mathcal{B}_n$  absolument continue par rapport à  $P$ ? On proposait d'utiliser cette condition pour traiter la partie IV.

## 2. Corrigé résumé du problème

Première partie 1° a. On sait que si  $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ ,  $E(X|\mathcal{B}) = E(E(X|\mathcal{E})|\mathcal{B})$ . On obtient par récurrence en  $p$

$$E(Z_{n+p} | \mathcal{B}_n) = E(E(Z_{n+p} | \mathcal{B}_{n+p-1}) | \mathcal{B}_n) = E(Z_{n+p-1} | \mathcal{B}_n) = Z_n \quad \text{p.s.}$$

b. Pour  $A \in \mathcal{B}_n$  et  $p \geq 0$ , on a d'après a

$$E(1_A Z_{n+p}) = E(1_A Z_n).$$

Le lemme de Fatou (appliqué à une suite positive) donne

$$E(1_A \liminf_p Z_{n+p}) = E(\liminf_p (1_A Z_{n+p})) \leq E(1_A Z_n),$$

d'où le résultat.

c. D'après b, la v.a.r.  $Z_n - E(Z_\infty | \mathcal{B}_n)$  est p.s. positive, et comme elle est d'espérance nulle, elle est nulle p.s.

$$\begin{aligned}
2^\circ \text{ a. } E(Z_{n+1})_{\Delta T} | \mathcal{B}_n &= E(Z_{n+1} 1_{\{T>n\}} | \mathcal{B}_n) + E(Z_T 1_{\{T \leq n\}} | \mathcal{B}_n) \\
&= 1_{\{T>n\}} E(Z_{n+1} | \mathcal{B}_n) + 1_{\{T \leq n\}} Z_T \\
&= Z_{n\Delta T}.
\end{aligned}$$

car  $\{T \leq n\} \in \mathcal{B}_n$  et  $Z_T 1_{\{T \leq n\}}$  est  $\mathcal{B}_n$ -mesurable.

$$\text{b. } \{T_b = n\} = \left( \bigcap_{k=0}^{n-1} \{Z_k \leq b\} \right) \cap \{Z_n > b\} \in \mathcal{B}_n.$$

c. De  $Z_{T_b} > b$  sur  $\{T_b < +\infty\}$ , on déduit que

$$\text{b. } P(T_b < +\infty) = E(b 1_{\{T_b < +\infty\}}) \leq E(Z_{T_b} 1_{\{T_b < +\infty\}}).$$

Pour tout  $n$ ,

$$E(Z_{T_b} 1_{\{T_b \leq n\}}) \leq E(Z_{n\Delta T_b}) = E(Z_0).$$

L'utilisation du théorème de Beppo-Levi sur l'espérance d'une limite croissante de v.a. positives nous donne

$$E(Z_{T_b} 1_{\{T_b < +\infty\}}) \leq E(Z_0).$$

Or

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \{T_k < +\infty\} = \{Z^* = +\infty\}$$

Donc

$$P(Z^* = +\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(T_k < +\infty) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} E(Z_0) = 0.$$

### Deuxième partie

$$1^\circ E(S_{n+1}^\alpha | \mathcal{B}_n) = (\cos \alpha)^{-(n+1)} \left[ \cos \alpha \left( X_n - \frac{c-d}{2} \right) E(\cos Y_{n+1} | \mathcal{B}_n) - \sin \alpha \left( X_n - \frac{c-d}{2} \right) E(\sin Y_{n+1} | \mathcal{B}_n) \right]$$

Comme  $Y_{n+1}$  est indépendante de  $\mathcal{B}_n$ , il vient

$$E(\cos \alpha Y_{n+1} | \mathcal{B}_n) = E(\cos \alpha Y_{n+1}) = \cos \alpha$$

$$E(\sin \alpha Y_{n+1} | \mathcal{B}_n) = E(\sin \alpha Y_{n+1}) = 0$$

$$E(S_{n+1}^\alpha | \mathcal{B}_n) = S_n^\alpha.$$



$$2^\circ \text{ a. } \{U = n\} = \left( \bigcap_{k=0}^{n-1} \{-d < X_k < c\} \right) \cap (\{X_n \geq c\} \cup \{X_n \leq -d\}) \in \mathcal{F}_n,$$

donc  $U$  est un temps d'arrêt et  $(S_{n \wedge U}^\alpha, n \geq 0)$  est une martingale.

Pour  $n < U$ ,  $-d < X_{n \wedge U} = X_n < c$ .

Pour  $0 < U \leq n$ , si  $X_U \geq c$ , c'est que  $Y_U = 1$  et  $X_{U-1} = c-1$ , donc en fait  $X_U = c$  et si  $X_U \leq -d$ , en fait  $X_U = -d$ .

En définitive,  $-d \leq X_{n \wedge U} \leq c$  p.s., et par conséquent

$$\left| X_{n \wedge U} - \frac{c-d}{2} \right| \leq \frac{c+d}{2}$$

avec égalité si  $U \leq n$ . D'où

$$\cos \alpha \left( X_{n \wedge U} - \frac{c-d}{2} \right) \geq \cos \alpha \frac{c+d}{2} > 0,$$

et la martingale  $S_{n \wedge U}^\alpha$  est positive p.s.

$$\text{b. } \cos \alpha \frac{c-d}{2} = E(S_0^\alpha) = E(S_{n \wedge U}^\alpha) \geq E((\cos \alpha)^{-(n \wedge U)}) \cos \alpha \frac{c+d}{2}.$$

c. Choisissons  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{c+d}[$ . Alors

$$(\cos \alpha)^{-(n \wedge U)} \geq 1_{\{U > n\}} (\cos \alpha)^{-n}$$

$$E((\cos \alpha)^{-(n \wedge U)}) \geq P(U > n) (\cos \alpha)^{-n}$$

d'où  $P(U = +\infty) = \lim_n P(U > n) = 0$  en utilisant la majoration vue en b.

d. La suite  $(\cos \alpha)^{-(n \wedge U)}$  croît p.s. vers  $(\cos \alpha)^{-U}$ . La majoration vue en b est donc valable pour  $E((\cos \alpha)^{-U})$ .

3° La suite  $(S_{n \wedge U}^\alpha, n \geq 0)$  converge p.s. vers  $S_U^\alpha$ , tandis que

$$0 < S_{n \wedge U}^\alpha \leq (\cos \alpha)^{-n \wedge U} \leq (\cos \alpha)^{-U}$$

Par convergence dominée,

$$E(S_U^\alpha) = \lim_n E(S_{n \wedge U}^\alpha) = \cos \alpha \frac{c-d}{2}$$

tandis que l'on vérifie que (voir 2° a)

$$S_U^\alpha = (\cos \alpha)^{-U} \cos \alpha \frac{c+d}{2} \text{ p.s.}$$

### Troisième partie

$$1^\circ E(Z_k 1_{\{Z_{k-1} = 0\}}) = E(Z_{k-1} 1_{\{Z_{k-1} = 0\}}) = 0$$

d'où  $\{Z_k = 0\} \supset \{Z_{k-1} = 0\}$  p.s.

$$2^\circ \quad E(\alpha_k | \mathfrak{B}_{k-1}) = \frac{1_{\{Z_{k-1} > 0\}}}{Z_{k-1}} Z_{k-1} + 1_{\{Z_{k-1} = 0\}} = 1 \quad \text{p.s.}$$

Comme  $x \log x$  est convexe sur  $\mathbb{R}^+$ , d'après l'inégalité de Jensen,

$$E(\alpha_k \log \alpha_k | \mathfrak{B}_{k-1}) \geq 0 \quad \text{p.s.}$$

3° a. D'après l'inégalité de Hölder ou celle de Jensen,

$$E((\alpha_k)^\lambda) \leq (E(\alpha_k))^\lambda = 1.$$

Soit  $B = \{E((\alpha_k)^\lambda | \mathfrak{B}_{k-1}) = 0\} \in \mathfrak{B}_{k-1}$ . Alors,

$$0 = E(1_B (\alpha_k)^\lambda) = E(1_B \alpha_k) = E(1_B E(\alpha_k | \mathfrak{B}_{k-1})) = P(B).$$

b. Si  $A \in \mathfrak{B}_{k-1}$ ,

$$P_k(A) = E(1_A \alpha_k) = E(1_A E(\alpha_k | \mathfrak{B}_{k-1})) = P(A),$$

donc  $P$  et  $P_k$  coïncident sur  $\mathfrak{B}_{k-1}$ . De plus, pour toute v.a.r.  $Z$  telle que  $\alpha_k Z$  soit intégrable,

$$\begin{aligned} E(1_A \alpha_k Z) &= E_k(1_A Z) \\ &= E_k(1_A E_k(Z | \mathfrak{B}_{k-1})) \\ &= E(1_A \alpha_k E_k(Z | \mathfrak{B}_{k-1})) \\ &= E(1_A E(\alpha_k | \mathfrak{B}_{k-1}) E_k(Z | \mathfrak{B}_{k-1})) \\ &= E(1_A E_k(Z | \mathfrak{B}_{k-1})) \end{aligned}$$

d'où

$$E(\alpha_k Z | \mathfrak{B}_{k-1}) = E_k(Z | \mathfrak{B}_{k-1})$$

c. L'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe  $\phi(x) = \exp\{(\lambda-1)x\}$  donne

$$\exp\{(\lambda-1)E_k(\log \alpha_k | \mathfrak{B}_{k-1})\} \leq E_k(\exp\{(\lambda-1) \log \alpha_k\} | \mathfrak{B}_{k-1})$$

d'où le résultat en utilisant b.

$$4^\circ \quad \text{a.} \quad E(Y_{n+1}(\lambda) | \mathfrak{B}_n) = \frac{E((\alpha_{n+1})^\lambda | \mathfrak{B}_n)}{E((\alpha_{n+1})^\lambda | \mathfrak{B}_n)} Y_n(\lambda) = Y_n(\lambda) \quad \text{p.s.}$$

b. D'après 3° c,

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{E((\alpha_k)^\lambda | \mathfrak{B}_{k-1})} \leq \exp\{(1-\lambda)R_n\}$$

De plus

$$\prod_{k=1}^n \alpha_k = Z_n \quad \text{si les } Z_k (k=1, \dots, n) \text{ sont } \neq 0$$

$$= 0 \quad \text{si l'un des } Z_k \text{ vaut } 0 ; \text{ et dans ce cas } Z_n \text{ vaut aussi p.s.0}$$

c. D'après l'inégalité de Hölder, la majoration  $R_n \leq R_\infty$  et l'égalité  $E(Z_n) = 1$ ,

$$E(1_{B_n} Y_A(\lambda)) \leq (E(Z_n))^\lambda (E(1_{B_n} \exp R_n))^{1-\lambda}$$

$$\leq (E(1_{B_n} \exp R_\infty))^{1-\lambda}$$

d. Par convergence dominée (grâce à la condition (c)), en posant  $B_n = \{Y_n(\lambda) > \bar{Y}(\lambda) + \varepsilon\}$ , et comme  $\limsup B_n = \emptyset$  p.s.,

$$E(1_{B_n} Y_n(\lambda)) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty .$$

Ensuite,

$$E(\bar{Y}(\lambda)) = E(Y_n(\lambda)) + E(\bar{Y}(\lambda) - Y_n(\lambda))$$

$$\geq 1 - \varepsilon - E(1_{B_n} Y_n(\lambda)).$$

e. D'après b ,

$$\bar{Y}(\lambda) \leq (Z_\infty)^\lambda \exp \{(1-\lambda)R_\infty\} \quad \text{p.s.}$$

On applique ensuite l'inégalité de Hölder.

f. D'après d et e ,

$$1 \leq (E(Z_\infty))^\lambda (E(\exp R_\infty))^{1-\lambda}$$

On fait tendre  $\lambda$  vers 1 , il vient  $E(Z_\infty) \geq 1$  ; d'après I 1° b , on avait déjà  $E(Z_\infty) \leq 1$  .

#### Quatrième partie

1° a. Si  $u \neq v$  et  $0 < \lambda < 1$  , l'inégalité de Hölder montre que

$$\phi(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \text{Log} \left[ \left( \int e^{ux} d\mu(x) \right)^\lambda \left( \int e^{vx} d\mu(x) \right)^{1-\lambda} \right]$$

$$\leq \lambda \phi(u) + (1-\lambda)\phi(v).$$

I est donc un convexe de  $R$  , et  $0 \in I$  car  $\phi(0) = 0$  .

b. L'inégalité précédente n'est une égalité que si les fonctions  $e^{ux}$  et  $e^{vx}$  sont  $\mu$ -p.p. proportionnelles, ce qui n'arrive pour  $u \neq v$  que si  $\mu$  est une mesure de Dirac.

c.  $\phi$  convexe est continue sur  $\overset{\circ}{I}$ . Si  $(u_n)$  est une suite monotone qui converge vers  $v \in \partial I$ , on décompose  $\phi(u_n)$  en somme de deux suites monotones en intégrant séparément sur  $]-\infty, 0]$  et sur  $]0, +\infty[$ .

d. Sur  $\mathbb{R}^+$ ,

$$|x| e^{vx} e^{-(u+2\varepsilon)x} \leq |x| e^{-\varepsilon x} \text{ est borné.}$$

Majoration similaire sur  $\mathbb{R}^-$ . On peut donc pour  $x \in \overset{\circ}{I}$  dériver l'intégrale pour obtenir

$$\phi'(u) = \int x e^{ux - \phi(u)} d\mu(x).$$

Comme  $\phi$  est convexe,  $\phi'$  est croissante. La même majoration permet d'obtenir la continuité de  $\phi'$  par convergence dominée.

$$e. E(Z_{n+1}^u | \mathcal{B}_n) = Z_n^u E(\exp\{u Y_{n+1} - \phi(u)\}) = Z_n^u.$$

$$f. (Z_n^{u/2})^2 = \exp\{2\left\{\frac{u}{2} X_n - n\phi\left(\frac{u}{2}\right)\right\}\} = \exp\{u X_n - 2n\phi(u/2)\}.$$

Or  $\phi(u/2) < \frac{1}{2}\phi(u)$  pour  $u \neq 0$ ,  $u \in I$  si  $\mu$  n'est pas de Dirac, d'où

$$\begin{aligned} Z_n^u &< (Z_n^{u/2})^2 \exp\left\{2n\left(\phi(u/2) - \frac{\phi(u)}{2}\right)\right\} \\ &\leq ((Z_n^{u/2})^*)^2 \exp\left\{2n\left(\phi(u/2) - \frac{\phi(u)}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

$\rightarrow 0$  p.s. quand  $n \rightarrow +\infty$  d'après I 2° c.

2° a. La loi forte des grands nombres montre que

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{p.s.}} \int x d\mu(x) > 0,$$

et par conséquent  $P(T < +\infty) = 1$ . D'après I 1°b on a  $E(Z_T^u) \leq 1$ .

b. Si

$$\alpha_k = \frac{Z_{k\wedge T}^u}{Z_{(k-1)\wedge T}^u} = \exp\left\{(u Y_k - \phi(u)) 1_{\{T \geq k\}}\right\},$$

alors

$$\begin{aligned} E(\alpha_k \text{ Log } \alpha_k | \mathcal{B}_{k-1}) &= E(1_{\{T \geq k\}} (u Y_k - \phi(u)) \exp(u Y_k - \phi(u)) | \mathcal{B}_{k-1}) \\ &= 1_{\{T \geq k\}} (u \phi'(u) - \phi(u)). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$R_{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{T \geq k\}} (u \phi'(u) - \phi(u)) = \psi(u)T.$$

c. Si  $I \cap \mathbb{R}^+ \neq \{0\}$ , alors, quand  $u$  décroît vers  $0$ ,

$$\int \frac{e^{ux} - 1}{u} d\mu(x) \longrightarrow \int x d\mu(x) \in ]0, +\infty[ ,$$

d'où  $\phi(u) > 0$  dans un voisinage à droite de  $0$ , donc par convexité  $\phi(u) > 0$  pour tout  $u > 0$ .

d. De  $(Y_1)^- = (Y_1^c)^-$ , on déduit que  $\phi^c(u) < +\infty$  si  $u \in \mathbb{R}^- \cap I$ .

$$\text{De } \int x d\mu^c(x) \longrightarrow \int x d\mu(x) \text{ quand } c \longrightarrow \infty \text{ on tire que } P(T^c < \infty) = 1$$

pour  $c$  assez grand.

$$\text{De } X_{T^c}^c = X_{T^c-1}^c + Y_{T^c}^c < a+c, \text{ on tire que}$$

$$Z_{T^c}^{u,c} \geq \exp u(a+c) \exp(-\phi^c(u)T^c) \text{ pour } u \leq 0.$$

La croissance de  $Y_1^c$  vers  $Y_1$  montre que  $\phi^c(u)$  décroît vers  $\phi(u)$  pour  $u \in \mathbb{R}^- \cap I$  lorsque  $c$  tend vers  $+\infty$ .

De  $\sum_{k=1}^n Y_k^c \leq \sum_{k=1}^n Y_k$ , on tire que  $T^c \geq T$ . Si  $\theta < -\inf \phi$ , il existe donc

$u \in \mathbb{R}^- \cap I$  et  $c > 0$  tels que  $\theta < -\phi^c(u)$ , d'où

$$E(\exp \theta T) \leq E(\exp \theta T^c) \leq E(\exp(-\phi^c(u)T^c)) < +\infty$$

$$\text{e. } P(T_0 = j) = \mu(\{0\})^{j-1} (1 - \mu(\{0\}))$$

$$\phi(u) = \text{Log} \{ \mu(\{0\}) + \int ]0, +\infty[ e^{ux} d\mu(x) \}$$

décroît vers  $\text{Log} \mu(\{0\})$  quand  $u$  tend vers  $-\infty$ .

$$E(\exp \theta T) \geq E(\exp \theta T_0) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\{0\})^{j-1} (1 - \mu(\{0\})) \mu(\{0\})^{-j} = +\infty.$$

f.  $E(\exp(-u(Y_1)^-))$  tend vers  $+\infty$  quand  $u$  tend vers  $-\infty$  car  $P((Y_1)^- > 0) > 0$ .

Comme de plus  $\phi$  est  $\geq 0$  sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $\phi(0) = 0$  et  $\phi$  est continue sur l'adhérence de  $I$ , nécessairement l'ensemble  $\{\phi \leq 0\}$  est un compact de  $\mathbb{R}^-$  sur lequel  $\phi$  atteint sa borne inférieure.

g. Comme en e, avec  $u_0$  défini en f,

$$E(\exp(-\phi(u_0)T)) < +\infty.$$

h. Pour  $u \in \mathbb{R}^-$ ,  $\exp u Y_1$  est borné par  $\exp u d$ , donc intégrable et  $\mathbb{R}^- \subset I$ . Comme  $\psi$  est continue sur  $\mathbb{R}^-$  et  $\psi(u_0) = -\phi(u_0)$ , il existe  $u_1 < u_0$  tel que  $\psi(u_1) < \theta$  et donc  $E(\exp \psi(u_1)T) < +\infty$ . Mais

$$E(Z_T^{u_1}) = E(Z_T^{u_0} \exp \{(u_1 - u_0)X_T - T(\phi(u_1) - \phi(u_0))\})$$

et

$$(u_1 - u_0)X_T - T(\phi(u_1) - \phi(u_0)) \leq (u_1 - u_0)a,$$

d'où

$$E(Z_T^{u_1}) < E(Z_T^{u_0}) \leq 1,$$

ce qui d'après b est incompatible avec  $E(\exp \psi(u_1)T) < +\infty$ .

i. On pose  $Y_k^d = \max(Y_k, d)$ , et en procédant comme en d, on prouve

$$E(\exp \theta T^d) = +\infty \quad \text{pour } \theta > -\inf \phi^d$$

et

$$E(\exp \theta T) = +\infty \quad \text{pour } \theta > \lim_{d \rightarrow +\infty} (-\inf \phi^d) = -\inf \phi$$

$$j. \quad E(\exp \theta T) < +\infty \quad \text{pour } \theta < \frac{m^2}{\sigma^2}$$

$$= +\infty \quad \text{pour } \theta > \frac{m^2}{\sigma^2}.$$

$$E(\exp \theta T) < +\infty \quad \text{pour } \theta < \alpha - p + \alpha \text{Log } \frac{p}{\alpha}$$

$$= +\infty \quad \text{pour } \theta > \alpha - p + \alpha \text{Log } \frac{p}{\alpha}$$

3° a.  $X_T > X_{T-1}$ , donc  $Y_T = 1$  et  $X_T = a$  sur  $\{T < +\infty\}$

b. Pour  $u \geq 0$ ,  $u + \text{Log } \mu(\{1\}) \leq \phi(u) \leq u$ .

c. Si  $u \geq u^*$  et  $u > 0$ , alors  $\phi(u) \geq 0$  et  $Z_{n\Lambda T}^u \leq \exp au$ ;

par convergence dominée, comme  $Z_{n\Lambda T}^u \rightarrow Z_T^u 1_{\{T < +\infty\}}$  p.s. (voir 1° f), on a

$$E(Z_T^u 1_{\{T < +\infty\}}) = 1 = \exp au E(1_{\{T < +\infty\}} \exp -\phi(u)T)$$

et finalement

$$P(T < +\infty) = \exp(-au^*).$$

d. Comme en 2° ,  $P(T < +\infty) = 1$  . Si  $u \leq 0$  et  $\phi'(u) \geq 0$  , alors  $\psi(u) < -\phi(u)$ , d'où

$$E(\exp \psi(u)T) \leq E(\exp -\phi(u)T) < +\infty \quad (\text{voir } 2^\circ \text{ d}),$$

$$\text{d'où } E(Z_T^u) = 1 \text{ et } E(\exp -\phi(u)T) = \exp - au$$

De même, si  $u \geq 0$  , d'après c ,  $E(Z_T^u) = 1$  et

$$E(\exp -\phi(u)T) = \exp - au .$$

$$\text{e. } P(T < +\infty) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^a$$

$$P(T < +\infty) = e^{-a}$$

$$\text{f. } E(\exp \theta T) = (e^{-\theta} - \sqrt{e^{-2\theta} - 1})^a \quad \text{pour } \theta \leq 0$$

$$= +\infty \quad \text{pour } \theta > 0$$

$$E(\exp \theta T) = (2e^{-\theta} - 1)^{-a} \quad \text{pour } \theta < \text{Log } 2$$

$$= +\infty \quad \text{pour } \theta \geq \text{Log } 2$$

$$E(\exp \theta T) = \left( \frac{e^{-\theta} + \sqrt{e^{-2\theta} - 4e^{-\theta} p(1-p)}}{2p} \right)^{-a} \quad \text{pour } \theta \leq -\text{Log } 4p(1-p)$$

$$= +\infty \quad \text{pour } \theta > -\text{Log } 4p(1-p)$$

### 3. Observations

Il fallait pour commencer le problème connaître les propriétés élémentaires de l'espérance conditionnelle par rapport à une tribu et manifester une certaine aisance dans leur manipulation. Le nombre important de candidats qui ont abordé avec succès ces premières questions montre qu'ils ont lu le sujet des précédentes épreuves et que cette notion est entrée dans le programme des préparations. La quatrième partie, qui nécessitait simplement des connaissances ordinaires en analyse, était là pour donner une deuxième chance à ceux qui éventuellement connaîtraient mal l'espérance conditionnelle ; en fait, peu de candidats en ont profité.

L'espérance conditionnelle mise à part, on demandait surtout aux candidats de connaître et d'employer à bon escient les principaux théorèmes de la théorie de l'intégration: théorèmes de convergence dominée et monotone, lemme de Fatou, inégalité de Hölder, dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Trop de candidats permutent sans méfiance une espérance et une limite, ou appliquent

le lemme de Fatou dans des conditions illégales. Beaucoup sont peu à l'aise avec la notion si intuitive d'arrêt d'un processus aléatoire: en témoigne la difficulté avec laquelle ils ont tenté de montrer la positivité de la martingale  $S_{n\Lambda}^\alpha$  dans la deuxième partie.

Le découpage des questions en nombreuses sous-questions a beaucoup facilité le travail des candidats et a sûrement contribué à ce qu'ils soient assez nombreux à avoir abordé les trois premières parties. Les résultats ont été évidemment moins bons dans les rares questions, comme en II 3°), où l'énoncé n'indiquait pas explicitement la formule à obtenir. De même, en IV 1° f, la solution n'était pas évidente et nécessitait de faire appel soit au I 2° a, ce qui n'a pas du tout été vu, soit au théorème de convergence p.s. des martingales positives, que connaissaient visiblement un certain nombre de candidats.

Signalons encore que la continuité d'une fonction convexe au bord de l'intervalle où elle est finie semble aller de soi pour beaucoup. Enfin, les calculs sur les lois de probabilités connues, relégués en fin du 2° et du 3° de IV, ont été ignorés pour l'essentiel, alors qu'ils pouvaient s'effectuer après simple lecture des questions précédentes; c'est dommage pour ceux qui auraient pu y montrer leur dextérité et gagner ainsi quelques points bien venus.

#### 4. Les notes (sur 40)

0	1 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29	30 à 34	35 à 40
74	79	37	35	32	36	27	17	7

Cette répartition est celle des 344 copies de probabilités et statistiques, en y incluant les copies blanches.



# oral

Les 276 candidats admissibles ont été répartis d'après le classement d'écrit en deux sous-jurys comportant chacun une sous-commission d'algèbre et une sous-commission d'analyse. Une concertation permanente a assuré une bonne harmonisation de la conception et de l'évaluation des épreuves.

Mis à part quelques candidats mal préparés, le niveau est bon, et le jury a présenté une liste supplémentaire de 9 noms qui méritent l'agrégation. Un seul de ces noms a été retenu par le Ministère.

Comme on peut le voir dans les statistiques des premières pages de ce rapport, le nombre d'étudiants candidats va en diminuant d'année en année, avec comme conséquence la suppression presque totale des préparations à l'agrégation en dehors de Paris. Dans ces conditions il devient encore plus difficile pour les professeurs exerçant en province de préparer le concours. Le jury a pu constater que certains d'entre eux ont accompli un gros travail personnel qui a été dans quelques cas récompensé, mais qui, dans tous les cas vaut d'être souligné.

## ÉPREUVE D'ANALYSE, PROBABILITÉS

### Observations générales

Le cadre de l'actuel programme d'oral d'Analyse étant assez étroit, le jury a proposé cette année peu de leçons nouvelles, se contentant d'augmenter la fréquence des leçons d'exemples et de géométrie, en proposant intentionnellement un certain nombre de couplages de telles leçons. Sur ce dernier point la politique sera poursuivie, et il est également vraisemblable que la fréquence des leçons de calcul numérique et de probabilités sera augmentée.

Dans l'ensemble le niveau de connaissances des candidats est bon. On a pu entendre quelques bonnes leçons "géométriques" (notamment sur les applications du théorème des fonctions implicites) et aussi, il faut le dire, de fort mauvaises (en particulier sur les courbes). Cependant une fois de plus une grande majorité de candidats a choisi lorsqu'il en avait la possibilité des exposés de nature abstraite, au risque d'un certain académisme. Beaucoup de plans sont alors purement formels et ne proposent que des exemples sans intérêt ou passe-partout.

Plus grave est la connaissance souvent très superficielle du sujet abordé. On a vu par exemple proposer en exposé l'étude du problème de Dirichlet dans le disque, sans qu'il ait été possible d'obtenir une définition des fonctions harmoniques. La plupart des candidats qui utilisent la convolution sont troublés lorsqu'on leur demande de la définir ou d'en donner des propriétés élémentaires. On pourrait multiplier ces exemples.

Il est vivement recommandé d'éviter les escroqueries volontaires ou erreurs involontaires ramenant les exposés à des vérifications triviales, la substance de la démonstration figurant dans un lemme admis. Il est peu intéressant de proposer en exposé l'existence des dérivées partielles d'une fonction différentiable en admettant le théorème de composition, ou de limiter l'étude affine locale des arcs plans aux arcs biréguliers.

Certains candidats qui n'ont pu bénéficier d'une préparation efficace à l'oral présentent des plans beaucoup trop élémentaires. Il est évident que le jury ne peut accepter une leçon sur "limite d'une fonction de variable réelle" qui ne dépasse pas le niveau d'une classe de terminale. On rappelle à ce propos que l'oral étant public les futurs candidats peuvent assister à quelques leçons d'oral ce qui leur donnera une plus juste vue de ce qui est demandé.

S'il est normal d'utiliser des notes dans la présentation du plan, on doit éviter de transformer l'exposé en simple lecture. L'exposé est en effet très important. Le candidat a l'occasion d'y manifester ses qualités d'enseignant. Il doit s'attacher à :

- expliquer clairement les idées sous-jacentes à la démonstration, en faisant appel au besoin à des considérations heuristiques,
- dégager les étapes de la démonstration,
- montrer son aisance au tableau. Comme un enseignant professionnel le candidat ne doit, pour exposer une démonstration, utiliser ses notes qu'exceptionnellement, soit par exemple pour éviter une erreur de détail dans une formule compliquée, soit comme recours en cas de difficulté. Il ne peut s'agir, pour les examinateurs, d'apprécier la capacité d'un éventuel agrégé à recopier au tableau une démonstration elle-même recopiée purement et simplement dans un manuel. La volonté de convaincre n'anime pas beaucoup de candidats qui devraient pourtant être conscients de l'effet extrêmement favorable produit par un exposé vivant et personnel.

Il est rappelé qu'une leçon traitée au niveau taupe ou maîtrise, bien assimilée et illustrée d'exemples pertinents assure une note très correcte. En analyse ce que le jury attend c'est d'une part que le (la) candidat (e) fasse la preuve de la solidité de ses connaissances sur les définitions et résultats qui soustendent le sujet de la leçon et d'autre part qu'il (ou elle) soit capable de les appliquer à des exemples mathématiquement significatifs.

On voit chaque année des candidats, parfois fort près de réussir, abandonner, laissant une place au concours à d'autres, moins bien placés qu'eux, mais qui font preuve de plus de courage et de persévérance. Pour regrettable que cela soit, le jury tient à garder secrètes les notes d'écrit, leur révélation risquant d'avoir des conséquences bien plus nuisibles.

L'expérience de ces dernières années a prouvé qu'une moyenne de l'ordre de 11/20 à l'oral permet à tout admissible d'être reçu. Chaque année parmi les reçus se trouvent effectivement des candidats admissibles parmi les derniers.

#### Remarques particulières

Le jury souhaite très vivement que les candidats proposent, chaque fois que cela est possible, des constructions effectives des objets qu'ils décrivent. C'est ainsi que dans le théorème de Cauchy-Lipschitz un cylindre de sécurité doit pouvoir être explicité dans un exemple simple. Le calcul effectif de la norme d'une application linéaire en dimension finie peut permettre d'appliquer les résultats sur les extréma liés ou les maxima de fonctions convexes.

Les polynômes d'interpolation, les séries entières, les séries de Fourier ont leur place dans l'étude des sous-espaces denses ou de l'approximation polynomiale. Des estimations de la qualité de l'approximation doivent être connues de manière à permettre l'application à des exemples simples.

Les suites, séries, et intégrales divergentes ont aussi leur intérêt, notamment dans l'étude des développements asymptotiques.

Le théorème des accroissements finis, indispensable certes pour prouver d'autres théorèmes, peut aussi servir à estimer des erreurs, à étudier des vitesses de convergence, à justifier des méthodes inspirées de la méthode de Newton. Des idées analogues peuvent aussi enrichir l'exposé souvent banal sur les suites récurrentes.

Sans aborder de façon systématique les procédés d'accélération de la convergence, on peut utilement compléter des leçons sur les suites, les séries ou les intégrales impropres par des remarques sur la rapidité de convergence.

Voici enfin des remarques sur quelques leçons précises :

L'esprit de la leçon "Exemples de recherche de primitives et de calcul d'intégrales" est souvent mal compris. Il ne s'agit pas de faire un cours détaillé sur la recherche de primitives mais plutôt, après avoir dégagé rapidement les méthodes essentielles, de proposer un choix varié de calcul d'intégrales, incluant primitives, développement en série, dérivation sous le signe intégral, et pouvant aller jusqu'au calcul numérique.

Pour la leçon "changement de variables" on peut, outre le cas des intégrales, penser aux équations différentielles, au changement de coordonnées locales en géométrie, etc... .

Certains candidats, embarqués imprudemment dans l'étude d'un contre-exemple savant découvrent un peu tard que pour prouver qu'un espace topologique n'est pas localement connexe il ne suffit pas de donner une base de voisinages non connexes pour chaque point.

Que dire d'une leçon de probabilités sur les théorèmes limites, correcte sur le plan théorique, où aucune application n'est proposée, le candidat ne sachant traiter aucun des exemples simples fournis par le jury ?

Une leçon nouvelle -Champs de Vecteurs- sera proposée l'an prochain. Les candidats sont invités à réfléchir à leur lien avec les équations différentielles (étude du redressement local, étude sur des exemples de points singuliers, questions de stabilité, etc... ).

## LISTE DES SUJETS DE LEÇONS

- Applications à l'analyse de la notion de compacité.
- Exemples d'espaces compacts.
- Espaces homéomorphes. Exemples et contre-exemples.
- Connexité. Applications.
- Théorèmes du point fixe. Applications.
- Utilisation en analyse d'espaces complets. Exemples.
- Sous-espaces denses. Illustration par l'approximation des fonctions.
- Exemples d'applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé dans un autre ; norme de telles applications.
- Espaces vectoriels normés de dimension finie.
- Géométrie dans un espace vectoriel normé.
- Exemples d'utilisation de la dénombrabilité en topologie et en analyse.
- Donner une construction de  $\mathbb{R}$  ; en déduire les principales propriétés de  $\mathbb{R}$ .
- Une caractérisation de  $\mathbb{R}$  (par certaines de ses propriétés) étant connue, en déduire les autres propriétés fondamentales de  $\mathbb{R}$ .
- Topologie de la droite numérique  $\mathbb{R}$  et sous-ensembles remarquables de  $\mathbb{R}$ .
- Connexité dans  $\mathbb{R}$  et fonctions continues.
- Propriétés topologiques de  $\mathbb{R}^n$ , exemples d'utilisation.
- Limite d'une fonction numérique d'une variable réelle.
- Exemples d'étude de suites de nombres réels.
- Approximations d'un nombre réel.
- Etude, sur des exemples, de suites numériques définies par divers types de relations de récurrence.
- Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle ; exemples et contre-exemples.
- Continuité uniforme. Exemples et applications.
- Fonctions à variation bornée. Applications.
- Applications réciproques : théorèmes d'existence ; exemples.
- Fonctions implicites : applications.
- Applications géométriques du théorème des fonctions implicites.
- Exemples d'utilisation de changements de variable.

- Fonctions convexes d'une ou de plusieurs variables réelles.
- Fonctions convexes d'une variable réelle ; inégalités de convexité.
- Applications de la notion de convexité à des problèmes d'extremum.
- Problèmes de prolongement de fonctions ; exemples.
- Dérivées partielles. Différentiabilité. Exemples.
- Fonctions de plusieurs variables réelles : théorème des accroissements finis et applications.
- Applications de classe  $C^k$  d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ .
- Différentes formules de Taylor. Majoration des restes. Applications.
- Problèmes d'extremum.
- Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Développements limités.
- Intégrale des fonctions réelles ou complexes de variable réelle. Premières propriétés.
- Intégrales impropres.
- Problèmes d'interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples.
- Problèmes de dérivabilité en calcul intégral.
- Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.
- Fonction exponentielle complexe. Argument d'un nombre complexe.
- Exemples de recherche de primitives et de calcul d'intégrales.
- Méthodes de calcul approché d'intégrales.
- Exemples d'intégrales multiples et applications.
- Séries. Convergence et convergence absolue. Sommation par parquets, réindexation.
- Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.
- Continuité, dérivabilité, intégrabilité de la somme d'une série de fonctions d'une variable réelle.
- Calculs approchés de sommes partielles et de restes de séries numériques.
- Comparaison d'une série et d'une intégrale.
- Exemples d'étude d'une fonction définie par une série.
- Différentes notions de convergence d'une suite de fonctions. Exemples.
- Séries de fonctions, convergence uniforme, convergence normale ; exemples.
- Exemples de problèmes d'interversion de limites.
- Domaine de convergence d'une série entière. Propriétés de la somme d'une telle série.
- Exemples de développement d'une fonction en série entière.
- Série de Taylor.
- Solutions des équations différentielles  $y' = f(x,y)$  ; solutions maximales.
- Equations différentielles linéaires ; propriétés générales. Exemples.

## ÉPREUVE D'ALGÈBRE, GÉOMÉTRIE

### Nature de l'épreuve

Ayant choisi un sujet parmi les deux qu'il a tirés au sort, le candidat doit, au terme d'une préparation de trois heures :

- présenter, en vingt minutes au plus, un plan qui tienne en entier sur le tableau ;
- exposer en une vingtaine de minutes le développement d'une question choisie dans le plan, par le jury, sur proposition du candidat ;
- répondre à des questions de niveau adapté à celui qu'il a choisi pour son plan.

La présence d'une bibliothèque mise à la disposition des candidats ne doit pas leur dissimuler que seule une préparation sérieuse pendant l'année qui précède le concours leur assure des chances de succès : les livres ne peuvent que les aider à présenter des matières déjà familières, à éviter les trous de mémoire et à enrichir des collections d'exemples et d'applications déjà constituées pour l'essentiel. Les candidats que les circonstances auraient contraints à une préparation réduite auront intérêt à choisir, dans la mesure du possible, un sujet facile et à ne pas introduire dans leur plan des aspects du sujet qu'ils maîtrisent mal.

Comme le laissait prévoir le rapport de 1982, l'oral de 1983 a été marqué par une augmentation du nombre de leçons de composition, notamment en Algèbre linéaire, et par le couplage effectif de leçons de Géométrie. Signalons à ce sujet que des candidats ont choisi, plus volontiers que les années précédentes, de présenter une leçon de Géométrie (en particulier projective), même couplée à une leçon d'Algèbre ; la plupart s'en tiennent malheureusement à un point de vue très incomplet et archaïque, qui néglige à peu près complètement les acquis des mathématiques contemporaines (algèbre linéaire, formes quadratiques, groupes) faisant partie du programme.

### Le plan

Le plan doit être celui de la leçon proposée (dont il faut analyser attentivement le titre) et non se déplacer sur un sujet voisin que le candidat croit mieux connaître : par exemple, un plan sur le " Groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée " ne doit pas



- Etude détaillée, sur un petit nombre d'exemples, d'équations différentielles non linéaires ; illustrations géométriques.
- Exemples de problèmes conduisant à des équations différentielles.
- Divers modes de définition et de représentation des surfaces de  $\mathbb{R}^3$ .  
Exemples.
- Propriétés affines locales des courbes. Branches infinies. Exemples.
- Propriétés métriques des courbes planes ou gauches. Exemples.
- Exemples d'étude de courbes planes.
- Etude locale des courbes planes.
- Etude locale des courbes de  $\mathbb{R}^3$ .
- Mouvement à accélération centrale. Exemples.
- Mouvement d'un repère orthonormé ; applications à la théorie des courbes gauches et à la cinématique du solide.
- Mouvement d'un plan sur un plan.
- Méthodes de calcul approché de solutions numériques des équations  $f(x) = 0$ .
- Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiales.
- Théorèmes limites fondamentaux en calcul des probabilités.
- Le jeu de pile ou face (variables de Bernoulli indépendantes).
- Probabilité conditionnelle. Exemples.
- Loi binomiale, loi de Poisson.
- Exemples de compactification d'un espace topologique ; utilisation.
- Compactification d'un espace topologique ; exemples.
- Etude sur des exemples de la rapidité de convergence d'une suite de nombres réels ; calcul approché de la limite.
- Exemples de développements asymptotiques.
- Exemples d'étude locale de champs de vecteurs.

se réduire à des généralités banales suivies du seul exemple du groupe orthogonal d'un espace euclidien ; les leçons sur les matrices (nouvelles en 1983) ne sont pas identiques à celles proposées sur les applications linéaires.

Les titres de nombreuses leçons demandent des applications, qu'il faut distinguer des simples illustrations ; appliquer une théorie, c'est la faire contribuer à résoudre un problème qui ne s'y réfère pas explicitement. Au reste, toute leçon bien composée doit comporter des exemples et applications, même lorsque ces mots ne figurent pas dans son titre.

Un bon plan doit structurer les matières de la leçon en unités logiques signalées par des titres. La plupart des candidats s'y appliquent, sans toujours manifester beaucoup d'originalité (combien de leçons : " Droite projective. Homographies. Birapport " ne se divisent-elles pas en : I - Droite projective ; II - Homographies ; III - Birapport ...). Il n'est pas interdit d'intéresser le jury par la mention, en début de plan, d'un problème qui motive la théorie exposée (pourquoi s'intéresse-t-on aux anneaux factoriels ? aux formes quadratiques ?), par le rapprochement de deux points du programme, etc. Ceci nécessite bien sûr un effort de lecture personnelle qui éloigne des plans appris par coeur que le jury entend tout au long de la session d'oral, une demi-douzaine de fois, identique à eux-mêmes, ce qui ne peut que l'inciter à augmenter le nombre des leçons d'exemples ou de composition et à en modifier les libellés d'une année sur l'autre.

#### **L'exposé**

A l'issue de son plan, le candidat propose au jury d'en développer certains points (démonstration de théorèmes, exemples, résolution d'exercices). Il est décent d'en proposer au moins trois, non triviaux et bien en rapport avec le sujet de la leçon ; le choix de ces exposés a une influence non négligeable sur la note que le jury attribue au candidat.

L'exposé doit être bien structuré, faisant ressortir clairement les articulations logiques et les points cruciaux de la démonstration, moyennant quoi le candidat peut ne pas s'attarder sur des détails de pur calcul.

La consultation des ouvrages de la bibliothèque peut apporter une aide précieuse aux candidats, mais il faut savoir que les démonstrations qu'ils contiennent ne sont pas forcément exactes ni complètes ; certaines renvoient tacitement le lecteur à des parties antérieures de l'ouvrage, qu'il ne peut donc exploiter que si sa composition globale lui est familière. Rectifions là quelques erreurs ou lacunes trainant dans les livres :

- une base d'un espace vectoriel est une famille (et non un ensemble) de vecteurs ;
- la démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss par emploi des polynômes symétriques renferme un passage délicat :
- le groupe des isométries de l'icosaèdre régulier n'est pas isomorphe à  $S_5$  ;
- le groupe circulaire n'est pas  $PGL_2(\mathbb{C})$  ;
- le conjugué d'un octave de Cayley  $(q_1, q_2)$  est  $(\bar{q}_1, -q_2)$  ;
- la démonstration d'irréductibilité des polynômes cyclotomiques nécessite une analyse préalable claire des rapports entre l'irréductibilité sur  $\mathbb{Q}$  et l'irréductibilité sur  $\mathbb{Z}$  (analyse qu'on peut admettre mais dont il faut énoncer les résultats).

Les candidats peuvent consulter leurs notes de préparation, mais le jury supporte mal qu'ils les recopient mot à mot, obstinément tournés vers le tableau.

#### Les questions

Les questions peuvent porter sur le plan présenté : correction d'erreurs ou de lapsus, mise en évidence de lacunes. Cette critique n'a pas toujours lieu, mais l'absence de questions sur le plan n'est pas un gage de perfection pour celui-ci...

Un exercice (en général simple) peut tester l'aptitude du candidat à utiliser les concepts ou les théorèmes présentés.

D'autres questions, enfin, visent à faire que le candidat situe la leçon par rapport à l'ensemble du programme, à la rapprocher d'autres sujets non nécessairement abordés dans son plan (par exemple : application de la continuité du déterminant à la topologie de certains ensembles de matrices), bref à faire preuve de sa culture mathématique. La révélation de connaissances étendues et précises éclaire ainsi favorablement le jury, même si le candidat a cru devoir présenter un plan élémentaire. Au rebours...

## Commentaires particuliers

Dénombrements : Cette leçon, assez bien traitée par certains candidats, doit dégager des méthodes qui ne se limitent pas aux premiers éléments de l'Analyse combinatoire (il n'est pas interdit d'employer des séries entières ou formelles, bien qu'elles ne soient pas au programme) et comporter des applications à l'Algèbre et à la Géométrie (dénombrements dans les groupes, corps et espaces vectoriels finis, etc).

Structures algébriques fondamentales : Le jury est frappé par la difficulté que rencontrent de nombreux candidats à manipuler les structures produits et quotients ; par exemple, le dénombrement des homomorphismes entre deux groupes cycliques d'ordres respectifs  $m$  et  $n$  donne lieu à des raisonnements maladroits et approximatifs qui établissent plutôt des inclusions que des égalités d'ensembles, alors que cet exercice se résout tout à fait mécaniquement par emploi des théorèmes généraux de factorisation des homomorphismes.

Groupes : Plusieurs leçons sur les groupes sont des leçons fines d'application et de composition, qui ne doivent pas se réduire à l'énoncé stéréotypé de quelques théorèmes généraux. On invite les candidats à :

- enrichir la leçon sur les groupes finis d'automorphismes de considérations d'invariance et de stabilité ;
- éviter les groupes de Galois s'ils ne se sentent pas capables de calculer celui d'un polynôme du troisième degré à coefficients rationnels ;
- se familiariser concrètement avec les sous-groupes et groupes quotients de  $\mathbb{Z}^n$  ;
- réfléchir sur le caractère intrinsèque de la signature d'une permutation.

Anneaux : Hormis quelques points obligés (comme le théorème de transfert de Gauss pour la factorialité), les plans proposés sur les anneaux sont pauvres en références aux polynômes et à la Géométrie (paramétrage rationnel de certaines courbes algébriques, notamment des coniques).

Corps : On recommande de

- soigner l'exposé des corps finis, en particulier de leurs inclusions ;
- ne pas parler des " racines d'un polynôme " sans préciser quand il le faut dans quel corps elles habitent. Le chapitre sur les racines d'un polynôme doit mentionner leurs relations avec les coefficients ;
- ne pas oublier les aspects géométriques et topologiques de la théorie des quaternions ;

- ne pas s'attarder outre mesure à définir la détermination principale de l'argument d'un nombre complexe ; il est plus important de mentionner la possibilité de relever des fonctions continues à valeur dans le cercle unité en des fonctions continues réelles par la fonction exponentielle.

Algèbre linéaire : Ces leçons, peu en faveur actuellement, sont difficiles de par l'étendue des connaissances qu'elles exigent pour être traitées avec intérêt. En particulier, la notion de dualité ne concerne pas que les rapports entre un espace vectoriel et son dual, mais aussi les formes bilinéaires symétriques ou alternées, les groupes abéliens finis, les espaces projectifs. Les leçons sur les matrices doivent s'enrichir d'observations topologiques utilisant la continuité du déterminant.

La leçon sur les sous-espaces vectoriels stables ne doit pas se limiter à la diagonalisation; mais doit faire jouer un rôle aux sous-espaces cycliques. On envisagera le cas de plusieurs endomorphismes, l'existence d'un supplémentaire stable, l'application de l'orthogonalité à des problèmes.

Le sujet " Polynôme minimal. Polynôme caractéristique " est encore très mal traité. Beaucoup de candidats ne font pas assez preuve de réflexion sur ce chapitre (invariance du polynôme minimal d'une matrice par extension du corps de base, signification de la notation  $\underline{u} - X \cdot \underline{id}$ ) ni d'aptitude au calcul explicite des objets introduits (notamment du polynôme minimal d'une matrice de Jordan). La référence aux  $K[X]$ -modules, universellement observée, n'est pas indispensable car la démonstration classique du théorème de Cayley-Hamilton par emploi de la comatrice contient en germe un développement élémentaire de la théorie du polynôme minimal et de la réduction de Jordan.

Formes quadratiques, alternées, hermitiennes : Le traitement de ces sujets est en général fort peu satisfaisant : les connaissances des candidats sur les formes quadratiques (et en particulier sur leur diagonalisation simultanée) sont souvent minimes, on ignore leurs applications à la Géométrie et à l'Arithmétique, on reste à peu près muet sur les formes alternées dès lors qu'on croit bon de citer ces théorèmes. La leçon sur le groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée devrait étudier le groupe de Lorentz et contenir des applications des théorèmes de Witt et de Cartan-Dieudonné. Et on devrait connaître les endomorphismes normaux en dimension 2 !

Géométrie : En géométrie projective, la leçon " Droite projective. Homographies. Birapport " ne doit pas se réduire aux définitions de ces trois objets assorties de trivialisations, ni se contenter de démarquer le

chapitre général sur les espaces projectifs en y substituant le mot " droite " au mot " espace " ; au moins pourrait-on faire voir que, sur une droite, trois points distincts quelconques forment un repère projectif - ce que certains candidats ont découvert avec étonnement sous la direction du jury. Il est bon d'appliquer les notions introduites à des modèles " concrets " de droites projectives : droites plongées dans un plan, faisceaux d'hyperplans, coniques projectives, droite projective complexe  $\tilde{\mathbb{C}}$ .

Il est généralement bien vu de traiter des coniques et quadriques dans un cadre d'abord affine, en axant l'exposé sur l'emploi des formes quadratiques qui lui donne son unité. De même, les leçons sur les cercles et sphères ont tout intérêt à mêler le vieux et le neuf : les outils du programme permettent par exemple de structurer l'ensemble des cercles et droites du plan en espace projectif et d'interpréter les familles linéaires de cercles (qui ne sont pas les seuls faisceaux) et l'orthogonalité des cercles en termes de polarité par rapport à une quadrique.

Dans le chapitre sur les inversions et le groupe circulaire, ce dernier est généralement expédié de façon très évasive et parfois erronée (cf. § " l'Exposé "). On doit savoir énoncer et démontrer complètement le théorème fondamental qui le caractérise comme groupe des homographies et antihomographies. Ce qui n'empêche certes pas de donner quelques applications de l'inversion (transformation de cercles en droites) à la mode du bon vieux temps ...

Il faut savoir enfin distinguer entre elles les diverses leçons sur les isométries affines et dépasser à leur sujet le niveau de l'enseignement du second degré. La classification des sous-groupes finis de  $O_3(\mathbb{R})$  ne consiste pas seulement à limiter le nombre de groupes à isomorphisme près autres que les cycliques et des diédraux, mais aussi à en établir l'existence effective.

## LISTE DES LEÇONS D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

- Problèmes de dénombrement ; Exemples.
- Groupes abéliens finis.
- Groupes abéliens de type fini ; sous-groupes de  $\mathbb{Z}^n$ .
- Exemples et utilisations de la notion de sous-groupe distingué.
- Parties génératrices d'un groupe ; exemples ; applications à la Géométrie.
- Eléments conjugués dans un groupe ; exemples et applications.
- Groupes finis ; exemples.
- Groupes finis d'automorphismes ; exemples tirés de la Géométrie.
- Groupes opérant sur un ensemble. Applications.
- Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
- Idéaux d'un anneau unitaire. Anneaux quotients. Exemples.
- Etude de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Eléments inversibles. Indicateur d'Euler.
- Anneaux euclidiens. Anneau des entiers de Gauss.
- Anneaux principaux. Exemples et applications.
- Anneaux factoriels. Exemples et applications.
- $\mathbb{Z}$ .
- Corps. Exemples.
- Corps de rupture d'un polynôme irréductible. Construction de corps finis.
- Quaternions.
- Corps des nombres complexes. Groupe multiplicatif.  
Théorème de d'Alembert-Gauss.
- Applications des nombres complexes à la Géométrie.
- Racines de l'unité dans un corps commutatif.
- Propriétés et applications de l'algèbre des polynômes à  $n$  indéterminées.
- Racines des polynômes à une indéterminée. Résultant de deux polynômes.  
Discriminant.
- Polynômes irréductibles.
- Polynômes symétriques. Relations entre les coefficients et les racines  
d'un polynôme.
- Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif.  
Décomposition en éléments simples et applications.
- Dimension des espaces vectoriels dans le cas fini.
- Endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Groupe linéaire en dimension finie.
- Matrices carrées inversibles.
- Sous-groupes du groupe linéaire.
- La dualité ; diverses applications.
- Rang d'une application linéaire et d'une matrice. Equations linéaires.

- Matrices
- Applications multilinéaires alternées. Déterminants.
- Exemples de déterminants. Applications.
- Méthodes de calcul d'un déterminant. Exemples et applications.
- Sous-espaces vectoriels stables pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Réduction de Jordan. Applications.
- Polynôme minimal. Polynôme caractéristique.
- Formes bilinéaires symétriques ; formes bilinéaires alternées.
- Orthogonalité, isotropie pour une forme bilinéaire symétrique.
- Décomposition en carrés d'une forme quadratique. Applications.
- Réduction simultanée de deux formes quadratiques. Applications.
- Groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée
- Espaces vectoriels euclidiens en dimension finie.
- Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.
- Espaces vectoriels hermitiens de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ . Groupe unitaire.
- Dualité dans les espaces vectoriels euclidiens de dimension finie.  
Réduction d'endomorphismes normaux.
- Dualité dans les espaces vectoriels hermitiens de dimension finie.  
Réduction des endomorphismes normaux.
- Barycentre. Convexité.
- Polyèdres convexes.
- Inéquations linéaires.
- Exemples de groupes d'isométries d'un espace affine euclidien de dimension  $\leq 3$
- Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites ; exemples en dimension  $\leq 3$ .
- Polyèdres réguliers.
- Angles
- Exemples de problèmes d'angles et de distances en Géométrie
- Inversions planes. Groupe circulaire.
- Torseurs.
- Cercles et sphères.
- Familles linéaires de cercles.
- Droite projective. Homographies. Birapport.
- Espaces projectifs. Groupe projectif.
- Coniques dans le plan affine euclidien.
- Quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3.



## BIBLIOTHÈQUE DE L'AGRÉGATION

Les candidats étaient autorisés à apporter tout livre vendu dans le commerce (à l'exclusion des textes dactylographiés ou ronéotypés) et dépourvu de notes manuscrites.

Ils pouvaient en outre consulter sur place les ouvrages suivants:

- |                          |  |
|--------------------------|--|
| ARTIN                    | <i>Algèbre géométrique</i> (Gauthier-Villars)  |
| BASS                     | <i>Cours de Mathématiques</i> (Masson) tomes 1 et 2  |
| BERGER                   | <i>Géométrie</i> (Nathan) : index, tomes 1 à 5   |
| BERGER et GOSTIAUX       | <i>Géométrie différentielle</i> (Colin)  |
| BLANCHARD                | <i>Corps non commutatifs</i> (Presses Universitaires)  |
| BOURBAKI                 | Les tomes suivants :<br><i>Théorie des ensembles</i><br><i>Algèbre</i><br><i>Fonctions d'une variable réelle</i><br><i>Topologie générale</i><br><i>Espaces vectoriels topologiques</i><br><i>Intégration</i>  |
| BOUVIER et RICHARD       | <i>Groupes</i> (Hermann)   |
| BROUSSE                  | <i>Mécanique</i> (Colin)   |
| CABANNES H.              | <i>Cours de mécanique générale</i> (Dunod)   |
| CAGNAC, RAMIS et COMMEAU | <i>Nouveau cours de Mathématiques spéciales</i> (Masson)   |
| CAGNAC et THIBERGE       | <i>Géométrie, classes terminales C</i> (Masson)  |
| CARTAN                   | <i>Fonctions analytiques</i> (Hermann)<br><i>Formes différentielles</i> (Hermann)<br><i>Calcul différentiel</i> (Hermann)  |
| CHAMBADAL et OVAERT      | <i>Cours de mathématiques</i> (Gauthier Villars)<br>(tome I - tome 2 : algèbre et analyse)<br><i>Algèbre linéaire et algèbre tensorielle</i> (Dunod)   |
| CHOQUET                  | <i>Cours d'analyse</i> (Masson)<br><i>L'enseignement de la géométrie</i> (Hermann)   |
| COUTY                    | <i>Analyse</i> (Colin)   |
| DIEUDONNE                | <i>Algèbre linéaire et géométrie élémentaire</i><br>(Hermann).<br><i>Sur les groupes classiques</i> (Hermann)<br><i>Calcul infinitésimal</i> (Hermann)<br><i>Éléments d'analyses</i> (Gauthier Villars) tomes 1 et 2<br><i>Analyse M.P.</i> (Gauthier Villars)<br><i>Leçons d'algèbre moderne</i> (Dunod)<br><i>Géométrie plane</i> (Presses Universitaires) |
| DIXMIER                  | <i>Algèbre, Analyse, Topologie.</i>  |
| DUBREUIL (M. et Mme)     | <i>An introduction to probability theory and its applications</i> (Wiley) tomes 1 et 2   |
| DUBUC                    | <i>Exercices: topologie et analyse.</i> Tomes 1,2,3,4,<br>(Vuibert)  |
| EXBRAYAT et MAZET        |  |
| FELLER                   |  |
| FLORY                    |  |

- FRENKEL *Algèbre et Géométrie*  
*Géométrie pour l'élève professeur* (Hermann)
- GENET *Mesure et Intégration* (Vuibert)
- GODEMENT *Algèbre* (Hermann)
- HENNEQUIN et TORTRAT *Théorie des probabilités et quelques applications*  
(Masson)
- JACOBSON *Basic algebra*, tomes 1 et 2 (Freeman)
- KERBRAT *Géométrie des courbes et des Surfaces* (Hermann)
- KREE *Introduction aux Mathématiques appliquées* (Dunod)
- KRIVINE *Théorie axiomatique des ensembles*  
(Presses Universitaires)
- LANG *Introduction aux variétés différentiables*  
(traduction française)  
*Algèbre - Linéar Algebra*  
*Cours de mathématiques*, 4 tomes (Dunod)
- Mme LELONG-FERRAND et ARNAUDIES *Géométrie différentielle* (Masson)
- Mme LELONG-FERRAND *Algèbre, structures fondamentales* (traduction française), tome 1 (Gauthier Villars)
- MAC LANE et BIRKHOFF *Les grands théorèmes* (traduction française)  
*Géométrie différentielle intrinsèque* (Hermann)  
*Géométrie* (Colin)
- MALLIAVIN *Introduction à la théorie des probabilités*
- MARTIN P. *Le défi algébrique* (Vuibert) tomes 1 et 2
- METIVIER *Bases mathématiques du calcul des probabilités*  
(Masson)
- MUTAFIAN *Cours d'algèbre* (E.N.S.J.F.)
- NEVEU J. *Problems and theorems in analysis*, tomes 1 et 2  
(Springer)
- PERRIN *Cours d'algèbre* (Masson)
- POLYA et SZEGÖ *Algèbre* (Colin)
- QUERRE *Mathématiques spéciales* 5 tomes (Masson)
- QUEYSANNE
- RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX
- RIESZ et NAGY *Leçons d'analyse fonctionnelle* (Gauthier Villars)
- RUDIN *Real and complex analysis* (Mac Graw-Hill)
- SAMUEL *Théorie algébrique des nombres* (Hermann)
- SCHWARTZ *Cours d'analyse* (Hermann) tomes 1 et 2  
*Topologie générale et analyse fonctionnelle* (Hermann)
- SERRE *Cours d'arithmétique* (Presses Universitaires)
- VALIRON *Cours d'analyse* (Masson) tomes 1 et 2
- VAUQUOIS *Les Probabilités* (Hermann)
- WARUSFEL *Structures algébriques finies* (Hachette)
- ZISMAN *Topologie algébrique* (Colin).

Université de Nancy I  
BIBLIOTHÈQUE  
I.E.C.N. Mathématiques