Concours du second degré

Rapport de jury

Concours : Agrégation externe

Section : Mathématiques

Session 2014

Rapport de jury présenté par :

Charles Torossian

Président du jury, Inspecteur général

Table des matières

Chapitre 1

Composition du jury

DIRECTOIRE

TOROSSIAN Charles, Président	PARIS	Inspecteur général de l'éducation nationale
FOULON Patrick, Président délégué	AIX-MARSEILLE	Professeur des Universités
BURBAN Anne, Vice-présidente	PARIS	Inspectrice générale de l'éducation nationale
CHEMIN Jean-Yves, Vice-président	PARIS	Professeur des Universités
CHENO Laurent, Vice-président	PARIS	Inspecteur général de l'éducation nationale
YEBBOU Johan, Secrétaire général	PARIS	Inspecteur général de l'éducation nationale
BOISSON François, Directoire	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
GOUDON Thierry, Directoire	NICE	Directeur de recherches INRIA
RUPPRECHT David, Directoire	TOULOUSE	Professeur de Chaire supérieure

JURY

ABERGEL Luc	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
ABGRALL Rémi	BORDEAUX	Professeur des Universités
ABGRALL Sophie	BORDEAUX	Professeure agrégée
AEBISCHER Bruno	BESANCON	Professeur agrégé
APPEL Walter	LYON	Professeur de Chaire supérieure
AUBERT Violaine	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
BARANI Jean Pierre	LYON	Professeur de Chaire supérieure
BARDET Jean-Marc	PARIS	Professeur des Universités
BARDET Magali	ROUEN	Maître de conférences des Universités

BASSON Arnaud	PARIS	Professeur agrégé
BAUMANN Pierre	STRASBOURG	Chargé de recherches CNRS
BAYLE Vincent	TOULOUSE	Professeur agrégé
BEAULIEU Anne	CRETEIL	Maître de conférences des Universités
BECHATA Abdellah	VERSAILLES	Professeur de Chaire supérieure
BERNARDI Dominique	PARIS	Maître de conférences des Universités
BERNICOT Frédéric	NANTES	Chargé de recherches CNRS
BLANLOEIL Vincent	STRASBOURG	Maître de conférences des Universités
BOLDO Sylvie	VERSAILLES	Chargée de recherches INRIA
BONNAILLIE-NOEL Virginie	PARIS	Directrice de recherches CNRS
BOSTAN Alin	VERSAILLES	Chargé de recherches INRIA
BOUALEM Hassan	MONTPELLIER	Maître de conférences des Universités
BOUGE Luc	RENNES	Professeur des Universités
BOULMEZAOUD Tahar-Zamène	VERSAILLES	Maître de conférences des Universités
BREMONT Julien	CRETEIL	Maître de conférences des Universités
BROUZET Robert	MONTPELLIER	Maître de conférences des Universités
BURGUET David	PARIS	Chargé de recherches CNRS
BUSE Laurent	NICE	Chargé de recherches INRIA
CABANES Marc Louis	PARIS	Chargé de recherches CNRS
CACHERA David	RENNES	Maître de conférences des Universités
CADORET Anna	VERSAILLES	Professeure associée, Ecole Polytechnique
CALADO Bruno	PARIS	Professeur agrégé
CALDERO Philippe	LYON	Maître de conférences des Universités
CANCES Clément Antoine	PARIS	Maître de conférences des Universités
CARAYOL Henri	STRASBOURG	Professeur des Universités
CHAINAIS Claire	LILLE	Professeure des Universités
CHALENDAR Isabelle	LYON	Maître de conférences des Universités
CHARDIN Marc	PARIS	Chargé de recherches CNRS
CHEVALLIER Marie-Elisabeth	STRASBOURG	Professeure de Chaire supérieure
CHOIMET Denis	LYON	Professeur de Chaire supérieure
CHOMETTE Thomas	PARIS	Professeur agrégé
COQUIO Agnès	GRENOBLE	Maître de conférences des Universités
COURANT Judicael	LYON	Professeur agrégé
COUVREUR Alain	VERSAILLES	Chargé de recherches INRIA
D'ANGELO Yves	ROUEN	Professeur des Universités
DAMBRINE Marc	BORDEAUX	Professeur des Universités
DEVULDER Christophe	ORLEANS-TOURS	Professeur de Chaire supérieure
DOUMERC Yan	LILLE	Professeur agrégé
DROUHIN Catherine	VERSAILLES	Professeure de Chaire supérieure
DUJARDIN Guillaume	LILLE	Chargé de recherches INRIA
DUJARDIN Romain	CRETEIL	Professeur des Universités
DUTRIEUX Yves	VERSAILLES	Maître de conférences des Universités
FISCHLER Stéphane	VERSAILLES	Maître de conférences des Universités
FLON Stéphane	VERSAILLES	Professeur agrégé
FONTAINE Hélène	LYON	Professeure de Chaire supérieure
FRANCINOU Serge	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
FREGIER Yael	ZURICH	Maître de conférences des Universités
FRICKER Christine	VERSAILLES	Directrice de recherches INRIA
GARAY Mauricio	VERSAILLES	Professeur agrégé
GERMAIN Cyril	PARIS	Professeur agrégé

GODEFROY Gilles	PARIS	Directeur de recherches CNRS
GRIVAUX Sophie	LILLE	Chargée de recherches CNRS
HADIJI Rejeb	CRETEIL	Maître de conférences des Universités
HANROT Guillaume	LYON	Professeur des Universités
HARDOUIN Cécile	VERSAILLES	Maître de conférences des Universités
HENRI Michel	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
HERAU Frédéric	NANTES	Professeur des Universités
HMIDI Taoufik	RENNES	Maître de conférences des Universités
HUBERT Florence	MARSEILLE	Maître de conférences des Universités
JULG Pierre	ORLEANS-TOURS	Professeur des Universités
KASPEREK Xavier	NICE	Professeur agrégé
KLOPP Frédéric	PARIS	Professeur des Universités
KOSTYRA Marie-Laure	STRASBOURG	Professeure agrégée
KRELL Nathalie	RENNES	Maître de conférences des Universités
KUCZMA Frédéric	CAEN	Professeur de Chaire supérieure
LAFITTE Christophe	VERSAILLES	Professeur agrégé
LAFITTE Pauline	VERSAILLES	Professeure des Universités
LAMBOLEY Jimmy	PARIS	Maître de conférences des Universités
LE COURTOIS Olivier	LYON	Professeur Ecole de commerce
LE FLOCH Matthieu	RENNES	Professeur agrégé
LE MERDY Sylvie	RENNES	Professeure agrégée
LECUE Guillaume	VERSAILLES	Chargé de recherches CNRS
LEFEVRE Pascal	LILLE	Professeur des Universités
LEGER Jean-Christophe	PARIS	Professeur agrégé
LESCOT Paul	ROUEN	Professeur des Universités
LEVY-VEHEL Jacques	VERSAILLES	Directeur de recherches INRIA
LODS Véronique	PARIS	Professeure de Chaire supérieure
MALLORDY Jean-François	CLERMONT- FERRAND	Professeur de Chaire supérieure
MANSUY Roger	PARIS	Professeur agrégé
MARCHE Claude	VERSAILLES	Directeur de recherches INRIA
MARIANI Charles-Pierre	PARIS	Professeur agrégé
MARINO Alexandre	MONTPELLIER	Professeur agrégé
MATHERON Etienne	LILLE	Professeur des Universités
MATRINGE Nadir	POITIERS	Maître de conférences des Universités
MENOZZI Stéphane	VERSAILLES	Professeur des Universités
MESTRE Jean-François	PARIS	Professeur des Universités
MICHEL Julien	POITIERS	Professeur des Universités
MONAT Pascale	GRENOBLE	Professeure de Chaire supérieure
MONIER Marie	PARIS	Professeure agrégée
MONNIAUX Sylvie	AIX-MARSEILLE	Maître de conférences des Universités
MONS Pascal	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
NIEDERMAN Laurent	VERSAILLES	Maître de conférences des Universités
NOBLE Pascal	TOULOUSE	Professeur des Universités
PENNEQUIN Denis	PARIS	Maître de conférences des Universités
PUCHOL Pierre	VERSAILLES	Professeur de Chaire supérieure
RECHER François	LILLE	Maître de conférences des Universités
REZZOUK Marc	ROUEN	Professeur de Chaire supérieure
RHODES Rémi	PARIS	Maître de conférences des Universités
RISLER Jean-Jacques	PARIS	Professeur des Universités
RITZENTHALER Christophe	AIX-MARSEILLE	Chargé de recherches CNRS
RIVOLLIER Damien	NANCY-METZ	Professeur agrégé

ROBERT Damien	BORDEAUX	Chargé de recherches INRIA
ROUX Raphaël	PARIS	Maître de conférences des Universités
SCHRAEN Benjamin	VERSAILLES	Chargé de recherches CNRS
SIMON Thomas	LILLE	Professeur des Universités
THERY Laurent	NICE	Chargé de recherches INRIA
TOSEL Nicolas	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
TOSEL Emmanuelle	PARIS	Professeure de Chaire supérieure
TROTABAS Denis	MONTPELLIER	Professeur agrégé
TU Jean-Louis	NANCY-METZ	Professeur des Universités
VALLETTE Bruno	NICE	Maître de conférences des Universités
VIAL Grégory	LYON	Professeur des Universités
VINCENT Christiane	NANCY-METZ	Professeure de Chaire supérieure
WATTIEZ Johann	VERSAILLES	Professeur agrégé
WEILL Mathilde	PARIS	Professeure agrégée
ZINSMEISTER Michel	ORLEANS-TOURS	Professeur des Universités
ZWALD Laurent	GRENOBLE	Maître de conférences des Universités

Chapitre 2

Déroulement du concours et statistiques

2.1 Déroulement du concours

Les épreuves écrites se sont déroulées selon le calendrier suivant :

- Épreuve de mathématiques générales : mercredi 12 mars 2014
- Épreuve d'analyse et probabilités : jeudi 13 mars 2014

La liste d'admissibilité a été publiée le mercredi 28 mai 2014.

L'oral s'est déroulé du vendredi 20 juin au mardi 8 juillet 2014 à l'École Nationale de Commerce, 70 boulevard Bessières. La liste d'admission a été publiée le mercredi 9 juillet 2014.

L'oral était composé de 6 séries de trois jours avec une journée de pause le dimanche 29 juin. Durant les 18 jours d'interrogation, 9 commissions ont travaillé en parallèle, impliquant en permanence 108 interrogateurs, 4 membres du directoire ou remplaçants et 30 surveillants ou appariteurs. Dans chaque salle d'interrogation, les candidats disposaient d'un tableau blanc suffisant large (ainsi que de feutres à pompe) et d'un projecteur connecté à un ordinateur fixe pour l'épreuve de modélisation.

Les candidats admissibles ont reçu une convocation papier, indiquant leurs jours de passage. Pour connaître ses horaires précis, il fallait se connecter sur le site sécurisé de l'agrégation de mathématiques, en indiquant son numéro de candidat. L'application a été fermée, comme l'an passé, la veille du début des oraux (il en sera de même l'an prochain). Seuls quelques candidats hésitants n'ont pas réussi à éditer leurs horaires et ont dû se présenter à 6h45 le premier jour de convocation sur les lieux du concours, sous peine d'être déclarés non présents.

Le jury considère que le fait d'éditer sa convocation horaire, est un signal fort de présence à l'oral.

Le concours propose quatre options. Les options A,B,C ne diffèrent que par les épreuves de modélisation alors que les trois épreuves orales de l'option D (informatique) sont spécifiques.

En 2014 comme dans les sessions précédentes, on peut constater que dans les options A, B et C, le nombre d'inscrits est similaire ; ils sont toujours – et c'est bien compréhensible – nettement inférieurs dans l'option D, mais cette dernière est encore en progression par rapport à 2013, ce qui a obligé le jury à organiser une série supplémentaire durant l'oral (4 séries cette année).

Dans les options A, B et C les rapports admis/présents sont quasiment identiques. Cela veut clairement dire que le choix de l'option n'a guère d'influence sur la réussite au concours et elle ne doit pas être l'objet d'une stratégie de dernière minute de la part des candidats. Le choix de l'option doit être mis en cohérence par rapport à la formation académique ; chaque option ouvre des champs applicatifs des mathématiques qui trouveront leur impact dans le futur métier du professeur agrégé.

Le nom officiel, « concours externe de recrutement de professeurs agrégés stagiaires », montre clairement que, par le concours d'agrégation, le ministère recrute des professeurs agrégés destinés, selon leur statut, à l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou à l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, Grandes Écoles, classes préparatoires aux Grandes Écoles, sections de techniciens supérieurs).

Les candidats qui ont été admis à un concours de recrutement sont nommés professeurs agrégés stagiaires à la rentrée scolaire de l'année au titre de laquelle est organisé le recrutement et classés, dès leur nomination, selon les dispositions du décret du 5 décembre 1951 susvisé. Ils sont affectés dans une académie par le ministre chargé de l'Éducation nationale dans des conditions fixées par arrêté de ce dernier. Le stage a une durée d'un an. Au cours de leur stage, les professeurs stagiaires bénéficient d'une formation dispensée, dans le cadre des orientations définies par l'État, sous la forme d'actions organisées à l'université, d'un tutorat, ainsi que, le cas échéant, d'autres types d'actions d'accompagnement. Les modalités du stage et les conditions de son évaluation sont arrêtées par le ministre chargé de l'Éducation nationale.

La note de service 2014-050 du 10-4-2014 publiée le 17 avril 2014, relative à l'affectation des lauréats des concours du second degré en qualité de professeur stagiaire, explique en détail les conditions d'un éventuel report de stage accordé aux lauréats du concours de l'agrégation qui souhaitent poursuivre des études doctorales. Notons que le Master Recherche entre en général dans la catégorie "études doctorales". Cependant, lorsqu'un lauréat de l'agrégation est, suite à sa demande, nommé stagiaire et affecté en académie, l'annulation de sa nomination ne peut se faire sans l'accord du recteur concerné. Notons enfin que le lauréat peut demander à effectuer son stage en tant qu'ATER ou doctorant contractuel ou en classes préparatoires aux grandes écoles (sur proposition de l'Inspection générale) selon les modalités de la note de service.

Le programme, la nature des épreuves écrites et orales, font l'objet de publications sur le site officiel de Ministère de l'Education nationale à l'adresse http ://www.education.gouv.fr/pid63/siac2.html.

Le programme pour la session 2015 a été publié au début de l'année 2014. Les candidats sont invités à consulter le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques, à l'adresse www.agreg.org où se trouvent aussi tous les renseignements pratiques concernant les sessions à venir. Il est prévu, à partir de la session 2015, une modification légère du programme spécifique de l'oral ; le corpus commun de modélisation légèrement modifié fera partie intégrante du corpus commun de l'oral.

Par ailleurs, à partir de la session 2015, seuls des logiciels libres seront proposés pour les épreuves de modélisation (options A, B, C). La liste précise et actualisée de ces logiciels est disponible sur le site de l'agrégation. À ce jour la liste est la suivante : Python, Scilab, Octave, Sage, Maxima, Xcas, R.

Épreuve « Agir en fonctionnaire de l'état de manière éthique et responsable ».

Les modalités de la session 2011 ont été reconduites pour la session 2014. Suivant l'option choisie, elle est cumulée soit à l'épreuve "Algèbre et Géométrie" soit à l'épreuve "Mathématiques pour l'Informatique". Les contenus pour cette épreuve sont précisés dans le paragraphe suivant.

Les candidats se verront remettre un sujet comportant plusieurs courts extraits de textes officiels en relation avec les connaissances décrites dans le point 1 de l'arrêté du 12 mai 2010 fixant le contenu de la compétence « Agir en fonctionnaire de l'Etat et de façon éthique et responsable » et une liste de suggestions utilisables par le candidat pour préparer son exposé. Des données supplémentaires utiles à la préparation pourront être fournies aux candidats.

Notons que cette épreuve est supprimée à partir de la session 2015. En effet l'arrêté du 25 juillet 2014 modifiant l'arrêté du 28 décembre 2009 fixant les sections et les modalités d'organisation des concours de l'agrégation et publié au Journal Officiel du 12 août 2014, précise les nouveaux coefficients des épreuves (4 pour les 5 épreuves) et indique par ailleurs dans son article 8 que les aspects professionnels pourront être évalués durant les épreuves orales elles-mêmes. L'article 8 est rédigé comme suit : « Lors des épreuves d'admission du concours externe, outre les interrogations relatives aux sujets et à la discipline, le jury pose les questions qu'il juge utiles lui permettant d'apprécier la capacité du candidat, en qualité de futur agent du service public d'éducation, à prendre en compte dans le cadre de son enseignement la construction des apprentissages des élèves et leurs besoins, à se représenter la diversité des conditions d'exercice du métier, à en connaître de façon réfléchie le contexte, les différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) et les valeurs qui le portent, dont celles de la République. Le jury peut, à cet effet, prendre appui sur le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation fixé par l'arrêté du 1er juillet 2013. »

2.2 Statistiques et commentaires généraux sur la session 2014

2.2.1 Commentaires généraux

Après la diminution sensible du nombre de postes entre les concours 2005 (388 postes) et 2008 (252 postes), ce nombre a été revu jusqu'en 2012 légèrement à la hausse.

La session 2013 a consacré une rupture nette, puisque 391 postes ont été ouverts (+ 83 postes par rapport à 2012) représentant une hausse de plus de 25% par rapport à la session 2012, ce qui nous ramène au niveau de l'année 1998. En 2014, la volonté de maintenir un nombre élevé de postes au concours a été confirmée, puisque 395 postes ont été ouverts, représentant 25% du nombre des postes d'agrégés mis au concours des agrégations externes.

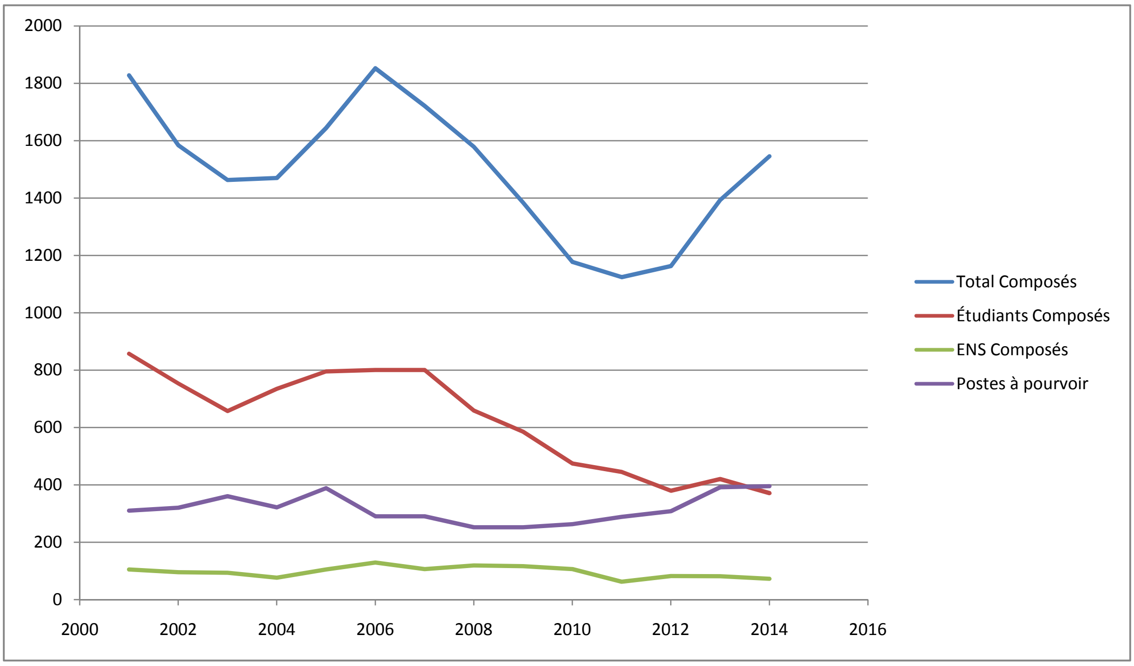
Le nombre d'inscrits est comparable à celui de l'an passé, puisque nous comptons 3001 inscrits. Par contre le nombre de personnes (1546) ayant composé aux deux épreuves écrites est en nette augmentation par rapport à l'an passé (+10%)

Il faut noter que les chiffres de ce rapport concernant les 1546 personnes ayant composé aux écrits de la session 2014 ou les 1620 personnes présentes à l'une des épreuves, ne prennent pas en compte les personnes qui ont passé les épreuves dans le cadre des conventions internationales qui lient la France le Maroc et la Tunisie [1]. Ces chiffres peuvent donc différer d'autres chiffres disponibles sur Internet ou sur le site du Ministère de l'Education nationale.

L'écrit de l'agrégation sert aussi d'écrit pour les agrégations de mathématiques en Tunisie et au Maroc ; il n'y a pas de différence pour les barres d'admissibilité pour les étudiants de ces deux pays avec la barre fixée par le jury français.

Au-delà de ces chiffres sur le nombre de présents qui montrent une hausse nette, il faut s'attarder sur la reprise de la baisse du nombre d'étudiants et des normaliens ce qui inquiète non seulement le jury mais aussi toute la communauté éducative.

C'est la première fois que le nombre d'étudiants est moindre que le nombre de postes ouverts au concours. Le graphe ci-dessous résume cette situation préoccupante.



Évolution du nombre de présents aux deux épreuves écrites

1. 1755 copies ont été corrigées, incluant celles des étudiants marocains et tunisiens.

Enfin, le nombre de personnes ayant composé aux deux épreuves est passé pour la quatrième session consécutive sous la barre de 4 par poste et se situe à près de 3,9. De fait comme l'an passé le jury n'a pas attribué l'ensemble des postes ouverts au concours.

Admissibilité : À l'issue de la délibération d'écrit portant sur deux épreuves (Mathématiques générales et Analyse-Probabilités), 786 candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une moyenne de 19,375/20 et le dernier une moyenne de 5/20. Notons que la forte hausse du nombre d'admissibles (+111) s'est traduite par une forte baisse de la barre d'admissibilité.

Les moyennes et écarts-types des présents sur les épreuves écrites sont résumés dans le tableau ci-dessous :

	Moy. présents	Ecart-type présents	Moy. admissibles	Ecart-type admissibles
MG	5,45	4,5	9,03	4,17
AP	6,38	4,37	9,46	3,95

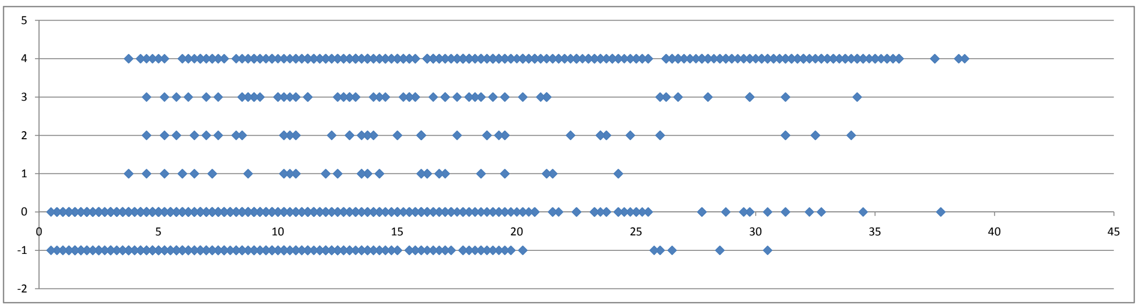
L'épreuve de Mathématiques générales comportait dans son préambule deux questions de cours de niveau L1. Le jury a été particulièrement surpris du peu de réponses satisfaisantes à la question élémentaire qui consistait à donner un argument convaincant à l'égalité

$$\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F).$$

On ne demandait pas de refaire un cours complet d'algèbre linéaire mais d'indiquer une stratégie de preuve. Sur les 1755 copies corrigées on obtient (échelle de 0/4 à 4/4) les résultats suivants :

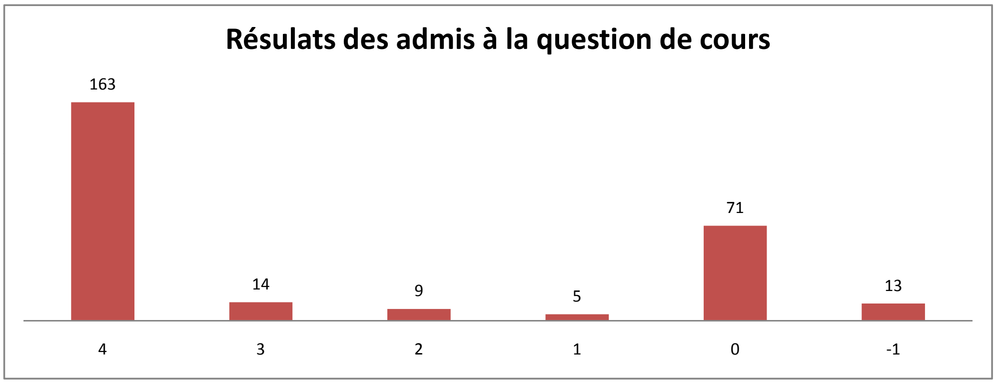
non réponse	330
0	829
]0,1[	74
]1,2[	33
]2,3[	39
]3,4[	26
4	427

Le nuage de points ci-dessous (où -1 code une non réponse) décrit les scores à cette question pour l'ensemble des personnes ayant composé aux deux épreuves (en fonction de leur total des notes d'écrit, c'est à dire sur 40).



Résultats à la question de cours en fonction du total aux épreuves écrites.

L'histogramme suivant donne le score à cette question de cours pour les candidats admis à la session 2014.



Résultats des admis à la question de cours

Admission : Finalement, à l'issue des épreuves orales, 275 postes ont été pourvus ; le premier admis a eu une moyenne de 18,24/20, le dernier admis une moyenne de 8,48/20. Notons toutefois que la moyenne générale des admis se situe à 12,03/20 tandis que celle des candidats présents à l'ensemble des épreuves orales était de 8,73/20. Concernant la moyenne sur les seules épreuves orales, elle se situe à 8,24/20 pour les admissibles présents et 11,69/20 pour les admis.

On résume dans le tableau ci-dessous les barres d'admission durant les 7 précédentes années :

Année	Nombre de postes attribués	Barre d'admission
2014	275	8,48/20
2013	323	7,95/20
2012	308	8,1/20
2011	288	9,33/20
2010	263	9,8/20
2009	252	10,15/20
2008	252	10,1/20

Seuls 275 postes sur les 395 proposés ont été attribués. Le recrutement de professeurs agrégés de mathématiques ne peut se faire que sur des critères de qualités scientifiques et pédagogiques répondant à un minimum, eu égard aux missions actuellement fixées aux agrégés telles qu'elles sont définies sur le site du MEN ; *les professeurs agrégés participent aux actions d'éducation, principalement en assurant un service d'enseignement et assurent le suivi individuel et l'évaluation des élèves. Ils contribuent à conseiller les élèves dans le choix de leur projet d'orientation. Ils enseignent dans les classes préparatoires aux grandes écoles, dans les classes des lycées, dans les établissements de formation et exceptionnellement dans les classes des collèges.*

Ce minimum a été placé cette année à 178/420. Le jury est bien conscient du malaise profond qui touche l'ensemble de la filière mathématique et cette session révèle les difficultés dans lesquelles sont placées nos universités. Le constat est sans appel, on ne peut pas réussir le concours de l'agrégation externe sans un minimum de préparation. Le jury a été particulièrement frappé cette année par le trop faible nombre d'étudiants préparant ce concours, c'est à dire dans des préparations universitaires (en gros 250 personnes) et de l'autre côté le défaut de préparation des candidats issus du corps professoral (certifiés en général) qui dévoile des moyens trop faibles consacrés à la formation continue et l'incapacité de nos structures à accompagner la volonté courageuse de formation de près de 1850 personnes inscrites au concours issues de ces corps.

2.2.2 Données statistiques diverses

On trouvera dans les pages qui suivent différents tableaux et graphiques constituant le bilan statistique du concours selon différents critères (géographie, sexe, catégorie professionnelle, âge). On a distingué la notion de *présents* à au moins une épreuve écrite et la notion de *composés*, présents aux deux épreuves écrites. Toutes ces statistiques portent sur les candidats Français et de l'Union Européenne, en particulier ces chiffres n'incluent pas les étudiants marocains et tunisiens.

Effectifs détaillés

Année	Total Inscrits	Total Composés	Étudiants composés	ENS Composés	Postes à pourvoir	Présents par poste
2001	2663	1828	857	105	310	5,9
2002	2343	1584	753	95	320	5,0
2003	2217	1463	657	93	360	4,1
2004	2333	1470	735	76	321	4,6
2005	2560	1644	795	105	388	4,2
2006	2849	1853	800	129	290	6,4
2007	2801	1722	800	106	290	5,9
2008	2491	1579	659	119	252	6,3
2009	2351	1384	585	116	252	5,5
2010	2332	1177	474	106	263	4,5
2011	2500	1124	445	62	288	3,9
2012	2673	1163	379	82	308	3,8
2013	2923	1393	420	81	391	3,6
2014	3001	1546	371	72	395	3,9

Évolution du nombre de présents aux deux épreuves d'écrit

Professions et Diplômes

Profession	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
ÉLÈVE D'UNE ENS	84	72	72	72	72	71
ÉTUDIANT	543	380	371	263	256	160
SALARIÉ SECTEUR PRIVÉ	185	58	50	24	15	6
SANS EMPLOI	152	57	54	20	17	7
ENSEIGNANT DU SUPÉRIEUR	41	14	13	8	6	2
AGRÉGÉ	18	6	6	4	1	
CERTIFIÉ	1365	771	736	319	212	20
PLP	45	18	17	6	4	
AUTRE ENSEIGNANT 2nd DEGRÉ	398	187	176	49	40	5
ENSEIGNANT 1er DEGRÉ	31	6	6	2	1	1
AUTRE FONCTIONNAIRE	31	14	14	8	4	1
SURVEILLANT	14	7	7	1	1	0
AUTRE	94	30	24	10	9	2

Résultat du concours par catégories professionnelles[2]

2. Les catégories professionnelles et les catégories par diplômes listées correspondent aux déclarations des candidats lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

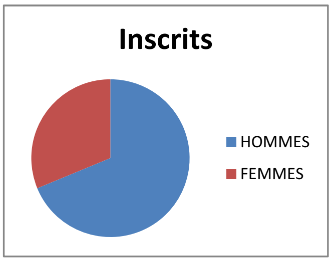
Cette année, 86 certifiés, lauréats du concours de l'agrégation interne 2014 ou du CAER 2014, étaient admissibles. Seules 6 personnes se sont présentées à l'oral. Il faut donc rester prudent sur l'interprétation des taux de succès concernant les certifiés.

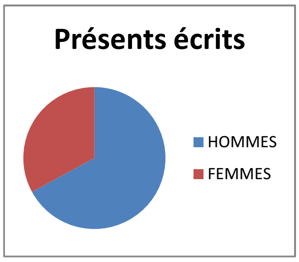
Diplôme	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
MASTER	1224	729	700	398	377	235
ENSEIGNANT TITUL-ANCIEN TITUL CAT A	743	423	406	181	106	6
DIPLOME D'INGENIEUR (BAC+5)	345	168	156	77	58	12
DOCTORAT	247	97	90	49	37	7
DIP POSTSECONDAIRE 5 ANS OU +	137	64	60	21	16	2
DIPLOME GRANDE ECOLE (BAC+5)	105	49	45	28	19	6
GRADE MASTER	68	27	26	11	11	4
DISP.TITRE 3 ENFANTS	67	32	32	12	7	2
ADMIS ECH.REM.CERTIFIE PLP PEPS	45	29	29	9	7	1
DIPLOME CLASSE NIVEAU I	14	2	2			
ADMIS ECH.REM PROFESSEUR ECOLE	5					
CPE TITULAIRE - ANCIEN TITULAIRE	1					

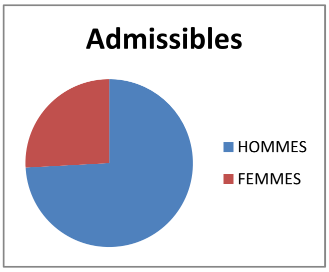
Diplômes des candidats hors étudiants tunisiens et marocains

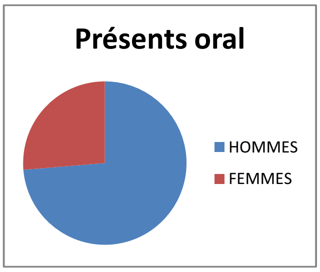
Ces résultats par grandes catégories confirment que le concours de l'agrégation externe de mathématiques est un concours de recrutement de nouveaux enseignants ; c'est d'ailleurs sa fonction primaire. La catégorie cumulée des étudiants (ENS et hors ENS) constitue en effet, 84% de l'effectif des admis. On note cependant une différence significative avec les années 2008-2010 ce pourcentage était alors de 92%. L'impact du diplôme sur la performance à l'écrit est nette. Notons le nombre important de docteurs inscrits au concours, mais aussi le peu d'admis dans cette catégorie, souvent faute d'une préparation spécifique ou de révisions suffisantes sur les fondamentaux en algèbre linéaire, en analyse ou probabilité.

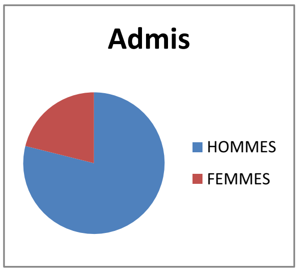
Répartition selon le sexe Les tableaux suivants donnent les départitions en fonction du sexe. Il y a un fort déséquilibre hommes-femmes puisque l'on compte 79% d'admis hommes.









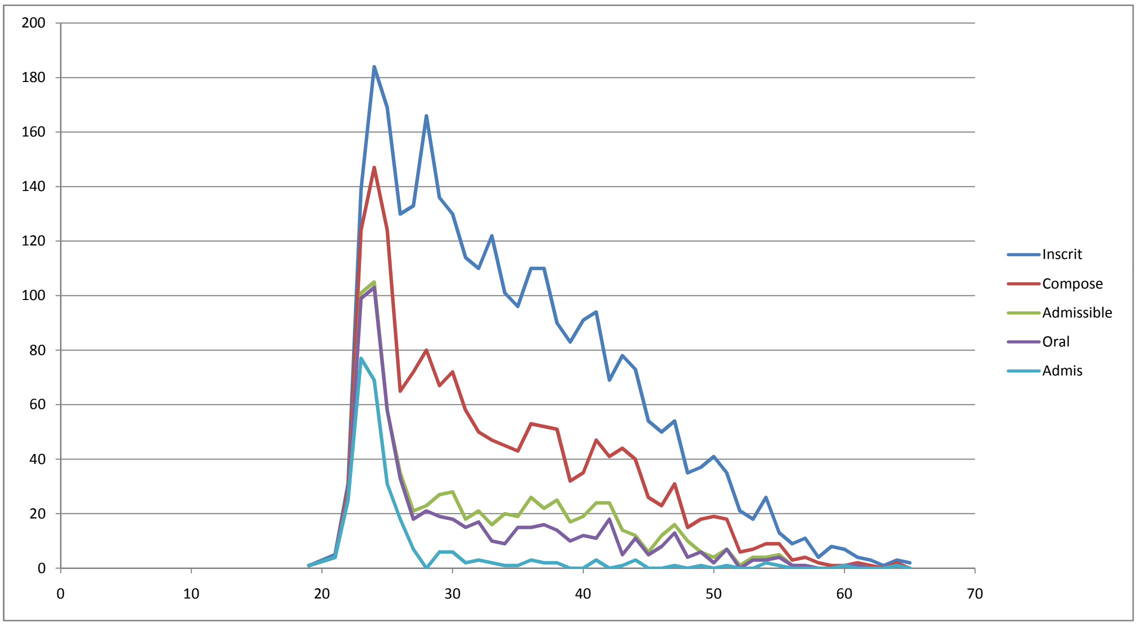


Ces pourcentages sont à apprécier en tenant compte du fait que les femmes ne représentent qu'un faible pourcentage parmi les candidats issus d'une ENS (9 femmes pour 62 hommes). Le tableau suivant ne concerne que la répartition par sexe des étudiants admissibles.

	Etudiants	Etudiantes
Inscrits	396	147
Présents	269	111
Composés	263	108
Admissibles	200	63
Admis	120	40
Admissibles/présents	74%	57%
Admis/admissibles	60%	63,5%

La question qui consiste à s'interroger sur le fait que la répartition hommes-femmes à l'écrit (33%) ne se retrouve pas sur les admis (21%) n'est pas vraiment pertinente dans le cadre d'un concours où le hasard n'a pas sa place. En pratique, le taux de réussite est très clairement corrélé à la qualité de la préparation et le jury encourage donc vivement les filles à s'engager dans les études à dominante mathématique, puisqu'elles y réussissent bien, notamment à l'oral où le taux de réussite des étudiantes admissibles est légèrement meilleur que celui des étudiants.

Répartition selon l'âge : Le graphe ci-dessous décrit les répartitions des lauréats en fonction de leur âge.



Courbes de répartion des âges

Ces graphes confirment que l'agrégation externe permet de recruter des jeunes enseignants. Les jeunes (moins de 27 ans) constituent 45% des admissibles mais surtout l'essentiel des admis au concours (84% des reçus). Cependant des candidats plus avancés en âge se sont aussi présentés avec succès lorsqu'ils ont pu bénéficier d'une bonne préparation.

Répartition selon l'académie

Academie	Inscrits	Composés	Admissibles	Présents à l'oral	Admis	Admissibles/ Composés	Admis/Présents Oral
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	820	475	230	190	78	48%	41%
RENNES	131	97	64	59	43	66%	73%
LYON	184	94	55	52	33	59%	63%
AIX-MARSEILLE	146	87	35	26	8	40%	31%
LILLE	118	69	21	14	8	30%	57%
GRENOBLE	131	68	35	24	10	51%	42%
TOULOUSE	137	67	39	31	14	58%	45%
MONTPELLIER	120	61	27	23	6	44%	26%
NANTES	97	53	15	11	7	28%	64%
BORDEAUX	99	52	28	22	11	54%	50%
STRASBOURG	85	42	22	18	6	52%	33%
LA REUNION	84	41	18	14	0	44%	0%
ORLEANS-TOURS	65	41	25	22	9	61%	41%
NANCY-METZ	73	39	27	24	9	69%	38%
ROUEN	65	38	13	9	4	34%	44%
AMIENS	67	36	15	11	2	42%	18%
DIJON	51	35	19	17	2	54%	12%
BESANCON	46	35	22	15	6	63%	40%
NICE	139	34	15	9	3	44%	33%
REIMS	43	25	12	11	5	48%	45%
CLERMONT-FERRAND	40	25	9	6	3	36%	50%
POITIERS	93	23	9	7	7	39%	100%
GUADELOUPE	34	20	7	5	0	35%	0%
CAEN	36	19	9	6	0	47%	0%
LIMOGES	22	15	4	3	0	27%	0%
MARTINIQUE	28	12	5	4	0	42%	0%
MAYOTTE	12	7	2	1	0	29%	0%
POLYNESIE FRANCAISE	12	4	2	2	0	50%	0%
NOUVELLE CALEDONIE	9	3	0	0	0	0%	NC
GUYANE	11	2	1	1	0	50%	0%
CORSE	3	1	1	1	1	100%	100%

Répartition par académie

La répartition des lauréats par académie[3] se concentre clairement sur quelques centres (PCV, Rennes, Lyon, Grenoble, Toulouse, Bordeaux) qui totalisent près de 70% des lauréats. Toutefois, quasiment toutes les académies, qui gardent des formations de niveau Master en mathématiques, assurent une préparation satisfaisante à l'écrit auprès de leurs étudiants et à l'oral lorsqu'elles ont gardé une préparation spécifique. Bien que la préparation à l'agrégation ne soit pas un objectif prioritaire des Universités de province, il convient de réfléchir à l'égalité territoriale dans ce contexte de pénurie. La situation des DOM est malgré tout préoccupante cette année ; c'est souvent la conséquence de la disparition des formations académiques au delà de la Licence, le cas de la Réunion est caractéristique.

3. On a classé les académies en fonction du nombre de personnes qui ont composé aux écrits.

Chapitre 3

Épreuve écrite de mathématiques générales

3.1 Énoncé

Introduction

Une matrice carrée à coefficients réels est dite totalement positive (TP en abrégé) si tous ses mineurs sont positifs. Les matrices TP apparaissent naturellement dans diverses questions d'analyse et jouissent de propriétés remarquables ; par exemple, on peut démontrer que les valeurs propres d'une matrice TP sont toutes réelles positives.

Ce problème vise à étudier l'ensemble des matrices TP inversibles de taille $n \times n$ donnée. Deux outils seront mis à contribution. Le premier est la décomposition de Bruhat, qui décrit les doubles classes dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ selon le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. Le second est l'étude des écritures des permutations comme produits de transpositions de deux éléments consécutifs.

Dépendance des parties entre elles

L'épreuve commence par une partie 0 consacrée au rappel de quatre résultats classiques utilisés dans le problème. Il est ici demandé aux candidats de rappeler les preuves de deux de ces résultats, à savoir les théorèmes A et B.

Le problème lui-même fait l'objet des parties 1 à 6. Le graphe suivant indique les dépendances entre ces parties : une arête relie x (en haut) à y (en bas) si la partie y s'appuie sur des résultats ou des notions présentés dans la partie x. On voit par exemple qu'il est possible de commencer par n'importe laquelle des parties 1, 3 ou 4.

$$\begin{tikzcd}[arrows=-]
 & 3 \arrow[d] & 4 \arrow[dl] \\
1 \arrow[d] \arrow[dr] & 5 \arrow[d] & \\
2 & 6 &
\end{tikzcd}$$

Notations et conventions

Afin de faciliter leur repérage par les candidats, les définitions, les conventions et les notations utilisées seront indiquées par un losange noir dans la marge gauche.

♦ Pour deux ensembles X et Y, la notation $X \backslash Y$ désigne l'ensemble des éléments de X n'appartenant pas à Y.

Le cardinal d'un ensemble fini X est noté $\mathrm{Card}(X)$.
Le minimum de deux entiers m et n sera noté $\min(m, n)$.
Étant donnés deux entiers $m \leqslant n$, on pose $[\![m, n]\!] = \{m, m+1, \ldots, n\}$.
Étant donné un entier $n \geqslant 1$, le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$ est noté S_n.
Étant donnés un corps $\mathbb{K}$ et deux entiers strictement positifs m et n, on note $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$; quand $m = n$, on simplifie la notation en $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
La dimension d'un espace vectoriel E sera notée $\dim E$.

♦ Une matrice carrée est dite **unitriangulaire** inférieure (respectivement, supérieure) si elle est triangulaire inférieure (respectivement, supérieure) et si tous ses éléments diagonaux sont égaux à 1.

♦ Supposons que $\mathbb{K}$ soit le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Étant donné un entier $n \geqslant 1$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie ; par suite, toutes les normes dont il peut être muni définissent la même topologie. Sur chacun des sous-ensembles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ que nous serons amenés à considérer, la topologie utilisée sera la topologie induite.

Mineurs d'une matrice

Par convention, tous les corps sont supposés être commutatifs.

♦ Pour deux entiers $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$, on note $\mathscr{P}_k(n)$ l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1, n]\!]$.

♦ Soit $\mathbb{K}$ un corps. Le déterminant d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un élément de $\mathbb{K}$ noté $\det A$. Il est parfois commode d'utiliser la notation alternative

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

quand on souhaite mentionner explicitement la taille et les coefficients de A ; ici A est de taille $n \times n$, où n est un entier strictement positif.

♦ Soient à présent m et n deux entiers strictement positifs, et soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Par définition, étant donné $k \in [\![1, \min(m, n)]\!]$, un mineur d'ordre k de A est le déterminant d'une matrice carrée de taille $k \times k$ extraite de A. Chaque couple $(I, J) \in \mathscr{P}_k(m) \times \mathscr{P}_k(n)$ définit ainsi un mineur

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k,j_1} & \cdots & a_{i_k,j_k} \end{vmatrix}$$

d'ordre k de A, où i_1, ..., i_k (respectivement, j_1, ..., j_k) sont les éléments de I (respectivement, J) **rangés par ordre croissant**. Ce mineur sera noté $\Delta_{I,J}(A)$.

3.1.0 Questions de cours et autres résultats classiques

Les candidats sont invités à rédiger des preuves concises et convaincantes des théorèmes A et B ci-dessous. Les théorèmes C et D seront en revanche admis.

Théorème A. (**à démontrer**) — Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F+G)+\dim(F\cap G)=\dim F+\dim G.$$

Théorème B. (**à démontrer**) — Le déterminant d'une matrice carrée A, à coefficients dans un corps, admettant une décomposition par blocs de la forme

$$A=\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & F \end{array}\right) \quad \text{ou} \quad A=\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline D & F \end{array}\right),$$

où B et F sont des matrices carrées, est donné par la formule $\det A=(\det B)\,(\det F)$.

Théorème C. (**admis**) — Soit $\mathbb{K}$ un corps et n un entier supérieur ou égal à 2. Si x_1, ..., x_n sont des éléments de $\mathbb{K}$, alors

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

Théorème D. (**admis**) — Soit $\mathbb{K}$ un corps, soit n un entier strictement positif, et soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $p\in[\![1,n]\!]$, le mineur $\Delta_{[\![1,p]\!],[\![1,p]\!]}(A)$ est différent de zéro.

(ii) Il existe dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une unique factorisation $A=LDU$, où D est une matrice diagonale inversible et où L et U sont des matrices unitriangulaires inférieure et supérieure, respectivement.

3.1.1 Matrices totalement positives

1.1 Soit $\mathbb{K}$ un corps, soient m, n, p trois entiers strictement positifs, et soient $A\in\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Formons le produit $C=AB$ et écrivons $A=(a_{h,i})$, $B=(b_{i,j})$, $C=(c_{h,j})$, avec $h\in[\![1,m]\!]$, $i\in[\![1,n]\!]$, $j\in[\![1,p]\!]$.

Soit $k\in[\![1,\min(m,p)]\!]$ et soit $(H,J)\in\mathscr{P}_k(m)\times\mathscr{P}_k(p)$. Notons h_1, ..., h_k (respectivement, j_1, ..., j_k) les éléments de H (respectivement, J), rangés par ordre croissant. Notons X_1, ..., X_n et Y_1, ..., Y_k les colonnes des matrices

$$\begin{pmatrix} a_{h_1,1} & \dots & a_{h_1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{h_k,1} & \dots & a_{h_k,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} c_{h_1,j_1} & \dots & c_{h_1,j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{h_k,j_1} & \dots & c_{h_k,j_k} \end{pmatrix},$$

respectivement. Ces colonnes appartiennent à l'espace vectoriel $E=\mathbb{K}^k$.

(a) Exprimer Y_1, ..., Y_k en fonction de X_1, ..., X_n et des coefficients $b_{i,j}$ de la matrice B.

(b) Soit $f:E^k\to\mathbb{K}$ une forme k-linéaire alternée. Montrer que

$$f(Y_1,\dots,Y_k)=\sum_{\substack{\varphi:[\![1,k]\!]\to[\![1,n]\!]\\ \text{injective}}} b_{\varphi(1),j_1}\cdots b_{\varphi(k),j_k}\quad f(X_{\varphi(1)},\dots,X_{\varphi(k)}),$$

la somme portant sur l'ensemble des applications injectives de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

(c) Sous les hypothèses de la question précédente, montrer que
$$f(Y_1,\dots,Y_k)=\sum_{I\in\mathscr{P}_k(n)}\ \sum_{\sigma\in S_k} b_{i_{\sigma(1)},j_1}\cdots b_{i_{\sigma(k)},j_k}\quad f(X_{i_{\sigma(1)}},\dots,X_{i_{\sigma(k)}}),$$
où i_1, ..., i_k sont les éléments de I rangés par ordre croissant.

(d) Montrer la formule de Binet-Cauchy :
$$\Delta_{H,J}(C)=\sum_{I\in\mathscr{P}_k(n)}\Delta_{H,I}(A)\ \Delta_{I,J}(B).$$

♦ Une matrice carrée à coefficients réels est dite totalement positive (TP en abrégé) si chacun de ses mineurs est positif.

Autrement dit, étant donné un entier $n\geqslant 1$, une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite TP si $\Delta_{I,J}(A)\geqslant 0$ pour chaque $k\in[\![1,n]\!]$ et chaque $(I,J)\in\mathscr{P}_k(n)^2$.

1.2 Dans cette question, les matrices considérées sont carrées à coefficients réels.

(a) Montrer que les coefficients d'une matrice TP sont positifs.

(b) Montrer que la transposée d'une matrice TP est TP.

(c) Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, la matrice identité de taille $n\times n$ est TP.

(d) Montrer que le produit de deux matrices TP de même taille est TP.

(e) L'inverse d'une matrice TP inversible est-elle toujours TP ?

1.3 Soit $n\geqslant 1$ un entier. Soit $\mathscr{C}_n\subset\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets strictement croissants de réels.

(a) Soit $(b_1,\dots,b_n)\in\mathscr{C}_n$ et soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$. Montrer que si la fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}$ par
$$x\mapsto\lambda_1e^{b_1x}+\cdots+\lambda_ne^{b_nx}$$
s'annule en n points distincts de $\mathbb{R}$, alors $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$.
(Indication : raisonner par récurrence sur n en se ramenant au cas où $b_n=0$. Utiliser la dérivation.)

(b) Étant donnés deux éléments $\underline{a}=(a_1,\dots,a_n)$ et $\underline{b}=(b_1,\dots,b_n)$ de $\mathscr{C}_n$, on peut construire la matrice $E=(e_{i,j})$ de taille $n\times n$ et de coefficients donnés par $e_{i,j}=e^{a_ib_j}$. Montrer que cette matrice E est inversible.
(Indication : étudier le système homogène associé.)

(c) Montrer que $\mathscr{C}_n$ est connexe.

(d) Avec les notations de la question (b), montrer que $\det E>0$, quel que soit $(\underline{a},\underline{b})\in(\mathscr{C}_n)^2$.

♦ Fixons-nous un entier $n\geqslant 1$. Désignons le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par le symbole $\mathscr{G}$. Notons $\mathscr{G}_+$ l'ensemble des matrices TP appartenant à $\mathscr{G}$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices TP inversibles de taille $n\times n$. Notons enfin $\mathscr{G}_+^*$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{G}$ dont tous les mineurs sont strictement positifs : une matrice $A\in\mathscr{G}$ appartient à $\mathscr{G}_+^*$ si $\Delta_{I,J}(A)>0$ pour chaque $k\in[\![1,n]\!]$ et chaque $(I,J)\in\mathscr{P}_k(n)^2$.

1.4

(a) Soient A et B deux éléments de $\mathscr{G}$. Montrer que si $A\in\mathscr{G}_+$ et $B\in\mathscr{G}_+^*$, alors $AB\in\mathscr{G}_+^*$.

(b) Montrer que pour tout $\theta\in]0,1[$, la matrice $T=(t_{i,j})$ de taille $n\times n$ et de coefficients donnés par $t_{i,j}=\theta^{(i-j)^2}$ appartient à $\mathscr{G}_+^*$.
(Indication : développer $(i-j)^2$ et utiliser la question 1.3 (d).)

(c) Construire une suite de matrices appartenant à $\mathscr{G}_+^*$ ayant pour limite la matrice identité dans $\mathscr{G}$.

(d) Montrer que $\mathscr{G}_+$ est l'adhérence de $\mathscr{G}_+^*$ dans $\mathscr{G}$.

3.1.2 Factorisation LDU d'une matrice TP inversible

Le but de cette partie est de montrer que pour tous entiers n et p tels que $n > p \geqslant 1$ et toute matrice totalement positive $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\det A \leqslant \Delta_{[\![1,p]\!],[\![1,p]\!]}(A)\ \Delta_{[\![p+1,n]\!],[\![p+1,n]\!]}(A). \tag{$*$}$$

Nous prouverons cette inégalité par récurrence sur n, en écrivant $(*)$ pour une matrice D de taille plus petite construite à partir de A. Le nœud de l'argument est l'identité de Sylvester, qui permet d'exprimer les mineurs de D en fonction de ceux de A.

2.1 Soit $\mathbb{K}$ un corps, soient q et n deux entiers tels que $n > q \geqslant 1$, et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On considère la matrice $D \in \mathscr{M}_{n-q}(\mathbb{K})$ de coefficients

$$d_{i,j} = \Delta_{[\![1,q]\!]\cup\{q+i\},[\![1,q]\!]\cup\{q+j\}}(A),$$

pour $(i,j) \in [\![1, n-q]\!]^2$. Dans les questions (a), (b) et (c), on suppose que le mineur $\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}(A)$ est non nul.

(a) Montrer que A se factorise de façon unique comme produit de deux matrices par blocs

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_q & 0 \\ \hline E & \mathbb{I}_{n-q} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B & F \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

avec $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{n-q}(\mathbb{K})$, $E \in \mathscr{M}_{n-q,q}(\mathbb{K})$ et $F \in \mathscr{M}_{q,n-q}(\mathbb{K})$, où les symboles $\mathbb{I}_q$ et $\mathbb{I}_{n-q}$ désignent les matrices identités dans $\mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n-q}(\mathbb{K})$, respectivement.

(b) Exprimer la matrice D en fonction de B et C.
(Indication : utiliser la formule de Binet-Cauchy prouvée dans la question 1.1 (d).)

(c) Montrer l'identité de Sylvester : $\det D = \left(\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}(A)\right)^{n-q-1} (\det A)$.

(d) Montrer que l'identité de Sylvester est vraie de façon générale, même si l'hypothèse $\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}(A) \neq 0$ n'est pas satisfaite.
(Note : dans le cas $q = n-1$, on adopte la convention que $0^0 = 1$.)

Dans la suite de cette partie, toutes les matrices considérées sont à coefficients réels.

2.2 Soient n et q deux entiers naturels avec $n > q \geqslant 1$, soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $D \in \mathscr{M}_{n-q}(\mathbb{R})$ la matrice construite à partir de A comme dans la question 2.1. Montrer que si A est TP, alors D est aussi TP.

2.3 Dans cette question, nous démontrons $(*)$ par récurrence sur n.

Le cas $n = 2$ ne présente pas de difficulté : nécessairement $p = 1$, et si l'on appelle $a_{i,j}$ les coefficients de A, alors $(*)$ s'écrit

$$a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \leqslant a_{1,1}a_{2,2}$$

et découle directement de la positivité de $a_{1,2}$ et $a_{2,1}$ (*cf.* question 1.2 (a)).

On prend alors $n \geqslant 3$ et on suppose le résultat acquis pour les matrices de taille strictement inférieure à n. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice TP. Comme $(*)$ est banalement vraie si $\det A = 0$, on se place dans le cas où A est inversible.

(a) Montrer que $a_{1,1} > 0$.
(Indication : Raisonner par l'absurde et utiliser la positivité des mineurs $\Delta_{\{1,i\},\{1,j\}}(A)$, pour $(i,j) \in [\![2,n]\!]^2$.)

(b) Montrer que A satisfait l'inégalité $(*)$ pour tout $p \in [\![2, n-1]\!]$.
(Indication : introduire la matrice D de la question 2.1 pour $q = 1$ et prouver la majoration $\Delta_{[\![p,n-1]\!],[\![p,n-1]\!]}(D) \leqslant (a_{1,1})^{n-p}\ \Delta_{[\![p+1,n]\!],[\![p+1,n]\!]}(A)$.)

(c) Traiter le cas $p = 1$ en le ramenant au cas $p = n-1$ d'une autre matrice.

Soit A une matrice TP inversible. L'inégalité $(*)$ entraîne que $\Delta_{[\![1,p]\!],[\![1,p]\!]}(A) > 0$ pour chaque $p \in [\![1, n]\!]$. D'après le théorème D, il existe une unique factorisation $A = LDU$, où D est une matrice diagonale inversible et où L et U sont des matrices unitriangulaires inférieure et supérieure, respectivement. Les coefficients de ces matrices peuvent s'écrire comme des quotients de mineurs de A ; ils sont donc positifs. En fait, il est même possible de montrer que les matrices L, D et U sont TP. Ce résultat ramène l'étude des matrices TP inversibles à celle des matrices TP unitriangulaires. Nous entreprendrons celle-ci dans la partie 6, après avoir développé les outils nécessaires.

3.1.3 Position relative de deux drapeaux

Dans toute cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

♦ À chaque permutation $\sigma \in S_n$, on associe deux tableaux de nombres $(p_{i,j}(\sigma))$, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, et $(d_{i,j}(\sigma))$, pour $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$. Ces tableaux sont définis ainsi :

$$p_{i,j}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j), \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases}$$

$$d_{i,j}(\sigma) = \begin{cases} \operatorname{Card}\big([\![1, j]\!] \cap \sigma^{-1}([\![1, i]\!])\big) & \text{si } i \geqslant 1 \text{ et } j \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } i = 0 \text{ ou } j = 0. \end{cases}$$

♦ La matrice $(p_{i,j}(\sigma))$ est notée P_σ et est appelée matrice de permutation de σ.

3.1 Donner le tableau $(d_{i,j}(\sigma))$ associé à la permutation $\sigma \in S_3$ définie par

$$\sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 1.$$

3.2

(a) Montrer que pour chaque permutation $\sigma \in S_n$ et chaque $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a

$$d_{i,j}(\sigma) = \sum_{k=1}^{i} \sum_{\ell=1}^{j} p_{k,\ell}(\sigma).$$

(*Concrètement, $d_{i,j}(\sigma)$ compte le nombre de 1 dans le coin supérieur gauche de la matrice de permutation de σ, à l'intersection des i premières lignes et des j premières colonnes.*)

(b) Montrer que pour chaque permutation $\sigma \in S_n$ et chaque $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a

$$p_{i,j}(\sigma) = d_{i,j}(\sigma) - d_{i,j-1}(\sigma) - d_{i-1,j}(\sigma) + d_{i-1,j-1}(\sigma).$$

(c) Soit un tableau d'entiers $(\delta_{i,j})$, pour $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$. On suppose que :

(i) $\delta_{i,0} = 0$ et $\delta_{i,n} = i$ pour chaque $i \in [\![0, n]\!]$;

(ii) $\delta_{0,j} = 0$ et $\delta_{n,j} = j$ pour chaque $j \in [\![0, n]\!]$;

(iii) $\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i-1,j} + \delta_{i-1,j-1} \in \{0, 1\}$ pour chaque $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

Montrer qu'il existe une unique permutation $\sigma \in S_n$ telle que $\delta_{i,j} = d_{i,j}(\sigma)$ pour chaque $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$.

Pour toute la suite de cette partie, on se donne un corps $\mathbb{K}$ et un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.

♦ On appelle drapeau toute suite $\mathbb{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_n)$ de sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F_k = k$ pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$ et $F_{k-1} \subset F_k$ pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$. On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des drapeaux.

Étant donnés un drapeau $\mathbb{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_n)$ et un automorphisme $g \in \mathrm{GL}(E)$, on peut prendre les images par g des sous-espaces F_k ; on obtient alors un drapeau $g \cdot \mathbb{F} = (g(F_0), g(F_1), \ldots, g(F_n))$. L'application $(g, \mathbb{F}) \mapsto g \cdot \mathbb{F}$ ainsi définie est une action du groupe $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathscr{F}$.

3.3 Montrer que l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathscr{F}$ est transitive, c'est-à-dire que $\mathscr{F}$ ne contient qu'une seule orbite.

3.4 Soient $\mathbb{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_n)$ et $\mathbb{G} = (G_0, G_1, \ldots, G_n)$ deux drapeaux. Pour $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, on pose $\delta_{i,j} = \dim(F_i \cap G_j)$.

(a) Montrer que pour chaque $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i-1,j} + \delta_{i-1,j-1} = \dim\left(\frac{F_i \cap G_j}{(F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)}\right).$$

(Note : le membre de droite est la dimension du quotient de l'espace vectoriel $F_i \cap G_j$ par son sous-espace $(F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)$.)

(b) Montrer qu'il existe une unique permutation $\sigma \in S_n$ telle que $\delta_{i,j} = d_{i,j}(\sigma)$ pour chaque $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$.

♦ Dans le contexte de la question 3.4 (b), on dit que le couple $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ est en position σ. Rapprochant 3.2 (b) et 3.4 (a), on observe qu'alors

$$p_{i,j}(\sigma) = \dim\left(\frac{F_i \cap G_j}{(F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)}\right)$$

pour chaque $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

♦ Pour chaque permutation $\sigma \in S_n$, on note $\mathscr{O}_\sigma$ l'ensemble des couples de drapeaux $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ en position σ.

3.5 Soient $\mathbb{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_n)$ et $\mathbb{G} = (G_0, G_1, \ldots, G_n)$ deux drapeaux et soit $\sigma \in S_n$. Montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents :

(i) $(\mathbb{F}, \mathbb{G}) \in \mathscr{O}_\sigma$.

(ii) Il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que pour chaque $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, le sous-espace F_i soit engendré par $\{e_1, \ldots, e_i\}$ et le sous-espace G_j soit engendré par $\{e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(j)}\}$.

♦ On définit une action du groupe $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathscr{F}^2$ en posant $g \cdot (\mathbb{F}, \mathbb{G}) = (g \cdot \mathbb{F}, g \cdot \mathbb{G})$, pour $g \in \mathrm{GL}(E)$ et $(\mathbb{F}, \mathbb{G}) \in \mathscr{F}^2$.

3.6 Montrer que les $\mathscr{O}_\sigma$, pour $\sigma \in S_n$, sont les orbites de $\mathrm{GL}(E)$ dans $\mathscr{F}^2$.

♦ Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note $\tau_k \in S_n$ la transposition qui échange k et $k+1$.

3.7 Soit $(\sigma, k) \in S_n \times [\![1, n-1]\!]$ et soit $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ un couple de drapeaux en position σ.
On note $\mathscr{F}'$ l'ensemble des drapeaux $\mathbb{F}'$ ne différant de $\mathbb{F}$ que tout au plus par le sous-espace de dimension k. (Autrement dit, si l'on écrit $\mathbb{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_n)$ et $\mathbb{F}' = (F'_0, F'_1, \ldots, F'_n)$, alors la condition pour que $\mathbb{F}'$ appartienne à $\mathscr{F}'$ est que $F'_i = F_i$ pour chaque $i \in [\![0, n]\!] \backslash \{k\}$.)

(a) Montrer que pour chaque $\mathbb{F}' \in \mathscr{F}'$, le couple $(\mathbb{F}', \mathbb{G})$ est en position σ ou $\tau_k \circ \sigma$.

(b) On suppose que $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k+1)$. Montrer que pour tout $\mathbb{F}' \in \mathscr{F}' \backslash \{\mathbb{F}\}$, le couple $(\mathbb{F}', \mathbb{G})$ est en position $\tau_k \circ \sigma$.

3.1.4 Écritures réduites des permutations

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2. On rappelle que S_n désigne le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$.

♦ On note Γ l'ensemble des couples (i, j) d'entiers tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$. On appelle ensemble des inversions d'une permutation $\sigma \in S_n$ l'ensemble

$$I(\sigma) = \{(i, j) \in \Gamma \mid \sigma(i) > \sigma(j)\} ;$$

le cardinal de $I(\sigma)$ est noté $N(\sigma)$.

4.1 Pour quelle(s) permutation(s) $\sigma \in S_n$ le nombre $N(\sigma)$ est-il maximum ?

♦ Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note $\tau_k \in S_n$ la transposition qui échange k et $k+1$.

4.2

(a) Soit $(k, \sigma) \in [\![1, n-1]\!] \times S_n$. Montrer que

$$N(\tau_k \circ \sigma) = \begin{cases} N(\sigma) + 1 & \text{si } \sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k+1), \\ N(\sigma) - 1 & \text{si } \sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(k+1), \end{cases}$$

et que $I(\tau_k \circ \sigma)$ s'obtient à partir de $I(\sigma)$, soit en ajoutant, soit en retirant, un élément de Γ.

(b) Dans le cadre de la question (a), expliciter $\sigma^{-1} \circ \tau_k \circ \sigma$ en fonction de l'élément dont $I(\tau_k \circ \sigma)$ et $I(\sigma)$ diffèrent.

♦ Soit $T = \{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}\}$. On appelle mot une suite finie $m = (t_1, \ldots, t_\ell)$ d'éléments de T. On dit que l'entier ℓ est la longueur de m, et que les éléments t_1, ..., t_ℓ sont les lettres de m. Le cas du mot vide ($\ell = 0$) est autorisé.

Une écriture d'une permutation $\sigma \in S_n$ est un mot $m = (t_1, \ldots, t_\ell)$ tel que $\sigma = t_1 \circ \cdots \circ t_\ell$. On convient que le mot vide est une écriture de l'identité.

4.3

(a) Montrer que le groupe S_n est engendré par T.

(b) Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que σ possède une écriture de longueur égale à $N(\sigma)$ et que chaque écriture de σ est de longueur supérieure ou égale à $N(\sigma)$.
(Indication : raisonner par récurrence sur $N(\sigma)$.)

♦ Une écriture d'une permutation $\sigma \in S_n$ est dite réduite si elle est de longueur $N(\sigma)$.

4.4 Trouver une écriture réduite de chacun des six éléments de S_3.

4.5 Soit $\sigma \in S_n$ une permutation et soit $(t_1, \ldots, t_\ell)$ une écriture non réduite de σ. Montrer qu'il existe deux entiers p et q vérifiant $1 \leqslant p < q \leqslant \ell$ tels que $(t_1, \ldots, t_{p-1}, t_{p+1}, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_\ell)$ soit une écriture de σ.
(Indication : choisir p, q, et $(i, j) \in \Gamma$ de façon à pouvoir écrire

$$I(t_p \circ \cdots \circ t_\ell) = I(t_{p+1} \circ \cdots \circ t_\ell) \backslash \{(i, j)\} \quad \text{et} \quad I(t_q \circ \cdots \circ t_\ell) = I(t_{q+1} \circ \cdots \circ t_\ell) \cup \{(i, j)\},$$

puis utiliser la question 4.2 (b).)

Le résultat de la question 4.5 peut être interprété ainsi : si un mot m est une écriture non réduite d'une permutation $\sigma \in S_n$, alors on peut obtenir une écriture plus courte de σ en ôtant de m deux lettres convenablement choisies. En répétant cette opération autant de fois que nécessaire, on finit par extraire de m une écriture réduite de σ.

4.6 Soient m et m' deux écritures réduites d'une permutation $\sigma \in S_n$ différente de l'identité. Soit τ_i la première lettre de m et soit τ_j la première lettre de m'.

(a) On suppose que $i \neq j$. Montrer que σ possède une écriture réduite m'' commençant par (τ_j, τ_i).
(Indication : écrire $m = (t_1, \dots, t_\ell)$, constater que le mot $(\tau_j, t_1, \dots, t_\ell)$ n'est pas une écriture réduite de $\tau_j \circ \sigma$, et utiliser le résultat de la question 4.5.)

(b) On suppose que $|i - j| = 1$. Montrer que σ possède une écriture réduite m''' commençant par (τ_i, τ_j, τ_i).
(Indication : itérer la construction utilisée pour répondre à la question (a) et observer que τ_i et τ_j ne commutent pas.)

♦ Étant donnés deux mots m et m' de même longueur ℓ, on écrit $m \approx m'$ si l'on se trouve dans une des deux situations suivantes :
– Il existe un mot $(t_1, \dots, t_{\ell-2})$ et des éléments $p \in [\![0, \ell - 2]\!]$ et $(i, j) \in [\![1, n - 1]\!]^2$ tels que $|i - j| \geqslant 2$,

$$m = (t_1, \dots, t_p, \tau_i, \tau_j, t_{p+1}, \dots, t_{\ell-2}) \quad \text{et} \quad m' = (t_1, \dots, t_p, \tau_j, \tau_i, t_{p+1}, \dots, t_{\ell-2}).$$

– Il existe un mot $(t_1, \dots, t_{\ell-3})$ et des éléments $p \in [\![0, \ell - 3]\!]$ et $(i, j) \in [\![1, n - 1]\!]^2$ tels que $|i - j| = 1$,

$$m = (t_1, \dots, t_p, \tau_i, \tau_j, \tau_i, t_{p+1}, \dots, t_{\ell-3}) \quad \text{et} \quad m' = (t_1, \dots, t_p, \tau_j, \tau_i, \tau_j, t_{p+1}, \dots, t_{\ell-3}).$$

On écrit $m \sim m'$ s'il existe une suite finie $(m_0, \dots, m_k)$ de mots tels que

$$m = m_0 \approx m_1 \approx \cdots \approx m_{k-1} \approx m_k = m'.$$

(Le cas $k = 0$, qui correspond à $m = m'$, est autorisé.)

4.7

(a) Soient $m = (t_1, \dots, t_\ell)$ et $m' = (t'_1, \dots, t'_\ell)$ deux mots de même longueur. Montrer que si $m \sim m'$, alors $t_1 \circ \cdots \circ t_\ell = t'_1 \circ \cdots \circ t'_\ell$.

(b) Soient m et m' deux écritures réduites d'une même permutation. Montrer que $m \sim m'$.

3.1.5 Décomposition de Bruhat

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{K}$ est un corps.

Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, muni de sa base standard $(e_1, \dots, e_n)$. On identifie $\mathrm{GL}(E)$ à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

♦ On appelle drapeau standard le drapeau $(F_0, F_1, \dots, F_n)$, où $F_0 = \{0\}$ et où pour $k \geqslant 1$, le sous-espace vectoriel F_k est engendré par $\{e_1, \dots, e_k\}$.

♦ On note B le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices inversibles triangulaires supérieures.

♦ À chaque $\sigma \in S_n$ correspond une matrice de permutation P_σ, définie au début de la partie 3. C'est une matrice à coefficients dans $\{0, 1\}$, qu'on peut voir comme appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On note $C(\sigma)$ l'ensemble des matrices de la forme $b' P_\sigma b''$, avec $(b', b'') \in B^2$; c'est un sous-ensemble de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

5.1 Pour cette question, on se place dans le cas particulier $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On note $\sigma_0 \in S_n$ la permutation définie par $\sigma_0(i) = n + 1 - i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $C(\sigma_0)$ est dense dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
(Indication : utiliser le théorème D.)

♦ Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $a \in \mathbb{K}$, on note $y_k(a)$ la matrice de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ avec des 1 sur la diagonale, un a en position $(k+1, k)$, et des zéros partout ailleurs :

$$y_k(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & a & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.2 Montrer que $y_k(a) \in C(\tau_k)$ pour tout $(k, a) \in [\![1, n-1]\!] \times \mathbb{K}^*$.
(Indication : observer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a^{-1} \end{pmatrix}$*.)*

On reprend les notations de la partie 3.

5.3 Soit $\mathbb{F}$ le drapeau standard.

(a) Montrer que pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur l'ensemble des drapeaux, le sous-groupe B est le stabilisateur de $\mathbb{F}$.

(b) Montrer que pour chaque $\sigma \in S_n$, le couple de drapeaux $(\mathbb{F}, P_\sigma \cdot \mathbb{F})$ est en position σ.

(c) Montrer que pour chaque $\sigma \in S_n$, on a $C(\sigma) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid (\mathbb{F}, g \cdot \mathbb{F}) \in \mathscr{O}_\sigma\}$.

(d) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est l'union disjointe des $C(\sigma)$, autrement dit que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \bigcup_{\sigma \in S_n} C(\sigma)$ et que les $C(\sigma)$ sont deux à deux disjoints.

♦ Étant données deux parties C et D de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on note CD l'ensemble $\{gh \mid (g, h) \in C \times D\}$.
On reprend les notations de la partie 4.

5.4 Soit $(\sigma, k) \in S_n \times [\![1, n-1]\!]$ tel que $N(\tau_k \circ \sigma) > N(\sigma)$.

(a) Montrer que pour tout $g \in C(\sigma)$, le produit $P_{\tau_k}\, g$ appartient à $C(\tau_k \circ \sigma)$.
(Indication : utiliser la question 3.7 (b).)

(b) En déduire que $C(\tau_k)\, C(\sigma) = C(\tau_k \circ \sigma)$.

De la question 5.4 (b), on déduit que pour toute permutation $\sigma \in S_n$ et toute écriture réduite $(t_1, t_2, \ldots, t_\ell)$ de σ, on a

$$C(\sigma) = C(t_1)C(t_2)\cdots C(t_\ell). \qquad (\dagger)$$

La fin de cette partie a pour objectif de déterminer les adhérences des $C(\sigma)$. Pour donner un sens à ce problème, on se place désormais dans le cas particulier $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

♦ Étant données deux permutations ρ et σ, on écrit $\rho \leqslant \sigma$ si pour chaque $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, on a $d_{i,j}(\rho) \geqslant d_{i,j}(\sigma)$. (Noter le changement de sens de l'inégalité.)

5.5

(a) Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur S_n.

(b) Montrer que la permutation identité est le plus petit élément de S_n pour l'ordre $\leqslant$.

(c) L'ensemble S_n muni de l'ordre $\leqslant$ possède-t-il un plus grand élément ?

5.6 Soit $(\rho, \sigma) \in (S_n)^2$ tel que $\rho \leqslant \sigma$ et soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Démontrer les assertions suivantes :

(a) Si $N(\tau_k \circ \rho) < N(\rho)$, alors $\tau_k \circ \rho \leqslant \tau_k \circ \sigma$.

(b) Si $N(\tau_k \circ \rho) > N(\rho)$, alors $\rho \leqslant \tau_k \circ \sigma$.

5.7 Soit $\widehat{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\widehat{E}$, et soit d un entier positif. Montrer que

$$\left\{g \in \mathrm{GL}(\widehat{E}) \;\middle|\; \dim\big(F \cap g(G)\big) \geqslant d\right\}$$

est une partie fermée de $\mathrm{GL}(\widehat{E})$.

5.8 Soit $(\rho, \sigma) \in (S_n)^2$. Démontrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes.

(i) On a $\rho \leqslant \sigma$.

(ii) Pour toute écriture réduite $(t_1, \ldots, t_\ell)$ de σ, il existe une suite strictement croissante d'indices $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant \ell$ telle que $(t_{i_1}, \ldots, t_{i_k})$ soit une écriture réduite de ρ.

(iii) Il existe une écriture réduite $(t_1, \ldots, t_\ell)$ de σ et une suite strictement croissante d'indices $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant \ell$ telles que $(t_{i_1}, \ldots, t_{i_k})$ soit une écriture réduite de ρ.

(iv) L'ensemble $C(\rho)$ est inclus dans l'adhérence de $C(\sigma)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(Indication pour l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) : raisonner par récurrence sur $N(\sigma)$ et utiliser la question 5.6. Indication pour l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i) : utiliser les questions 3.4, 5.3 et 5.7.)

5.9 Démontrer que pour chaque $\sigma \in S_n$, l'adhérence de $C(\sigma)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est donnée par

$$\overline{C(\sigma)} = \bigcup_{\substack{\rho \in S_n \\ \rho \leqslant \sigma}} C(\rho).$$

(L'union porte sur l'ensemble des permutations $\rho \in S_n$ qui vérifient $\rho \leqslant \sigma$.)

3.1.6 Matrices unitriangulaires totalement positives

Comme indiqué à la fin de la partie 2, on étudie ici l'ensemble des matrices TP unitriangulaires inférieures. Conformément à l'usage, on note $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs.

Dans tout ce qui suit, les matrices considérées sont carrées de taille $n \times n$ et à coefficients réels, où $n \geqslant 2$ est un entier fixé. (Dans la question 6.1, on se focalise sur le cas particulier $n = 3$.)

Comme dans la partie 5, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $a \in \mathbb{R}$, on note $y_k(a)$ la matrice avec des 1 sur la diagonale, un a en position $(k+1, k)$, et des zéros partout ailleurs. On vérifie facilement que la matrice $y_k(a)$ est TP si et seulement si $a \geqslant 0$ (la démonstration de cette propriété n'est pas demandée). Par suite, tout produit de telles matrices est TP (question 1.2 (d)).

♦ On adopte les notations de la partie 4. Chaque mot $m = (\tau_{k_1}, \ldots, \tau_{k_\ell})$ donne lieu à une application $Y(m) : (\mathbb{R}_+^*)^\ell \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie ainsi :

$$Y(m)(a_1, \ldots, a_\ell) = y_{k_1}(a_1) \cdots y_{k_\ell}(a_\ell).$$

Par convention, si m est le mot vide, alors le domaine de définition de $Y(m)$ est un singleton et la valeur de $Y(m)$ en l'unique point où elle est définie est la matrice identité.

6.1 Dans cette question, on examine le cas particulier $n = 3$.

(a) Sur l'exemple du mot $m = (\tau_2, \tau_1)$, montrer que l'image de l'application $Y(m)$ est une sous-variété de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) Soient m_1, m_2, ..., m_6 les six mots trouvés dans la question 4.4. Vérifier que les images des applications $Y(m_1)$, $Y(m_2)$, ..., $Y(m_6)$ sont deux à deux disjointes et que leur union est l'ensemble des matrices TP unitriangulaires inférieures.

Les phénomènes observés dans la question 6.1 ont en fait lieu pour tout $n \geqslant 2$. La démonstration complète étant assez longue, nous nous contenterons de résultats partiels.

6.2 Soit $(i, j) \in [\![1, n-1]\!]^2$ et soit $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$.

(a) On suppose que $|i - j| \geqslant 2$. Vérifier que $y_i(a)y_j(b) = y_j(b)y_i(a)$.

(b) On suppose que $|i - j| = 1$. Montrer qu'il existe un unique $(a', b', c') \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ tel que

$$y_i(a)y_j(b)y_i(c) = y_j(a')y_i(b')y_j(c').$$

L'application $(a, b, c) \mapsto (a', b', c')$ de $(\mathbb{R}_+^*)^3$ dans lui-même ainsi définie est-elle bijective ?

♦ La question 6.2 entraîne que $Y(m)$ et $Y(m')$ ont même image si $m \approx m'$, avec la notation introduite à la fin de la partie 4. La question 4.7 (b) montre alors que si l'on se donne une permutation $\sigma \in S_n$, alors l'image de $Y(m)$ reste constante quand m parcourt l'ensemble des écritures réduites de σ. On note cette image $W(\sigma)$. La question 5.2 et l'égalité (†) (située à la suite de la question 5.4) montrent que $W(\sigma) \subset C(\sigma)$. Au vu de la question 5.3 (d), ceci entraîne que les ensembles $W(\sigma)$ sont deux à deux disjoints.

6.3

(a) Soit $\sigma \in S_n$, soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, et soit $g \in W(\sigma)$. Montrer que $y_k(a)g$ appartient à $W(\tau_k \circ \sigma)$ si $N(\tau_k \circ \sigma) > N(\sigma)$ et à $W(\sigma)$ dans le cas contraire.

(b) Soit $\sigma \in S_n$, soit $\ell = N(\sigma)$, et soit m une écriture réduite de σ. Montrer que l'application $Y(m) : (\mathbb{R}_+^*)^\ell \to W(\sigma)$ est bijective.

6.4

(a) Démontrer que pour chaque $\sigma \in S_n$, l'adhérence de $W(\sigma)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est

$$\overline{W(\sigma)} = \bigcup_{\substack{\rho \in S_n \\ \rho \leqslant \sigma}} W(\rho).$$

(b) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{\sigma \in S_n} W(\sigma)$ est stable par multiplication et est fermé dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

On peut montrer que $\displaystyle\bigcup_{\sigma \in S_n} W(\sigma)$ est l'ensemble des matrices TP unitriangulaires inférieures, et que si m est une écriture réduite d'une permutation, alors l'application $Y(m) : (\mathbb{R}_+^*)^\ell \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un plongement ; ceci implique que les $W(\sigma)$ sont des sous-variétés de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3.2 Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques générales

3.2.1 Sur la thématique du problème

Brève histoire de la théorie des matrices totalement positives

L'étude des matrices totalement positives (TP en abrégé) commence dans les années 1930.

D'un côté, Schoenberg, motivé par des problèmes d'estimation du nombre des zéros réels d'un polynôme et par la règle des signes de Descartes, étudie les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant la propriété de « diminution de la variation » [So] : on demande que pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ d'image $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, le nombre de changements de signe dans la suite finie $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ soit inférieur au nombre de changements de signe dans la suite $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Schoenberg observe que toute matrice TP a la propriété de diminution de la variation. On peut en fait compléter cet énoncé de façon à caractériser ainsi les matrices TP ; voir [P], ch. 3 pour l'énoncé précis. (Le lien avec les problèmes de zéros réels des polynômes vient de ce que si $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(a_1, \ldots, a_n)$ sont des suites strictement croissantes de réels strictement positifs, alors la matrice $B = (b_{i,j})$ de coefficients $b_{i,j} = x_i^{a_j}$ est TP ; c'est une conséquence de la question 1.3 du problème.)

D'un autre côté, Gantmacher et Krein s'intéressent aux propriétés oscillatoires des systèmes mécaniques couplés. Mathématiquement, cela se traduit par des équations différentielles ordinaires avec conditions aux limites (problème de Sturm-Liouville), et se ramène à l'étude des vecteurs propres de l'opérateur intégral de noyau donné par la fonction de Green $G(x, y)$ du problème. Sous certaines conditions, cette fonction de Green a la propriété de stricte totale positivité : pour tout $k \geqslant 1$ et tous k-uplets $(x_1, \ldots, x_k)$ et $(y_1, \ldots, y_k)$ strictement croissants de réels, on a

$$\begin{vmatrix} G(x_1, y_1) & \ldots & G(x_1, y_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G(x_k, y_1) & \ldots & G(x_k, y_k) \end{vmatrix} > 0.$$

Généralisant le théorème de Perron-Frobenius, Gantmacher et Krein montrent dans [GK1], [GK2] que si une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est strictement positive (c'est-à-dire si tous les mineurs de A sont strictement positifs), alors les valeurs propres de A sont réelles, simples, et strictement positives ; on dispose en outre d'informations sur le nombre de changements de signe des coordonnées des vecteurs propres.

Aujourd'hui, la théorie des matrices TP a des applications en combinatoire, en théorie des groupes de Lie, en probabilités (processus stochastiques de type diffusion linéaire), en théorie de l'approximation (fonctions splines), en statistiques (procédures de décision et tests), en théorie de la fiabilité, en économie mathématique, ... ; voir notamment [GM], [K], [Li], [P], [Su].

Aspects traités dans le problème

Le problème regardait trois aspects de la théorie des matrices TP.

Le premier est un théorème d'A. Whitney : l'ensemble des matrices TP est l'adhérence de l'ensemble des matrices strictement totalement positives. La question 1.4 (d) proposait d'établir ce fait quand on se restreignait au cas des matrices inversibles. On trouvera une démonstration du cas général dans [P], §2.2. En utilisant ce résultat et la continuité des valeurs propres d'une matrice en fonction de ses coefficients, on en déduit que les valeurs propres d'une matrice carrée TP sont des réels positifs.

Le second point abordé dans le problème est la factorisation des matrices TP inversibles. L'inégalité établie dans la question 2.3 (que l'on trouve par exemple dans [K], p. 88) implique que les mineurs principaux d'une matrice TP inversible sont tous strictement positifs ; invoquant le théorème D, on en déduit qu'une matrice TP inversible admet une factorisation $A = LDU$. Les coefficients des matrices

L, D et U sont alors positifs, car ils sont donnés par les formules

$$l_{i,j} = \frac{\Delta_{[\![1,j-1]\!]\cup\{i\},[\![1,j]\!]}(A)}{\Delta_{[\![1,j]\!],[\![1,j]\!]}(A)} \qquad (\text{pour } i \geqslant j),$$

$$u_{i,j} = \frac{\Delta_{[\![1,i]\!],[\![1,i-1]\!]\cup\{j\}}(A)}{\Delta_{[\![1,i]\!],[\![1,i]\!]}(A)} \qquad (\text{pour } i \leqslant j),$$

$$d_{i,i} = \frac{\Delta_{[\![1,i]\!],[\![1,i]\!]}(A)}{\Delta_{[\![1,i-1]\!],[\![1,i-1]\!]}(A)}.$$

Mieux : les matrices L, D et U sont en fait totalement positives, voir [C]. Avec la notation $y_k(a)$ introduite dans la partie 5.1 du problème, on peut en outre montrer que la matrice L s'écrit comme un produit $y_{k_1}(a_1)\cdots y_{k_N}(a_N)$, avec $N \in \mathbb{N}$, $(k_1,\ldots,k_N) \in [\![1,n-1]\!]^N$ et $(a_1,\ldots,a_N) \in (\mathbb{R}_+)^N$. Ce résultat est appelé théorème de Loewner-Whitney [Lo], [W]. On trouvera dans [FZ] un argument prouvant simultanément tous ces résultats.

Le troisième et dernier aspect concerne la structure de l'ensemble W des matrices TP unitriangulaires inférieures de taille $n \times n$. Cet ensemble n'est pas une sous-variété de l'espace affine des matrices unitriangulaire inférieures ; par exemple pour $n = 2$, on a

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R}_+ \right\},$$

tandis que $\mathbb{R}_+$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}$. L'ensemble W est toutefois semi-algébrique réel (défini par des inégalités faisant intervenir des fonctions polynomiales). On sait qu'on peut alors en construire une stratification, autrement dit, on peut décomposer W comme une union disjointe de sous-variétés convenablement positionnées les unes par rapport aux autres. Dans [Lu], Lusztig obtient explicitement une telle stratification en intersectant W avec les cellules de Bruhat $C(\sigma)$. Plus précisément, chaque intersection $W(\sigma) = W \cap C(\sigma)$ est une sous-variété de dimension $N(\sigma)$, et on a

$$\overline{W(\sigma)} = \bigcup_{\substack{\rho\in S_n \\ \rho\leqslant\sigma}} W(\rho).$$

La partie 6 du problème avait pour ambition de faire un premier pas en direction de ces résultats. Avant cela, il convenait de prouver la décomposition de Bruhat

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \bigcup_{\sigma\in S_n} C(\sigma) \qquad (\text{union disjointe}),$$

où $C(\sigma) = BP_\sigma B$ (voir l'énoncé, partie 5, pour les notations). Ce résultat classique est relié à la décomposition LU : l'ensemble des matrices inversibles admettant une décomposition LU est l'ensemble $P_{\sigma_0}\, C(\sigma_0)$ (question 5.1).

La décomposition de Bruhat et l'étude de ses propriétés occupaient les parties 3 à 5 du problème. À une approche calculatoire et algorithmique basée sur des opérations élémentaires sur les matrices, nous avons préféré un point de vue plus géométrique, basée sur la position relative de deux drapeaux dans un espace vectoriel E de dimension finie n. Dans la partie 3, on démontrait que les orbites de $\mathrm{GL}(E)$ sur l'ensemble des couples de drapeaux sont paramétrées par le groupe symétrique S_n. Dans la partie 4, on rappelait que S_n était engendré par l'ensemble de transpositions

$$T = \big\{(i \;\; i+1) \,\big|\, i \in [\![1,n-1]\!]\big\}$$

et on étudiait les « écritures réduites » d'une permutation σ donnée, c'est-à-dire les mots $(t_1,t_2,\ldots,t_\ell) \in T^\ell$ de longueur ℓ minimale tels que $\sigma = t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_\ell$; la question 4.5 est la condition d'échange de Matsumoto [M]. Dans la partie 5, on établissait enfin la décomposition de Bruhat (question 5.3), puis, après les délicates questions 5.6 et 5.7, on parvenait à une description complète et explicite de l'adhérence des cellules $C(\sigma)$ (question 5.9).

Références

[C] C. Cryer, *The LU-factorization of totally positive matrices*, Linear Algebra Appl. **7** (1973), 83–92.

[FS] S. Fomin et M. Shapiro, *Stratified spaces formed by totally positive varieties*, Michigan Math. J. **48** (2000), 253–270.

[FZ] S. Fomin et A. Zelevinsky, *Total positivity : tests and parametrizations*, Math. Intelligencer **22** (2000), 23–33.

[GK1] F. R. Gantmacher et M. G. Krein, *Sur les matrices oscillatoires*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **201** (1935) 577–579.

[GK2] F. R. Gantmacher et M. G. Krein, *Sur les matrices oscillatoires et complètement non négatives*, Compositio Math. **4** (1937), 445–476.

[GM] M. Gasca et C. A. Micchelli (eds.), *Total positivity and its applications*, Mathematics and its applications vol. 359, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[K] S. Karlin, *Total Positivity*, Stanford University Press, 1968.

[Li] P. Littelmann, *Bases canoniques et applications*, Séminaire Bourbaki 1997-98, exposé n° 847, Astérisque **252** (1998), 287–306.

[Lo] C. Loewner, *On totally positive matrices*, Math. Z. **63** (1955) 338-340.

[Lu] G. Lusztig, *Total positivity in reductive groups*, in : *Lie theory and geometry : in honor of Bertram Kostant*, Progress in Mathematics vol. 123, Birkhäuser, 1994.

[M] H. Matsumoto, *Générateurs et relations des groupes de Weyl généralisés*, C. R. Acad. Sci. Paris **258** (1964) 3419–3422.

[P] A. Pinkus, *Totally Positive Matrices*, Cambridge tracts in Mathematics 181, Cambridge University Press, 2010, Cambridge.

[So] I. J. Schoenberg, *Über variationsvermindernde lineare Transformationen*, Math. Z. **32** (1930), 321–322.

[Su] L. L. Schumaker, *Spline functions : basic theory*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, 1981.

[W] A. M. Whitney, *A reduction theorem for totally positive matrices*, J. d'Analyse Math. **2** (1952), 88–92.

3.2.2 Commentaires sur les réponses des candidats

Questions de cours et autres résultats classiques

Ces deux questions, placées en tête du sujet, et de ce fait bien mises en évidence, avaient valeur de test.

Théorème A

La démonstration de ce résultat relève du programme de première année de licence, alors que l'agrégation est un concours réservé aux titulaires d'un master. Il est dès lors plutôt inquiétant de constater que seulement 15% des candidats parviennent à une solution satisfaisante.

Cette question a révélé de graves lacunes en algèbre linéaire, qui sont incompréhensibles à ce niveau de qualification. De nombreux candidats n'ont pas peur d'envisager le cas où (avec les notations de l'énoncé) l'intersection $F \cap G$ serait vide ; d'autres écrivent sans vergogne $\dim(F \backslash (F \cap G)) = \dim F - \dim(F \cap G)$ sans voir que $F \backslash (F \cap G)$ n'est pas un espace vectoriel ; d'autres enfin pensent que d'une base d'un espace vectoriel, on peut extraire une base de chacun de ses sous-espaces vectoriels.

Théorème B

Cette question, plus calculatoire, a été mieux réussie que la précédente. Un grand nombre de candidats ont observé que le résultat pouvait être obtenu par récurrence sur la taille de la matrice en développant selon la première ligne ou la première colonne de la matrice. Les correcteurs ont été attentifs à la clarté et à la précision de la rédaction, et au fait que l'argument présenté était complet.

Problème

1.1

(b) Cette question a causé bien des soucis aux candidats. Bien peu savent que le produit cartésien $[\![1,n]\!]^k$ est l'ensemble des applications de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Quoi qu'il en soit, on attendait ici surtout des candidats qu'ils utilisent à bon escient l'hypothèse que f est alternée.

(d) Plusieurs candidats écrivent

$$f(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)}) = (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} f(X_1,\ldots,X_n)$$

sans observer que $(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}$ vaut toujours -1 puisque $\mathrm{sgn}(\sigma)$ vaut ± 1. Autrement dit : les candidats utilisant des notations inhabituelles sont invités à préciser clairement les conventions qu'ils utilisent.

1.2

(b) La plupart des candidats ont affirmé que l'ensemble des mineurs d'une matrice est égal à l'ensemble des mineurs de sa transposée, mais relativement peu ont su prouver la formule $\Delta_{I,J}({}^t(A) = \Delta_{J,I}(A)$ sans s'embrouiller dans les indices.

(c) De nombreux candidats ont senti que les mineurs de la matrice identité valent tous 0 ou 1. Le barème n'a toutefois récompensé que les candidats qui ont su donner une démonstration convaincante de ce fait.

(e) On attendait ici un contre-exemple explicite, sans erreur dans le calcul de l'inverse.

1.3

(a) Plusieurs candidats ont confondu lemme de Rolle et théorème des valeurs intermédiaires.

1.4

(a) Il fallait ici faire voir qu'à $A \in \mathscr{G}_+^*$ donnée, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ et tout $H \in \mathscr{P}_k(n)$, il existe $I \in \mathscr{P}_k(n)$ tel que $\Delta_{H,I}(A) \neq 0$. Beaucoup de candidats (mais pas tous) formulent convenablement cette première étape dans le raisonnement. En revanche, très peu nombreux sont ceux qui parviennent à une solution correcte : le jury attendait un argument plus précis que la simple affirmation du fait que cette propriété découlait de l'inversibilité de A.

(b) Curieusement, cette question n'a été traitée correctement que par une minorité de copies.

(d) Une bonne proportion des candidats abordant cette question se bornent à avancer des arguments qui n'établissent que l'inclusion $\mathscr{G}_+ \subset \overline{\mathscr{G}_+^*}$.

2.1

(a) Pour traiter cette question très facile, plusieurs candidats ont été tentés d'appliquer le théorème D, sans s'apercevoir que les hypothèses dudit théorème n'étaient pas satisfaites.

(b) Cette question a révélé le manque de soin de bien des candidats.

(d) Cette première question difficile du problème n'a presque jamais été traitée de façon satisfaisante. Les candidats qui ont invoqué un argument de densité mais qui, ce faisant, se sont implicitement placés dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ont été récompensés de façon marginale.

2.3

(a) Les correcteurs se sont ici attachés à contrôler la logique du raisonnement suivi.

3.2

(a) La notation $1_{\{P\}}$ est employée par plusieurs candidats pour désigner 1 si la propriété P est vraie et 0 si P est fausse. Cette notation saugrenue, qui ne jouit d'aucune reconnaissance internationale, mériterait d'être définie par ses utilisateurs.

(c) L'existence de σ n'a été correctement établie que dans une minorité de copies. Il fallait expliquer clairement pourquoi la matrice $P = (p_{i,j})$ de coefficients

$$p_{i,j} = \delta_{i,j} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i-1,j} + \delta_{i-1,j-1}$$

est une matrice de permutation.

3.3 Cette question a permis de distinguer les candidats ayant compris la définition d'une action de groupe.

3.4

(b) Avec les notations de l'énoncé, il s'agissait d'établir que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le sous-espace $(F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)$ est de codimension au plus 1 dans $F_i \cap G_j$. Seule une poignée de candidats ont su établir ce résultat, les autres se contentant d'un discours approximatif sans valeur probante. Les correcteurs ont été ici particulièrement vigilants.

4.1 Les candidats se sont souvent bornés à indiquer la permutation réalisant le maximum de la fonction N, mais n'ont hélas pas toujours justifié leur réponse. Il fallait également expliquer pourquoi N n'atteignait son maximum qu'en cette permutation.

4.2

(a) Pour noter cette question, les correcteurs ont apprécié la clarté et le caractère complet de la discussion. Les rédactions embrouillées et le manque de soin ont été pénalisés.

4.3

(a) Les candidats pouvaient bien sûr supposer connu le fait que S_n soit engendré par les transpositions.

(b) Les quelques copies qui abordent cette question tentent de prouver les deux assertions au sein d'une même récurrence, ce qui n'est pas possible.

5.1 Cette question pourtant classique n'a quasiment jamais été traitée.

5.5

(a) La justification du caractère antisymétrique de la relation $\leqslant$ n'est satisfaisante que dans un cinquième des copies traitant cette question.

6.2

(a) Les correcteurs n'apprécient pas les tentatives de grapillage de point. Il avait été clairement annoncé que les questions de la partie 6 étaient destinées aux candidats ayant abordé de façon satisfaisante les parties 1 et 5.

3.3 Corrigé de l'épreuve de mathématiques générales

3.3.0 Questions de cours et autres résultats classiques

Preuve du théorème A.
Posons $H = F\times G$ et contemplons l'application linéaire $u : (x,y) \mapsto x+y$ de H dans E. Son image est le sous-espace vectoriel $F+G$. Son noyau est l'image de l'application linéaire $v : x \mapsto (x,-x)$ de $F\cap G$ dans H, laquelle est injective. Le théorème A s'obtient alors en combinant l'égalité $\dim H = \dim F + \dim G$ et le théorème du rang :

$$\dim(F+G) = \dim(\operatorname{im} u) = \dim H - \dim(\ker u) = \dim H - \dim(\operatorname{im} v) = \dim H - \dim(F\cap G).$$

On peut aussi prouver le théorème A en considérant des sous-espaces vectoriels F' et G' supplémentaires de $F\cap G$ dans F et G, respectivement, et en vérifiant que l'application somme induit un isomorphisme entre $(F\cap G)\times F'\times G'$ et $F+G$.

Preuve du théorème B.
Une matrice et sa transposée ayant même déterminant, nous nous bornerons à traiter le cas de

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & F \end{array}\right).$$

Soit n le nombre de lignes de A, soit k le nombre de lignes de B, et soit $\mathbb{K}$ le corps auquel les coefficients de A appartiennent. Notons $\mathbb{I}_k$ et $\mathbb{I}_{n-k}$ les matrices identités d'ordre k et $n-k$, respectivement.

La matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_k & C \\ \hline 0 & \mathbb{I}_{n-k} \end{array}\right)$$

a pour déterminant 1, car nous pouvons la ramener à la matrice identité en retranchant de chacune de ses $(n-k)$ dernières colonnes une combinaison linéaire judicieuse des k premières.

Soit $\Phi : \mathscr{M}_k(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ l'application donnée par

$$\Phi : X \mapsto \det \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{I}_{n-k} \end{array}\right).$$

Manifestement, $\Phi(X)$ est multilinéaire alternée en les vecteurs colonnes de X, donc Φ est proportionnelle au déterminant. Le coefficient de proportionnalité est égal à $\Phi(\mathbb{I}_k) = 1$, d'où $\Phi(X) = \det X$. Nous obtenons donc que

$$\det \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{I}_{n-k} \end{array}\right) = \det B.$$

On montre de la même manière que

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_k & 0 \\ \hline 0 & F \end{array}\right) = \det F.$$

Le résultat désiré s'obtient alors à partir de l'égalité

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_k & 0 \\ \hline 0 & F \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_k & C \\ \hline 0 & \mathbb{I}_{n-k} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{I}_{n-k} \end{array}\right)$$

par multiplicativité du déterminant.

D'autres méthodes sont bien sûr possibles : on peut utiliser la formule exprimant le déterminant comme une somme alternée sur le groupe symétrique S_n et observer que les permutations $\sigma \in S_n$ contribuant effectivement à la somme stabilisent $[\![1,k]\!]$ et $[\![k+1,n]\!]$, ou bien on peut développer le déterminant selon la première colonne et raisonner par récurrence.

3.3.1 Matrices totalement positives

1.1

(a) Par définition du produit matriciel, on a

$$c_{h,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{h,i} b_{i,j}$$

pour tout $(h, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, p]\!]$. Portant notre attention sur les lignes h_1, ..., h_k et prenant $j = j_p$, cela donne

$$Y_p = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j_p} X_i$$

pour tout $p \in [\![1, k]\!]$.

(b) Substituant cette expression dans $f(Y_1, \dots, Y_k)$ et utilisant la k-linéarité de f, on obtient

$$\begin{aligned} f(Y_1, \dots, Y_k) &= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \quad b_{i_1,j_1} \cdots b_{i_k,j_k} \quad f(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \\ &= \sum_{\varphi:[\![1,k]\!] \to [\![1,n]\!]} b_{\varphi(1),j_1} \cdots b_{\varphi(k),j_k} \quad f(X_{\varphi(1)}, \dots, X_{\varphi(k)}), \end{aligned}$$

le lien entre les deux lignes consistant à voir une famille $(i_1, \dots, i_k) \in [\![1, n]\!]^k$ comme une application $\varphi : [\![1, k]\!] \to [\![1, n]\!]$. L'expression proposée dans le sujet découle directement de celle obtenue ci-dessus, compte tenu du caractère alterné de f.

(c) Chaque application injective $\varphi : [\![1, k]\!] \to [\![1, n]\!]$ s'écrit de façon unique sous la forme $\psi \circ \sigma$, où $\sigma \in S_k$ et où $\psi : [\![1, k]\!] \to [\![1, n]\!]$ est une application strictement croissante. En outre, la donnée d'une telle application ψ est équivalente à celle de son image $I = \{\psi(1), \dots, \psi(k)\}$. Concrètement, si on appelle i_1, ..., i_k les éléments de I rangés dans l'ordre croissant, alors pour tout $p \in [\![1, k]\!]$, on a $\psi(p) = i_p$ et $\varphi(p) = \psi(\sigma(p)) = i_{\sigma(p)}$.
La formule désirée se déduit de celle obtenue dans la question précédente en remplaçant la sommation sur φ par une sommation sur $(I, \sigma) \in \mathscr{P}_k(n) \times S_k$.

(d) Prenons pour f le déterminant dans la base standard de E. Alors $f(Y_1, \dots, Y_k) = \Delta_{H,J}(C)$. Prenons $I \in \mathscr{P}_k(n)$ et appelons i_1, ..., i_k les éléments de I, rangés dans l'ordre croissant. Utilisant l'antisymétrie de f, on trouve

$$f(X_{i_{\sigma(1)}}, \dots, X_{i_{\sigma(k)}}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\ f(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\ \Delta_{H,I}(A).$$

La question (c) donne alors

$$f(Y_1, \dots, Y_k) = \sum_{I \in \mathscr{P}_k(n)} \Delta_{H,I}(A) \left(\sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\ b_{i_{\sigma(1)},j_1} \cdots b_{i_{\sigma(k)},j_k} \right).$$

L'expression entre parenthèses est une définition possible du mineur

$$\Delta_{I,J}(B) = \begin{vmatrix} b_{i_1,j_1} & \dots & b_{i_1,j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i_k,j_1} & \dots & b_{i_k,j_k} \end{vmatrix},$$

d'où la formule de Binet-Cauchy.

1.2

(a) Les coefficients d'une matrice sont ses mineurs d'ordre 1. Par suite, les coefficients d'une matrice TP sont positifs.

(b) Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $n \times n$. Notons ${}^tA$ la transposée de A. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et soit $(I, J) \in \mathscr{P}_k(n)^2$. Notons i_1, ..., i_k (respectivement, j_1, ..., j_k) les éléments de I (respectivement, J), rangés par ordre croissant. Alors

$$\Delta_{I,J}({}^tA) = \begin{vmatrix} a_{j_1,i_1} & \dots & a_{j_k,i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1,i_k} & \dots & a_{j_k,i_k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{j_1,i_1} & \dots & a_{j_1,i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_k,i_1} & \dots & a_{j_k,i_k} \end{vmatrix} = \Delta_{J,I}(A),$$

puisqu'une matrice carrée et sa transposée ont même déterminant. Ainsi chaque mineur de ${}^tA$ est un mineur de A. Par suite, ${}^tA$ est TP dès que A est TP.

(c) Soit un entier $n \geqslant 1$, soit $\mathbb{I}_n$ la matrice identité dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, soit $k \in [\![1, n]\!]$, et soit $(I, J) \in \mathscr{P}_k(n)$. Si $I = J$, alors $\Delta_{I,J}(\mathbb{I}_n)$ est le déterminant de la matrice identité de taille $k \times k$, donc vaut 1. Sinon, c'est que $I \not\subset J$, puisque I et J ont même cardinal ; si on écrit i_1, ..., i_k les éléments de I rangés dans l'ordre croissant, alors on peut trouver $r \in [\![1, k]\!]$ tel que $i_k \notin J$, ce qui montre que $\Delta_{I,J}(\mathbb{I}_n)$ est nul, puisque la r-ième ligne de la matrice dont il est le déterminant est nulle. Dans les deux cas, $\Delta_{I,J}(\mathbb{I}_n) \geqslant 0$, ce qu'il fallait démontrer.

(d) Soient A et B deux matrices carrées de même taille. La formule de Binet-Cauchy exprime chaque mineur de AB comme une somme de produits de mineurs de A et de B. Par suite, les mineurs de AB sont positifs dès que les mineurs de A et B le sont.

(e) On vérifie sans peine que les mineurs de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont tous égaux à 1 ou à 0 ; cette matrice est donc TP. Par contre, son inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas TP, car un de ses mineurs vaut -1.

1.3

(a) Soit (H_n) la proposition : « Soit $(b_1, \dots, b_n) \in \mathscr{C}_n$ et soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Si la fonction

$$\Big(\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lambda_1 e^{b_1 x} + \dots + \lambda_n e^{b_n x}\Big)$$

s'annule en n points distincts de $\mathbb{R}$, alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. »

Certainement, (H_1) est vraie, car la fonction exponentielle ne s'annule pas. Soit $n \geqslant 2$, supposons (H_{n-1}) vraie, et prouvons (H_n).

À cette fin, prenons $(b_1, \dots, b_n) \in \mathscr{C}_n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, et supposons que la fonction

$$\Big(\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lambda_1 e^{b_1 x} + \dots + \lambda_{n-1} e^{b_{n-1} x} + \lambda_n e^{b_n x}\Big)$$

ait n zéros distincts, disons a_1, ..., a_n, ordonnés de façon croissante. En ces points, la fonction

$$f : \Big(\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lambda_1 e^{(b_1 - b_n)x} + \dots + \lambda_{n-1} e^{(b_{n-1} - b_n)x} + \lambda_n\Big)$$

s'annule. Le lemme de Rolle montre alors que la dérivée f' possède un zéro dans chacun des intervalles $]a_1, a_2[$, ..., $]a_{n-1}, a_n[$, donc possède (au moins) $n - 1$ zéros distincts. Or f' est la fonction

$$\Big(\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lambda_1 (b_1 - b_n) e^{(b_1 - b_n)x} + \dots + \lambda_{n-1}(b_{n-1} - b_n) e^{(b_{n-1} - b_n)x}\Big).$$

Vu que $(b_1-b_n,\dots,b_{n-1}-b_n)\in\mathscr{C}_{n-1}$, nous pouvons appliquer à f' la proposition (H_{n-1}) et nous obtenons l'égalité $\lambda_i(b_i-b_n)=0$ pour chaque $i\in[\![1,n-1]\!]$. Rappelant ici que $b_1<\cdots<b_{n-1}<b_n$, cela donne $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0$. Ainsi, f est la fonction constante valant identiquement λ_n ; comme elle s'annule aux points a_i, c'est que $\lambda_n=0$. Ceci achève la preuve de (H_n).

(b) Soit X un vecteur colonne tel que $EX=0$. Alors, appelant λ_1, ..., λ_n les coefficients de X, la fonction

$$\left(\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\lambda_1e^{b_1x}+\cdots+\lambda_{n-1}e^{b_{n-1}x}+\lambda_ne^{b_nx}\right)$$

s'annule en a_1, ..., a_n, donc en n points distincts. D'après (a), ceci implique $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$, c'est-à-dire $X=0$.

Ainsi, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par la matrice E est injectif. Il est donc bijectif (nous sommes en dimension finie), ce qui signifie que la matrice E est inversible.

(c) L'ensemble $\mathscr{C}_n$ est convexe, car intersection de demi-espaces ouverts, et non-vide. Il est donc connexe par arcs, donc connexe.

(d) Considérons l'application de $(\mathscr{C}_n)^2$ dans $\mathbb{R}$ qui associe $\det E$ à $(\underline{a},\underline{b})$. D'après la question (b), cette application ne s'annule pas. De plus, elle est continue, car chaque coefficient de E est fonction continue de $(\underline{a},\underline{b})$. Enfin, son domaine de définition est connexe. Son image est donc une partie connexe de $\mathbb{R}^*$; autrement dit, cette fonction garde un signe constant.

Il nous reste à montrer que ce signe est $+$. Pour cela, un exemple suffit. Prenons ainsi $\underline{b}=(0,\dots,n-1)$. La formule du déterminant de Vandermonde donne

$$\det E=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(e^{a_j}-e^{a_i})>0.$$

1.4

(a) Soit $(A,B)\in\mathscr{G}_+\times\mathscr{G}_+^*$. Soit $k\in[\![1,n]\!]$ et soit $(H,J)\in\mathscr{P}_k(n)^2$. La formule de Binet-Cauchy donne

$$\Delta_{H,J}(AB)=\sum_{I\in\mathscr{P}_k(n)}\Delta_{H,I}(A)\ \Delta_{I,J}(B).$$

Dans cette somme, tous les $\Delta_{I,J}(B)$ sont strictement positifs et tous les $\Delta_{H,I}(A)$ sont positifs. Par conséquent, pour montrer que $\Delta_{H,J}(AB)>0$, il suffit de montrer qu'un des $\Delta_{H,I}(A)$ est non nul.

Notons $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de taille $n\times n$. La formule de Binet-Cauchy donne

$$\Delta_{H,H}(\mathbb{I}_n)=\sum_{I\in\mathscr{P}_k(n)}\Delta_{H,I}(A)\ \Delta_{I,H}(A^{-1}).$$

Comme $\Delta_{H,H}(\mathbb{I}_n)=1$, un des termes de la somme n'est pas nul. Il existe donc $I\in\mathscr{P}_k(n)$ tel que $\Delta_{H,I}(A)\neq0$, ce qui achève la preuve.

Une démonstration alternative pour la seconde partie du raisonnement consiste à observer que la matrice de taille $k\times n$ extraite de A, obtenue en conservant les lignes d'indice appartenant à H, est de rang k, et par conséquent possède un mineur non nul d'ordre k.

(b) Considérons la matrice T de l'énoncé. Soit $k\in[\![1,n]\!]$ et soit $(H,J)\in\mathscr{P}_k(n)^2$. Notons i_1, ..., i_k (respectivement, j_1, ..., j_k) les éléments de I (respectivement, J), rangés par ordre croissant. En développant

$$\theta^{(i_p-j_q)^2}=\theta^{i_p^2}\times\theta^{j_q^2}\times e^{-2(\ln\theta)\,i_pj_q}$$

et en utilisant la multilinéarité du déterminant à la fois selon les lignes et selon les colonnes d'une matrice, on trouve

$$\Delta_{I,J}(T)=\begin{vmatrix}\theta^{(i_1-j_1)^2}&\dots&\theta^{(i_1-j_k)^2}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \theta^{(i_k-j_1)^2}&\dots&\theta^{(i_k-j_k)^2}\end{vmatrix}=\left(\prod_{p=1}^k\theta^{i_p^2}\right)\times\left(\prod_{q=1}^k\theta^{j_q^2}\right)\times\begin{vmatrix}e^{-2(\ln\theta)\,i_1j_1}&\dots&e^{-2(\ln\theta)\,i_1j_k}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ e^{-2(\ln\theta)\,i_kj_1}&\dots&e^{-2(\ln\theta)\,i_kj_k}\end{vmatrix}.$$

Comme $-2(\ln\theta) > 0$, le déterminant à droite est de la forme étudiée dans la question 1.3 (d), et est donc strictement positif. Ainsi $\Delta_{I,J}(T) > 0$, ce qu'il fallait démontrer.

(c) Soit (θ_n) une suite d'éléments de $]0,1[$ tendant vers zéro quand n tend vers l'infini. À partir de θ_n, formons la matrice T_n, comme dans la question (b). Chaque T_n appartient à $\mathscr{G}_+^*$, et la suite (T_n) tend vers la matrice identité quand n tend vers l'infini.

(d) Par définition, $\mathscr{G}_+$ est l'ensemble des matrices $A \in \mathscr{G}$ telles que $\Delta_{I,J}(A) \geqslant 0$ pour chaque $k \in [\![1,n]\!]$ et chaque $(I,J) \in \mathscr{P}_k(n)^2$. Du fait que les $\Delta_{I,J}$ sont des fonctions continues sur $\mathscr{G}$ suit alors que $\mathscr{G}_+$ est une partie fermée de $\mathscr{G}$. Ainsi, $\mathscr{G}_+$ est un fermé de $\mathscr{G}$ qui contient $\mathscr{G}_+^*$; il contient donc l'adhérence de $\mathscr{G}_+^*$ dans $\mathscr{G}$.

Prouvons l'inclusion opposée. Soit $A \in \mathscr{G}_+$. Considérons la suite (T_n) construite à la question (c). Chaque matrice AT_n appartient à $\mathscr{G}_+^*$, d'après la question (a), et la suite (AT_n) a pour limite A, car la multiplication des matrices est une application continue. Nous voyons ainsi que A appartient à l'adhérence de $\mathscr{G}_+^*$.

Les deux inclusions $\mathscr{G}_+ \supset \overline{\mathscr{G}_+^*}$ et $\mathscr{G}_+ \subset \overline{\mathscr{G}_+^*}$ prouvent l'égalité demandée.

3.3.2 Factorisation LDU d'une matrice TP inversible

2.1

(a) Décomposons A par blocs

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right),$$

avec $A_1 \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathscr{M}_{q,n-q}(\mathbb{K})$, $A_3 \in \mathscr{M}_{n-q,q}(\mathbb{K})$, $A_4 \in \mathscr{M}_{n-q,n-q}(\mathbb{K})$. Par hypothèse, A_1 est de déterminant non nul, donc est inversible. La factorisation souhaitée est équivalente au système d'équations

$$A_1 = B, \quad A_2 = F, \quad A_3 = EB, \quad A_4 = EF + C,$$

qui admet une solution unique, à savoir

$$B = A_1, \quad C = A_4 - A_3A_1^{-1}A_2, \quad E = A_3A_1^{-1}, \quad F = A_2.$$

(b) Donnons-nous $(i,j) \in [\![1, n-q]\!]^2$. Appelons P et Q les deux facteurs du produit matriciel trouvé dans la question précédente, de sorte que $A = PQ$, et écrivons la formule de Binet-Cauchy pour $H = [\![1,q]\!] \cup \{q+i\}$ et $J = [\![1,q]\!] \cup \{q+j\}$:

$$d_{i,j} = \sum_{I \in \mathscr{P}_{q+1}(n)} \Delta_{H,I}(P)\Delta_{I,J}(Q).$$

Si $I \neq H$, alors I contient un élement dans $[\![q+1,n]\!]\backslash\{q+i\}$; cela nous donne une colonne nulle dans la matrice dont $\Delta_{H,I}(P)$ est le déterminant, d'où $\Delta_{H,I}(P) = 0$. En revanche, $\Delta_{H,H}(P) = 1$, car c'est le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. Il vient donc, en notant X_j la j-ième colonne de F,

$$d_{i,j} = \Delta_{H,J}(Q) = \left|\begin{array}{c|c} B & X_j \\ \hline 0 & c_{i,j} \end{array}\right| = \det\,(B)\; c_{i,j}.$$

Ainsi, $D = (\det B)\; C$.

(c) Par multilinéarité du déterminant, on en déduit que $\det D = (\det B)^{n-q}\,(\det C)$. La formule désirée vient alors des égalités évidentes $\det A = (\det B)\;(\det C)$ et $\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}(A) = \det B$.

(d) Deux stratégies peuvent être utilisées pour résoudre cette question : utiliser des calculs algébriques ou déduire par densité le cas général du cas établi dans la question précédente.

Utilisation de calculs algébriques.
Le cas $n = q + 1$ étant banal, nous supposerons que $n > q + 1$. Nous nous plaçons dans le cas qui reste à établir, à savoir $\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}(A) = 0$, et voulons établir que $\det D = 0$.
Reprenons l'écriture par blocs

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)$$

de la question (a). Pour $(i, j) \in [\![1, n-q]\!]^2$, en développant le déterminant

$$d_{i,j} = \Delta_{[\![1,q]\!]\cup\{q+i\},[\![1,q]\!]\cup\{q+j\}}(A)$$

selon la dernière colonne, nous obtenons

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+q+1}\, a_{k,q+j}\, \Delta_{([\![1,q]\!]\setminus\{k\})\cup\{q+i\},[\![1,q]\!]}(A),$$

puis en développant les mineurs d'ordre q qui viennent d'apparaître, cette fois-ci selon la dernière ligne, nous obtenons

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{\ell=1}^{q} (-1)^{k+\ell+1}\, a_{k,q+j}\, a_{q+i,\ell}\, \Delta_{[\![1,q]\!]\setminus\{k\},[\![1,q]\!]\setminus\{\ell\}}(A).$$

Autrement dit, si nous introduisons la comatrice $\widetilde{A_1}$ de A_1, de taille $q \times q$, dont l'élément en position $(k, \ell) \in [\![1, q]\!]^2$ est $(-1)^{k+\ell}\Delta_{[\![1,q]\!]\setminus\{k\},[\![1,q]\!]\setminus\{\ell\}}(A)$, nous obtenons $D = -A_3\, {}^t\widetilde{A_1}\, A_2$.
Si A_1 est de rang inférieur ou égal à $q-2$, alors $\widetilde{A_1} = 0$, et donc $D = 0$. Si A_1 est de rang $q-1$, alors $\widetilde{A_1}$ est de rang 1, et donc D est de rang au plus 1. Dans les deux cas, nous avons donc $\det D = 0$, ce que nous voulions démontrer.

Déduction par densité.
La méthode la plus simple est toutefois de déduire le cas général du cas particulier démontré dans la question (c). Il s'agit de rendre précise l'idée que les deux membres de l'identité de Sylvester dépendent continûment de A et que l'inéquation $\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}(A) \neq 0$ définit un sous-ensemble dense de $\mathscr{M}_q(\mathbb{K})$. La difficulté de l'exercice vient du fait que le corps $\mathbb{K}$ n'est a priori pas le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Pour s'en sortir, l'astuce classique au niveau de l'agrégation consiste à plonger $\mathbb{K}$ dans le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$ et à contempler la matrice $\widehat{A} = A - XI_n$. Le mineur $\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}(\widehat{A})$ a $(-1)^q X^q$ comme coefficient dominant, donc est non nul. D'après la question (c), l'identité de Sylvester a donc lieu pour $\widehat{A}$ dans $\mathbb{K}(X)$: elle s'écrit

$$\det \widehat{D} = \big(\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}(\widehat{A})\big)^{n-q-1}\, \big(\det \widehat{A}\big),$$

où $\widehat{D}$ est construite à partir de $\widehat{A}$ comme D l'est à partir de A. Les deux membres de cette égalité appartiennent à l'anneau de polynômes $\mathbb{K}[X]$ et peuvent donc être évalués en $X = 0$: après évaluation, on obtient l'identité de Sylvester pour A dans $\mathbb{K}$.

2.2 Soient n, q, A et D comme dans l'énoncé. Soit $k \in [\![1, n-q]\!]$, soit $(I, J) \in \mathscr{P}_k(n-q)$. Posons $I' = [\![1, q]\!] \cup \{i + q \mid i \in I\}$ et $J' = [\![1, q]\!] \cup \{j + q \mid j \in J\}$. Appliquons l'identité de Sylvester (question 2.1 (d)) à la matrice extraite de A obtenue en ne conservant que les lignes et les colonnes dont les indices appartiennent à I' et J', respectivement. On trouve

$$\Delta_{I,J}(D) = \big(\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}(A)\big)^{k-1}\, \Delta_{I',J'}(A).$$

Cette relation et la totale positivité de A entraînent que $\Delta_{I,J}(D)$ est positif.

2.3

(a) Raisonnons par l'absurde. Supposons que $a_{1,1} = 0$. Comme A est inversible, sa première colonne et sa première ligne sont toutes deux non nulles : il existe deux indices i, j, différents de 1, tels que les coefficients $a_{i,1}$ et $a_{1,j}$ soient non nuls. Comme A est TP, ces deux coefficients sont ainsi strictement positifs (question 1.2 (a)). Utilisant à nouveau l'égalité $a_{1,1} = 0$, il vient alors $\Delta_{\{1,i\},\{1,j\}}(A) = -a_{i,1}a_{1,j} < 0$, ce qui contredit l'hypothèse que A est TP.

(b) Introduisons la matrice D de la question 2.1 pour $q = 1$. Soit $\widetilde{A}$ la matrice extraite de A obtenue en conservant les lignes et les colonnes d'indice appartenant à $\{1\} \cup [\![p+1, n]\!]$. Comme les mineurs de $\widetilde{A}$ sont des mineurs de A, la totale positivité de A entraîne celle de $\widetilde{A}$.
L'identité de Sylvester conduit à

$$\begin{aligned} \det D &= (a_{1,1})^{n-2} \ (\det A), \\ \Delta_{[\![1,p-1]\!],[\![1,p-1]\!]}(D) &= (a_{1,1})^{p-2} \ \Delta_{[\![1,p]\!],[\![1,p]\!]}(A), \\ \Delta_{[\![p,n-1]\!],[\![p,n-1]\!]}(D) &= (a_{1,1})^{n-p-1} \ \big(\det \widetilde{A}\big). \end{aligned}$$

Appliquant $(*)$ à $\widetilde{A}$ et à D, qui sont toutes deux TP de taille strictement inférieure à n, nous obtenons

$$\begin{aligned} \det \widetilde{A} &\leqslant a_{1,1} \ \Delta_{[\![p+1,n]\!],[\![p+1,n]\!]}(A), \\ \det D &\leqslant \Delta_{[\![1,p-1]\!],[\![1,p-1]\!]}(D) \ \Delta_{[\![p,n-1]\!],[\![p,n-1]\!]}(D). \end{aligned}$$

Combinant ces relations, nous parvenons à

$$(a_{1,1})^{n-2} \ (\det A) \leqslant (a_{1,1})^{n-2} \ \Delta_{[\![1,p]\!],[\![1,p]\!]}(A) \ \Delta_{[\![p+1,n]\!],[\![p+1,n]\!]}(A).$$

L'inégalité désirée s'obtient en simplifiant par $a_{1,1}$, qui est strictement positif.

(c) Introduisons les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et $B = PAP^{-1}$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$ et $(I, J) \in \mathscr{P}_k(n)$, le mineur $\Delta_{I,J}(B)$ de B est égal au mineur $\Delta_{I',J'}(A)$, où I' et J' sont les images de I et J par la permutation $k \mapsto n + 1 - k$ de $[\![1, n]\!]$. Du fait que A est TP suit alors que B l'est aussi. Appliquant à B le cas $p = n - 1$ de la question précédente, nous obtenons alors

$$\det B \leqslant \Delta_{[\![1,n-1]\!],[\![1,n-1]\!]}(B) \ \Delta_{\{n\},\{n\}}(B),$$

qui n'est autre que le cas $p = 1$ de $(*)$.

3.3.3 Position relative de deux drapeaux

3.1 On dresse sans peine le tableau des préimages par σ des intervalles $[\![1, i]\!]$:

i	$\sigma^{-1}([\![1, i]\!])$
1	$\{3\}$
2	$\{1, 3\}$
3	$\{1, 2, 3\}$

La définition conduit alors au tableau suivant pour $(d_{i,j}(\sigma))$:

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	1	1	2
3	0	1	2	3

(Les indices i et j sont indiqués dans la première colonne et la première ligne, respectivement.)

3.2

(a) Par définition, $d_{i,j}(\sigma)$ est le nombre d'éléments $k \in [\![1, j]\!]$ tels que $\sigma(k) \in [\![1, i]\!]$. C'est donc le nombre de colonnes parmi les j premières de P_σ dont le 1 se situe dans les i premières lignes. Autrement dit, c'est le nombre de 1 dans le coin supérieur gauche de P_σ, à l'intersection des j premières colonnes et des i premières lignes. Vu que les coefficients de P_σ valent 0 ou 1, ce fait se traduit par la formule

$$d_{i,j}(\sigma) = \sum_{k=1}^{i} \sum_{\ell=1}^{j} p_{k,\ell}(\sigma).$$

(b) Supposons que $i \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$. De la question (a), on déduit que

$$d_{i,j}(\sigma) - d_{i,j-1}(\sigma) = \sum_{k=1}^{i} \left(\sum_{\ell=1}^{j} p_{k,\ell}(\sigma) - \sum_{\ell=1}^{j-1} p_{k,\ell}(\sigma) \right) = \sum_{k=1}^{i} p_{k,j}(\sigma),$$

$$d_{i-1,j}(\sigma) - d_{i-1,j-1}(\sigma) = \sum_{k=1}^{i-1} \left(\sum_{\ell=1}^{j} p_{k,\ell}(\sigma) - \sum_{\ell=1}^{j-1} p_{k,\ell}(\sigma) \right) = \sum_{k=1}^{i-1} p_{k,j}(\sigma),$$

d'où par soustraction

$$\Big(d_{i,j}(\sigma) - d_{i,j-1}(\sigma)\Big) - \Big(d_{i-1,j}(\sigma) - d_{i-1,j-1}(\sigma)\Big) = p_{i,j}(\sigma),$$

comme désiré.

Supposons maintenant $i = 1$ et $j \geqslant 2$. Dans ce cas, la première égalité ci-dessus reste valable, et la somme dans le membre de droite se réduit au seul terme $p_{i,j}(\sigma)$. Comme ici $d_{i-1,j}(\sigma) = d_{i-1,j-1}(\sigma) = 0$, on a encore

$$\Big(d_{i,j}(\sigma) - d_{i,j-1}(\sigma)\Big) - \Big(d_{i-1,j}(\sigma) - d_{i-1,j-1}(\sigma)\Big) = p_{i,j}(\sigma).$$

Le cas $i \geqslant 2$ et $j = 1$ est symétrique du précédent, et le dernier cas $i = j = 1$ est banal.

(c) Adoptons les notations de l'énoncé. D'après la question (b), la permutation σ cherchée, si elle existe, doit vérifier

$$p_{i,j}(\sigma) = \delta_{i,j} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i-1,j} + \delta_{i-1,j-1}$$

pour chaque $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Par suite, la matrice P_σ, et donc σ elle-même, est complètement déterminée par la donnée du tableau $(\delta_{i,j})$. Ceci prouve l'unicité.

Pour montrer l'existence, étudions la matrice $P = (p_{i,j})$ formée par les coefficients

$$p_{i,j} = \delta_{i,j} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i-1,j} + \delta_{i-1,j-1}.$$

La somme des coefficients dans la j-ième colonne de P est

$$\sum_{k=1}^{n} p_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (\delta_{k,j} - \delta_{k-1,j}) - \sum_{k=1}^{n} (\delta_{k,j-1} - \delta_{k-1,j-1}) = (\delta_{n,j} - \delta_{0,j}) - (\delta_{n,j-1} - \delta_{0,j-1}) = 1.$$

De même, la somme des coefficients dans chaque ligne de P vaut 1. De plus, d'après (iii), la matrice P est à coefficients dans $\{0,1\}$. Chaque ligne et chaque colonne de P contient exactement un 1 : il existe donc $\sigma \in S_n$ telle que $P = P_\sigma$.
On a alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$d_{i,j}(\sigma) = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant i\\ 1\leqslant \ell\leqslant j}} p_{k,\ell}(\sigma) = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant i\\ 1\leqslant \ell\leqslant j}} \delta_{k,\ell} - \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant i\\ 1\leqslant \ell\leqslant j-1}} \delta_{k,\ell} - \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant i-1\\ 1\leqslant \ell\leqslant j}} \delta_{k,\ell} + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant i-1\\ 1\leqslant \ell\leqslant j-1}} \delta_{k,\ell}.$$

Dans le membre de droite, les termes s'éliminent deux à deux, à l'exception de $\delta_{i,j}$. On obtient donc $d_{i,j}(\sigma) = \delta_{i,j}$, ce qui prouve que σ convient.

3.3 Soient $\mathbb{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_n)$ et $\mathbb{G} = (G_0, G_1, \ldots, G_n)$ deux drapeaux. Pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, choisissons des vecteurs $e_i \in F_i \backslash F_{i-1}$ et $f_i \in G_i \backslash G_{i-1}$. Alors pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, le vecteur e_i n'appartient pas au sous-espace vectoriel engendré par $\{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$, puisque ce dernier est inclus dans F_{i-1} ; par suite, $(e_1, \ldots, e_n)$ est une partie libre de E, donc est une base de E (puisque E est de dimension n). Le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_1, \ldots, e_i\}$ est ainsi de dimension i, et comme il est inclus dans F_i, il lui est égal. On montre de même que $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de E telle que pour chaque $i \in [\![0,n]\!]$, le sous-espace G_i soit engendré par $\{f_1, \ldots, f_i\}$. Soit g l'automorphisme de E qui envoie e_i sur f_i pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Alors g envoie $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{G}$.

3.4 Adoptons les notations de l'énoncé.

(a) Les deux sous-espaces $F_i \cap G_{j-1}$ et $F_{i-1} \cap G_j$ sont de dimensions $\delta_{i,j-1}$ et $\delta_{i-1,j}$, respectivement. Leur intersection est $F_{i-1} \cap G_{j-1}$, de dimension $\delta_{i-1,j-1}$. Le théorème A donne alors

$$\dim((F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)) = \delta_{i,j-1} + \delta_{i-1,j} - \delta_{i-1,j-1},$$

d'où

$$\begin{aligned}\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i-1,j} + \delta_{i-1,j-1} &= \dim(F_i \cap G_j) - \dim((F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)) \\ &= \dim\left(\frac{F_i \cap G_j}{(F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)}\right). \qquad (\natural)\end{aligned}$$

(b) Le membre de droite de $(\natural)$ est un entier positif ou nul. Il est au plus égal à 1, car

$$\dim\left(\frac{F_i \cap G_j}{(F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)}\right) \leqslant \dim\left(\frac{F_i \cap G_j}{F_{i-1} \cap G_j}\right) = \dim\left(\frac{(F_i \cap G_j) + F_{i-1}}{F_{i-1}}\right) \leqslant \dim(F_i/F_{i-1}).$$

Par conséquent, le tableau d'entiers $(\delta_{i,j})$ vérifie la condition (iii) de la question 3.2 (c). Comme il vérifie également les conditions (i) et (ii), c'est un tableau $(d_{i,j}(\sigma))$, pour une unique permutation $\sigma \in S_n$.

3.5 On adopte les notations employées dans la question 3.4.

Supposons que (i) soit vraie. On choisit des vecteurs e_1, ..., e_n de la façon suivante. Prenons $i \in [\![1,n]\!]$ et posons $j = \sigma^{-1}(i)$. Comme

$$\dim\left(\frac{F_i \cap G_j}{(F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)}\right) = p_{i,j}(\sigma) = 1,$$

le sous-espace $(F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)$ est de codimension 1 dans $F_{\sigma(j)} \cap G_j$. On peut donc choisir $e_i \in F_i \cap G_j$ n'appartenant pas à ce sous-espace. Alors e_i n'appartient ni à F_{i-1}, ni à G_{j-1}.

Nous sommes alors dans une situation analogue de celle vue dans la réponse à la question 3.3 : on a un drapeau $\mathbb{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_n)$ et des vecteurs $e_i \in F_i \backslash F_{i-1}$; cela implique que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base telle que pour chaque $i \in [\![0, n]\!]$, le sous-espace F_i soit engendré par $\{e_1, \ldots, e_i\}$. De même, on a un drapeau $\mathbb{G} = (G_0, G_1, \ldots, G_n)$ et des vecteurs $e_{\sigma(j)} \in G_j \backslash G_{j-1}$; cela implique que pour chaque $j \in [\![0, n]\!]$, le sous-espace G_j soit engendré par $\{e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(j)}\}$. Ainsi (ii) est vraie.

Réciproquement, supposons (ii). Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Un vecteur x de E appartient à F_i (respectivement, G_j) si et seulement si ses coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ vérifient

$$x_k \neq 0 \;\Rightarrow\; 1 \leqslant k \leqslant i \qquad (\text{respectivement,} \quad x_{\sigma(k)} \neq 0 \;\Rightarrow\; 1 \leqslant k \leqslant j).$$

Autrement dit, $F_i \cap G_j$ est engendré par les vecteurs e_k, avec k tel que $1 \leqslant k \leqslant i$ et $1 \leqslant \sigma^{-1}(k) \leqslant j$. On en déduit que

$$\dim(F_i \cap G_j) = \operatorname{Card}\big([\![1, i]\!] \cap \sigma([\![1, j]\!])\big) = \operatorname{Card}\big(\sigma^{-1}([\![1, i]\!]) \cap [\![1, j]\!]\big) = d_{i,j}(\sigma).$$

Cette relation étant valable pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a bien $(\mathbb{F}, \mathbb{G}) \in \mathscr{O}_\sigma$. Ainsi (i) est vraie.

3.6 L'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur les couples de drapeaux conserve les dimensions des intersections $F_i \cap G_j$, donc ne change pas la permutation σ. Par conséquent, chaque $\mathscr{O}_\sigma$ est stable par l'action de $\mathrm{GL}(E)$, c'est-à-dire est union d'orbites. Il s'agit donc de voir que chaque $\mathscr{O}_\sigma$ est non-vide et que l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathscr{O}_\sigma$ est transitive.

Soit $\sigma \in S_n$. Utilisant l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) dans la question 3.5, on voit facilement que $\mathscr{O}_\sigma$ est non-vide. Maintenant, soient $(\mathbb{F}', \mathbb{G}')$ et $(\mathbb{F}'', \mathbb{G}'')$ dans $\mathscr{O}_\sigma$. Soit $(e'_1, \ldots, e'_n)$ une base adaptée au couple de drapeaux $(\mathbb{F}', \mathbb{G}')$, comme dans l'assertion 3.5 (ii), et soit $(e''_1, \ldots, e''_n)$ une base adaptée au couple de drapeaux $(\mathbb{F}'', \mathbb{G}'')$. Soit g l'automorphisme de E qui envoie e'_k sur e''_k pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Alors g envoie $(\mathbb{F}', \mathbb{G}')$ sur $(\mathbb{F}'', \mathbb{G}'')$. Cela établit la transitivité voulue.

3.7 On adopte les notations de l'énoncé, on prend $\mathbb{F}' \in \mathscr{F}'$, et on écrit $\mathbb{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_n)$, $\mathbb{F}' = \big(F'_0, F'_1, \ldots, F'_n\big)$, et $\mathbb{G} = (G_0, G_1, \ldots, G_n)$.

(a) Soit σ' la permutation telle que $(\mathbb{F}', \mathbb{G}) \in \mathscr{O}_{\sigma'}$. Les drapeaux $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}'$ ne diffèrent que par le sous-espace vectoriel de dimension k, donc pour $i \in [\![1, n]\!] \backslash \{k, k+1\}$, on a

$$p_{i,j}(\sigma) = \dim\left(\frac{F_i \cap G_j}{(F_i \cap G_{j-1}) + (F_{i-1} \cap G_j)}\right) = \dim\left(\frac{F'_i \cap G_j}{(F'_i \cap G_{j-1}) + (F'_{i-1} \cap G_j)}\right) = p_{i,j}(\sigma').$$

Ceci implique que $\sigma'^{-1}(i) = \sigma^{-1}(i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!] \backslash \{k, k+1\}$, d'où $\sigma' \in \{\sigma, \tau_k \circ \sigma\}$.

(b) Par contraposition, il suffit de montrer que si $(\mathbb{F}', \mathbb{G})$ est en position σ, alors $\mathbb{F} = \mathbb{F}'$.
Posons $j = \sigma^{-1}(k)$. Compte tenu de l'hypothèse $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k+1)$, on a alors

$$d_{k+1,j}(\sigma) = d_{k,j}(\sigma) = d_{k-1,j}(\sigma) + 1.$$

Comme $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ est en position σ, les $d_{i,j}(\sigma)$ indiquent les dimensions $\dim(F_i \cap G_j)$. Par conséquent, nous avons $F_{k-1} \cap G_j \subsetneq F_k \cap G_j = F_{k+1} \cap G_j$, et donc $F_{k-1} + (F_{k+1} \cap G_j) \subset F_k$. Dans cette dernière expression, le membre de gauche contient strictement F_{k-1}, car sinon on aurait $F_{k+1} \cap G_j \subset F_{k-1}$, puis $F_{k+1} \cap G_j \subset F_{k-1} \cap G_j$, ce qui est exclu. Comme F_{k-1} est un hyperplan de F_k, on a en fin de compte $F_k = F_{k-1} + (F_{k+1} \cap G_j)$.
Si $(\mathbb{F}', \mathbb{G})$ est aussi en position σ, alors le même raisonnement amène à la conclusion que $F'_k = F'_{k-1} + (F'_{k+1} \cap G_j)$. Tenant compte des égalités $F_{k-1} = F'_{k-1}$ et $F_{k+1} = F'_{k+1}$, nous concluons que $F_k = F'_k$. Par suite, $\mathbb{F} = \mathbb{F}'$, ce qu'il fallait démontrer.

3.3.4 Écritures réduites des permutations

4.1 Considérons la permutation $\sigma_0 \in S_n$ définie par $\sigma_0(i) = n + 1 - i$, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$. Manifestement, chaque élément (i, j) de Γ est une inversion de σ_0. Autrement dit, $I(\sigma_0) = \Gamma$, et donc $N(\sigma_0) = \text{Card } \Gamma$. C'est évidemment le maximum possible.

Inversement, si $\sigma \in S_n$ est telle que $N(\sigma) = \text{Card } \Gamma$, alors chaque élément (i, j) de Γ est une inversion de σ. Cela signifie que $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ est une application décroissante, et cela impose $\sigma = \sigma_0$.

4.2

(a) Fixons-nous $(k, \sigma) \in [\![1, n-1]\!] \times S_n$. Pour chaque couple $(i, j) \in \Delta$ autre que celui formé des éléments $\sigma^{-1}(k)$ et $\sigma^{-1}(k+1)$, au moins un des deux éléments $\sigma(i)$, $\sigma(j)$ est fixé par τ_k, tandis que l'autre au pire augmente ou diminue de 1 quand on lui applique τ_k ; ainsi

$$\sigma(i) > \sigma(j) \;\Rightarrow\; \tau_k \circ \sigma(i) \geqslant \tau_k \circ \sigma(j) \qquad \text{et} \qquad \tau_k \circ \sigma(i) > \tau_k \circ \sigma(j) \;\Rightarrow\; \sigma(i) \geqslant \sigma(j),$$

et comme $\tau_k \circ \sigma(i) \neq \tau_k \circ \sigma(j)$ et $\sigma(i) \neq \sigma(j)$, on a en fait

$$\sigma(i) > \sigma(j) \iff \tau_k \circ \sigma(i) > \tau_k \circ \sigma(j).$$

Autrement dit, un tel couple (i, j) appartient à $I(\sigma)$ si et seulement s'il appartient à $I(\tau_k \circ \sigma)$. Par conséquent, $I(\sigma)$ et $I(\tau_k \circ \sigma)$ ne diffèrent que du couple formé par $\sigma^{-1}(k)$ et $\sigma^{-1}(k+1)$. Plus précisément,

$$\begin{aligned} I(\tau_k \circ \sigma) &= I(\sigma) \cup \left\{(\sigma^{-1}(k), \sigma^{-1}(k+1))\right\} && \text{si } \sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k+1), \\ I(\sigma) &= I(\tau_k \circ \sigma) \cup \left\{(\sigma^{-1}(k+1), \sigma^{-1}(k))\right\} && \text{si } \sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(k+1), \end{aligned}$$

et ces unions sont disjointes. On voit ainsi que $N(\tau_k \circ \sigma) = N(\sigma) + 1$ si et seulement si $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k+1)$.

(b) Dans le cadre de (a), l'élément (i, j) dont $I(\tau_k \circ \sigma)$ et $I(\sigma)$ diffèrent est formée des deux éléments de la paire $\left\{\sigma^{-1}(k), \sigma^{-1}(k+1)\right\}$. La permutation $\sigma^{-1} \circ \tau_k \circ \sigma$ est la transposition qui échange ces deux éléments.

4.3 L'énoncé (a) est conséquence immédiate de la première affirmation de l'énoncé (b). Montrons celle-ci en établissant par récurrence sur m la proposition (H_m) suivante : « Toute permutation $\sigma \in S_n$ telle que $N(\sigma) = m$ possède une écriture de longueur m. » La proposition (H_0) est banalement vraie, puisque la seule permutation $\sigma \in S_n$ vérifiant $N(\sigma) = 0$ est l'identité. Soit $m \geqslant 1$ et supposons (H_{m-1}) vraie. Soit $\sigma \in S_n$ telle que $N(\sigma) = m$. Alors $\sigma \neq \text{id}$, donc σ^{-1} n'est pas croissante, d'où l'existence de $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(k+1)$. D'après la question 4.2 (a), on a donc $N(\tau_k \circ \sigma) = N(\sigma) - 1$. Appliquant (H_{m-1}), on trouve une écriture $(t_1, \ldots, t_{m-1})$ de longueur $m - 1$ de $\tau_k \circ \sigma$. Alors $(\tau_k, t_1, \ldots, t_{m-1})$ est une écriture de longueur m de σ. Ceci montre (H_m).

Toujours en utilisant la question 4.2 (a), on montre par récurrence sur ℓ que pour tout mot $(t_1, \ldots, t_\ell)$, on a $N(t_1 \circ \cdots \circ t_\ell) \leqslant \ell$. Par suite, toute écriture d'une permutation $\sigma \in S_n$ est de longueur supérieure ou égale à $N(\sigma)$.

4.4 La première ligne du tableau ci-dessous est la liste des élements de S_3, représentés par leurs décompositions en produit de cycles à support disjoints. La deuxième ligne donne les images de 1, 2 et 3 par la permutation. La troisième ligne indique le nombre d'inversions de la permutation. La quatrième propose une écriture réduite de la permutation.

σ	id	$(1\ 2)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3)$
$(\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3))$	$(1,2,3)$	$(2,1,3)$	$(1,3,2)$	$(2,3,1)$	$(3,1,2)$	$(3,2,1)$
$N(\sigma)$	0	1	1	2	2	3
écriture	$()$	(τ_1)	(τ_2)	(τ_1,τ_2)	(τ_2,τ_1)	(τ_1,τ_2,τ_1)

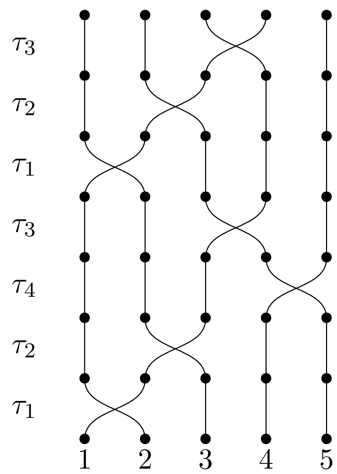
Note : le sixième élément possède une autre écriture réduite, à savoir (τ_2,τ_1,τ_2).

4.5 Adoptons les notations de l'énoncé. Pour $m \in [\![1,\ell]\!]$, posons $\pi_m = t_m \circ \cdots \circ t_\ell$; convenons en outre que $\pi_{\ell+1}$ est la permutation identité. Quand m décroît de $\ell+1$ à 1, l'ensemble $I(\pi_m)$ varie de $\varnothing$ à $I(\sigma)$, en gagnant ou en perdant un élément à chaque étape d'après la question 4.2 (a). Par hypothèse, on a $N(\sigma) < \ell$, donc $I(\sigma)$ contient strictement moins d'éléments que le nombre d'étapes : il y a donc au moins une étape où il y a eu perte d'un élément. On peut donc trouver $p \in [\![1,\ell]\!]$ et $(i,j) \in \Delta$ tels que $I(\pi_p) = I(\pi_{p+1})\backslash\{(i,j)\}$. De plus, (i,j) appartient à $I(\pi_{p+1})$: il apparaît donc à une certaine étape dans le cheminement qui amène de $I(\pi_{\ell+1}) = \varnothing$ à $I(\pi_{p+1})$. Il existe donc $q \in [\![p+1,\ell]\!]$ tel que $I(\pi_q) = I(\pi_{q+1}) \cup \{(i,j)\}$.

D'après la question 4.2 (b), les permutations $(\pi_{p+1})^{-1} \circ t_p \circ \pi_{p+1}$ et $(\pi_{q+1})^{-1} \circ t_q \circ \pi_{q+1}$ sont toutes deux égales à la transposition qui échange i et j. Ceci nous donne $t_p \circ \pi_{p+1} \circ (\pi_{q+1})^{-1} = \pi_{p+1} \circ (\pi_{q+1})^{-1} \circ t_q$. Comme le produit de composition $\pi_{p+1} \circ (\pi_{q+1})^{-1}$ se simplifie en $t_{p+1} \circ \cdots \circ t_q$, cette égalité se réécrit $t_p \circ \cdots \circ t_q = t_{p+1} \circ \cdots \circ t_{q-1}$. En multipliant à gauche par $t_1 \circ \cdots \circ t_{p-1}$ et à droite par $t_{q+1} \circ \cdots \circ t_\ell$, on trouve l'égalité désirée

$$\sigma = t_1 \circ \ldots \circ t_{p-1} \circ t_{p+1} \circ \ldots \circ t_{q-1} \circ t_{q+1} \circ \ldots \circ t_\ell.$$

Note : ce raisonnement est plus facile à comprendre à l'aide d'une représentation graphique. Plus précisément, associons un diagramme $D(m)$ à chaque mot m, comme illustré par l'exemple suivant pour $n = 5$ et $m = (\tau_3,\tau_2,\tau_1,\tau_3,\tau_4,\tau_2,\tau_1)$:



Dans cette représentation, la longueur ℓ du mot est égale au nombre total de croisements.

Du point numéroté i en bas du diagramme part une ligne que nous appelons L_i. La valeur $\sigma(i)$ se lit comme l'abscisse de l'extrémité supérieure de L_i, et les lignes L_i et L_j se coupent un nombre impair de fois si et seulement si $\sigma(i) > \sigma(j)$.

On voit alors que $N(\sigma)$ est le nombre de paires de lignes $\{L_i, L_j\}$ qui se coupent un nombre impair de fois. Ce nombre est bien évidemment inférieur ou égal au nombre total de croisements : la longueur d'une écriture de σ est toujours supérieure ou égale à $N(\sigma)$. S'il y a inégalité stricte, c'est que $D(m)$

comporte une paire de lignes qui se croisent au moins deux fois, disons une première fois à l'étage p et une autre fois à l'étage q. On ne change pas la permutation en supprimant ces deux croisements, opération qui revient à supprimer les deux lettres t_p et t_q du mot m.

4.6

(a) On adopte les notations de l'énoncé et de l'indication. L'écriture $(\tau_j, t_1, \ldots, t_\ell)$ de $\tau_j \circ \sigma$ n'est pas réduite, car le mot m' amputé de sa première lettre est une écriture strictement plus courte de cette permutation. D'après la question 4.3, on peut obtenir une autre écriture de $\tau_j \circ \sigma$ en supprimant deux lettres dans le mot $(\tau_j, t_1, \ldots, t_\ell)$. Cette opération ne peut pas concerner deux lettres du mot $(t_1, \ldots, t_\ell)$, car sinon on obtiendrait une écriture de longueur $\ell - 2$ de σ, en contradiction avec l'hypothèse que $(t_1, \ldots, t_\ell)$ est une écriture réduite. La première lettre τ_j est donc une des deux lettres supprimées, et l'autre est la lettre t_p, pour un certain $p \in [\![1, \ell]\!]$. On obtient ainsi $\tau_j \circ t_1 \circ \cdots \circ t_\ell = t_1 \circ \cdots \circ t_{p-1} \circ t_{p+1} \circ \cdots \circ t_\ell$, c'est-à-dire $t_1 \circ \cdots \circ t_\ell = \tau_j \circ t_1 \circ \cdots \circ t_{p-1} \circ t_{p+1} \circ \cdots \circ t_\ell$. Comme $t_1 = \tau_i \neq \tau_j$, on ne peut pas avoir $p = 1$, d'où $p \geqslant 2$. Le mot $m'' = (\tau_j, t_1, \ldots, t_{p-1}, t_{p+1}, \ldots, t_\ell)$ est donc une écriture réduite de σ qui commence par (τ_j, τ_i).

(b) Reprenons là où nous nous étions arrêtés dans la question (a). Rebaptisons les lettres de m'' en écrivant $m'' = (t''_1, \ldots, t''_\ell)$, avec donc $t''_1 = \tau_j$ et $t''_2 = \tau_i$. Appliquons à m'' et τ_i la procédure utilisée plus haut pour m et τ_j : il existe $q \in [\![2, \ell]\!]$ tel que $t''_1 \circ \cdots \circ t''_\ell = \tau_i \circ t''_1 \circ \cdots \circ t''_{q-1} \circ t''_{q+1} \circ \cdots \circ t''_\ell$. Comme $|i - j| = 1$, on a $\tau_j \circ \tau_i \neq \tau_i \circ \tau_j$, c'est-à-dire $t''_1 \circ t''_2 \neq \tau_i \circ t''_1$; ainsi $q = 2$ est impossible, d'où $q \geqslant 3$. Le mot $m''' = (\tau_i, t''_1, t''_2, \ldots, t''_{q-1}, t''_{q+1}, \ldots, t''_\ell)$ est donc une écriture réduite de σ qui commence par (τ_i, τ_j, τ_i).

4.7

(a) Pour $(i, j) \in [\![1, n-1]\!]^2$, on vérifie sans peine que si $|i - j| \geqslant 2$, alors $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$, et que si $|i - j| = 1$, alors $\tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j$. Par conséquent, si deux mots $m = (t_1, \ldots, t_\ell)$ et $m' = (t'_1, \ldots, t'_\ell)$ vérifient $m \approx m'$, alors $t_1 \circ \cdots \circ t_\ell = t'_1 \circ \cdots \circ t'_\ell$. Le résultat donné dans l'énoncé s'ensuit par transitivité.

(b) Considérons deux écritures réduites $m = (t_1, \ldots, t_\ell)$ et $m' = (t'_1, \ldots, t'_\ell)$ d'une permutation σ. Notre but est de démontrer que $m \sim m'$.

Dans le cas où $t_1 = t'_1$, les mots $m_1 = (t_2, \ldots, t_\ell)$ et $m'_1 = (t'_2, \ldots, t'_\ell)$ sont des écritures réduites de $t_1 \circ \sigma$. Raisonnant par récurrence sur $N(\sigma)$, nous pouvons supposer que $m_1 \sim m'_1$ est connu. De là découle $m \sim m'$.

Nous nous focalisons désormais sur le cas $t_1 \neq t'_1$. Ecrivons $t_1 = \tau_i$ et $t'_1 = \tau_j$.

Regardons d'abord le cas $|i - j| \geqslant 2$. D'après la question 4.4 (a), il existe une écriture réduite m'' de σ de la forme $m'' = (\tau_j, \tau_i, t''_3, \ldots, t''_\ell)$. Soit $m^{(4)} = (\tau_i, \tau_j, t''_3, \ldots, t''_\ell)$; c'est encore une écriture réduite de σ. Comme m et $m^{(4)}$ commencent par la même lettre, nous avons $m \sim m^{(4)}$, d'après le cas traité au début du raisonnement. De même, m'' et m' commencent par la même lettre, d'où $m'' \sim m'$. Par construction enfin, $m'' \approx m^{(4)}$. Par composition, on a bien $m \sim m'$, comme désiré.

Regardons maintenant le cas $|i - j| = 1$. D'après la question 4.4 (b), il existe une écriture réduite m''' de σ de la forme $m''' = (\tau_i, \tau_j, \tau_i, t'''_4, \ldots, t'''_\ell)$. Soit $m^{(5)} = (\tau_j, \tau_i, \tau_j, t'''_4, \ldots, t'''_\ell)$; c'est encore une écriture réduite de σ. Comme m et m''' commencent par la même lettre, nous avons $m \sim m'''$. Comme $m^{(5)}$ et m' commencent par la même lettre, nous avons $m^{(5)} \sim m'$. Par construction enfin, $m''' \approx m^{(5)}$. Par composition, on a bien $m \sim m'$, comme désiré.

3.3.5 Décomposition de Bruhat

5.1 Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. L'ensemble des valeurs propres des matrices principales extraites de A (les « coins supérieurs gauches » de A) est fini. Il existe donc une suite (λ_q) de réels qui tend vers 0 en évitant cet ensemble. Notons $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de taille $n \times n$. D'après le théorème D, chaque matrice $A - \lambda_q \mathbb{I}_n$ possède une factorisation $L_q D_q U_q$, où D_q est une matrice diagonale inversible et où L_q et U_q sont des matrices unitriangulaires inférieure et supérieure.

Posons $P_0 = P_{\sigma_0}$ pour simplifier la notation. On a alors $P_0(A - \lambda_q \mathbb{I}_n) = (P_0 L_q P_0^{-1}) P_0 (D_q U_q)$, avec $P_0 L_q P_0^{-1}$ et $D_q U_q$ triangulaires supérieures inversibles. Autrement dit $P_0(A - \lambda_q \mathbb{I}_n)$ est de la forme $b' P_0 b''$ avec $(b', b'') \in B^2$, donc appartient à $C(\sigma_0)$. Faisant tendre q vers l'infini, on voit que $P_0 A$ appartient à l'adhérence de $C(\sigma_0)$.

La multiplication à gauche par P_0 étant une bijection de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même, on en déduit que toute matrice appartient à l'adhérence de $C(\sigma_0)$, ce qu'il fallait démontrer.

5.2 Soit $a \in \mathbb{K}^*$. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a^{-1} \end{pmatrix}.$$

On peut insérer ce calcul au sein de matrices de taille $n \times n$, en le plaçant au milieu de matrices diagonales par blocs de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{I}_{k-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbb{I}_{n-k-1} \end{array}\right),$$

où $\mathbb{I}_{k-1}$ et $\mathbb{I}_{n-k-1}$ sont des matrices identité de taille indiquée par l'indice. Après cette insertion, on obtient une expression de $y_k(a)$ sous la forme $b' P_{\tau_k} b''$.

5.3

(a) Si $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ fixe $\mathbb{F}$, alors pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, le vecteur $g(e_k)$ doit appartenir à F_k, ce qui implique que g est triangulaire supérieure. Réciproquement, si g est inversible triangulaire supérieure, alors $g(F_k) \subset F_k$ pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, et on a même $g(F_k) = F_k$ puisque g conserve la dimension ; ainsi g fixe $\mathbb{F}$. Ceci montre que B est le stabilisateur de $\mathbb{F}$.

(b) Le résultat demandé est un cas particulier de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) de la question 3.5.

(c) Soit $\sigma \in S_n$. D'après (b) et la question 3.6, $\mathscr{O}_\sigma$ est l'orbite de $(\mathbb{F}, P_\sigma \cdot \mathbb{F})$ sous $\mathrm{GL}(E)$.
Si $g \in C(\sigma)$, alors $g = b' P_\sigma b''$ avec $(b', b'') \in B^2$, et donc $(\mathbb{F}, g \cdot \mathbb{F}) = (b' \cdot \mathbb{F}, b' P_\sigma \cdot \mathbb{F}) = b'(\mathbb{F}, P_\sigma \cdot \mathbb{F})$ appartient à $\mathscr{O}_\sigma$. (On a ici utilisé que b' et b'' stabilisent $\mathbb{F}$.)
Réciproquement, supposons que $(\mathbb{F}, g \cdot \mathbb{F})$ appartienne à $\mathscr{O}_\sigma$. Alors il existe $b \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $(\mathbb{F}, g \cdot \mathbb{F}) = b(\mathbb{F}, P_\sigma \cdot \mathbb{F}) = (b \cdot \mathbb{F}, b P_\sigma \cdot \mathbb{F})$. Ceci implique que b et $g^{-1} b P_\sigma$ appartiennent à B, le stabilisateur de $\mathbb{F}$. On en déduit que $g \in C(\sigma)$.

(d) La somme disjointe $\mathrm{GL}(E) = \displaystyle\bigcup_{\sigma \in S_n} C(\sigma)$ s'obtient en prenant la préimage de la décomposition en orbites $\mathscr{F}^2 = \displaystyle\bigcup_{\sigma \in S_n} \mathscr{O}_\sigma$ par l'application $g \mapsto (\mathbb{F}, g \cdot \mathbb{F})$ de $\mathrm{GL}(E)$ dans $\mathscr{F}^2$.

5.4

(a) L'hypothèse $N(\tau_k \circ \sigma) > N(\sigma)$ se traduit par $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k+1)$, ce qui permet d'appliquer les résultats de la question 3.7 (b).
Adoptons les notations de l'énoncé. Soit $g \in C(\sigma)$. Alors $(\mathbb{F}, g \cdot \mathbb{F}) \in \mathscr{O}_\sigma$ (question 5.3 (c)), d'où $(P_{\tau_k} \cdot \mathbb{F}, g \cdot \mathbb{F}) \in \mathscr{O}_{\tau_k \circ \sigma}$ (question 3.7 (b)). Faisant agir P_{τ_k} sur $\mathscr{F}^2$, on en déduit que $(\mathbb{F}, P_{\tau_k} g \cdot \mathbb{F}) \in \mathscr{O}_{\tau_k \circ \sigma}$ (question 3.6). Ceci signifie que $P_{\tau_k} g \in C(\tau_k \circ \sigma)$ (question 5.3 (c)).

(b) Soit $(g_1, g_2) \in C(\tau_k) \times C(\sigma)$. On peut écrire $g_1 = b' P_{\tau_k} b''$, avec $(b', b'') \in B^2$. Comme $C(\sigma)$ et $C(\tau_k \circ \sigma)$ sont stables par multiplication à gauche par les éléments de B, on a successivement $b'' g_2 \in C(\sigma)$, puis $P_{\tau_k} b'' g_2 \in C(\tau_k \circ \sigma)$ (question (a)), et enfin $b' P_{\tau_k} b'' g_2 \in C(\tau_k \circ \sigma)$. Ainsi $g_1 g_2 \in C(\tau_k \circ \sigma)$, ce qui montre l'inclusion $C(\tau_k) C(\sigma) \subset C(\tau_k \circ \sigma)$.

Plusieurs possibilités s'offrent pour prouver l'inclusion réciproque ; l'approche que nous suivons n'est pas la plus directe. Considérons l'action de $B \times B$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ définie par la règle $(b', b'') \cdot g = b' g b''^{-1}$, où $(b', b'') \in B^2$ et $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Les ensembles $C(\rho)$, pour $\rho \in S_n$, sont des orbites pour cette action. (La question 5.3 (d) montre d'ailleurs que l'on obtient ainsi toutes les orbites.) L'ensemble $C(\tau_k)C(\sigma)$ est manifestement stable par cette action, donc est une union d'orbites. Comme il est non-vide et inclus dans l'orbite $C(\tau_k \circ \sigma)$, c'est qu'il lui est égal.

5.5

(a) Il s'agit de montrer que la relation binaire $\leqslant$ est réflexive, transitive et antisymétrique. Les deux premières propriétés découlent directement des définitions, la troisième provient du fait que la donnée des nombres $d_{i,j}(\sigma)$ détermine complètement σ (voir la question 3.2 (a)).

(b) Soit $\sigma \in S_n$. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a

$$d_{i,j}(\sigma) = \mathrm{Card}\big([\![1, j]\!] \cap \sigma^{-1}([\![1, i]\!])\big) \leqslant \min(i, j) = d_{i,j}(\mathrm{id}),$$

ce qui montre l'inégalité $\sigma \geqslant \mathrm{id}$.

(c) Soit σ_0 la permutation définie dans la question 5.1 et soit $\rho \in S_n$. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a

$$d_{i,j}(\rho) = i + j - \mathrm{Card}\big([\![1, j]\!] \cup \rho^{-1}([\![1, i]\!])\big)$$

et

$$d_{i,j}(\sigma_0) = \mathrm{Card}\big([\![1, j]\!] \cap [\![n + 1 - i, n]\!]\big) = \max(0, i + j - n),$$

d'où $d_{i,j}(\rho) \geqslant d_{i,j}(\sigma_0)$. Ceci montre l'inégalité $\rho \leqslant \sigma_0$. Celle-ci étant valable pour chaque $\rho \in S_n$, la permutation σ_0 est le plus grand élément de S_n.

5.6 On adopte les notations de l'énoncé. Avant de commencer les preuves des deux propriétés, il est utile d'observer que si $i \neq k$, alors $(\tau_k \circ \rho)^{-1}([\![1, i]\!]) = \rho^{-1}([\![1, i]\!])$, d'où $d_{i,j}(\rho) = d_{i,j}(\tau_k \circ \rho)$. De même, si $i \neq k$, alors $d_{i,j}(\sigma) = d_{i,j}(\tau_k \circ \sigma)$.

(a) Nous voulons établir que $d_{i,j}(\tau_k \circ \rho) \geqslant d_{i,j}(\tau_k \circ \sigma)$ pour chaque $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Si $i \neq k$, cela provient de l'hypothèse $\rho \leqslant \sigma$ et des égalités données dans notre observation liminaire. Focalisons-nous donc sur le cas $i = k$ et distinguons deux sous-cas :

– Si $j \geqslant (\tau_k \circ \rho)^{-1}(k)$, alors

$$[\![1, j]\!] \cap (\tau_k \circ \rho)^{-1}([\![1, k]\!]) = \big([\![1, j]\!] \cap (\tau_k \circ \rho)^{-1}([\![1, k - 1]\!])\big) \cup \big\{(\tau_k \circ \rho)^{-1}(k)\big\},$$

d'où $d_{k,j}(\tau_k \circ \rho) = d_{k-1,j}(\tau_k \circ \rho) + 1$. L'inclusion

$$[\![1, j]\!] \cap (\tau_k \circ \sigma)^{-1}([\![1, k]\!]) \subset \big([\![1, j]\!] \cap (\tau_k \circ \sigma)^{-1}([\![1, k - 1]\!])\big) \cup \big\{(\tau_k \circ \sigma)^{-1}(k)\big\}$$

conduit pour sa part à $d_{k,j}(\tau_k \circ \sigma) \leqslant d_{k-1,j}(\tau_k \circ \sigma) + 1$. On obtient ainsi

$$d_{k,j}(\tau_k \circ \rho) = d_{k-1,j}(\tau_k \circ \rho) + 1 \geqslant d_{k-1,j}(\tau_k \circ \sigma) + 1 \geqslant d_{k,j}(\tau_k \circ \sigma).$$

– Si $j < (\tau_k \circ \rho)^{-1}(k + 1)$, alors

$$[\![1, j]\!] \cap (\tau_k \circ \rho)^{-1}([\![1, k]\!]) = [\![1, j]\!] \cap (\tau_k \circ \rho)^{-1}([\![1, k + 1]\!]),$$

d'où $d_{k,j}(\tau_k \circ \rho) = d_{k+1,j}(\tau_k \circ \rho)$. L'inclusion

$$[\![1, j]\!] \cap (\tau_k \circ \sigma)^{-1}([\![1, k]\!]) \subset [\![1, j]\!] \cap (\tau_k \circ \sigma)^{-1}([\![1, k + 1]\!])$$

conduit à $d_{k,j}(\tau_k \circ \sigma) \leqslant d_{k+1,j}(\tau_k \circ \sigma)$, et donc en fin de compte

$$d_{k,j}(\tau_k \circ \rho) = d_{k+1,j}(\tau_k \circ \rho) \geqslant d_{k+1,j}(\tau_k \circ \sigma) \geqslant d_{k,j}(\tau_k \circ \sigma).$$

Les deux sous-cas épuisent toutes les possibilités, puisque $(\tau_k \circ \rho)^{-1}(k) < (\tau_k \circ \rho)^{-1}(k+1)$ (voir la question 4.2 (a)). L'inégalité désirée $d_{k,j}(\tau_k \circ \rho) \geqslant d_{k,j}(\tau_k \circ \sigma)$ est donc toujours satisfaite.

(b) Le raisonnement est semblable à celui utilisé dans la question (a). Nous voulons établir que $d_{i,j}(\rho) \geqslant d_{i,j}(\tau_k \circ \sigma)$ pour chaque $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Si $i \neq k$, cela provient de l'hypothèse $\rho \leqslant \sigma$ et de la seconde égalité donnée dans notre observation liminaire. Focalisons-nous donc sur le cas $i = k$ et distinguons deux sous-cas :
– Si $j \geqslant \rho^{-1}(k)$, alors

$$d_{k,j}(\rho) = d_{k-1,j}(\rho) + 1 \geqslant d_{k-1,j}(\tau_k \circ \sigma) + 1 \geqslant d_{k,j}(\tau_k \circ \sigma).$$

– Si $j < \rho^{-1}(k+1)$, alors

$$d_{k,j}(\rho) = d_{k+1,j}(\rho) \geqslant d_{k+1,j}(\tau_k \circ \sigma) \geqslant d_{k,j}(\tau_k \circ \sigma).$$

Les deux sous-cas épuisent toutes les possibilités, puisque $\rho^{-1}(k) < \rho^{-1}(k+1)$.

5.7 Adoptons les notations de l'énoncé. Dans $\widehat{E}$, choisissons des supplémentaires F' et G' de F et G, respectivement. Choisissons des bases de $\widehat{E}$ adaptées à ces décompositions. Un élément $g \in \mathrm{GL}(\widehat{E})$ est alors représenté par une matrice par blocs

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right),$$

où A est la matrice d'une application linéaire de G dans F et C est la matrice d'une application linéaire de G dans F'. Le théorème du rang dit alors que le rang de C est

$$\mathrm{rg}(C) = \dim G - \dim\big(G \cap g^{-1}(F)\big) = \dim G - \dim\big(F \cap g(G)\big).$$

La condition $\dim\big(F \cap g(G)\big) \geqslant d$ est donc équivalente à la demande que $\mathrm{rg}(C) \leqslant \dim G - d$. Cette inégalité se traduit par l'annulation simultanée d'un ensemble de mineurs de C, ce qui définit bien un fermé.

5.8 On montre (i) $\Rightarrow$ (ii) en raisonnant par récurrence sur $N(\sigma)$. La question 5.5 (b) permet d'initialisation la récurrence. Ceci fait, considérons deux permutations ρ et σ telles que $\sigma \neq \mathrm{id}$ et $\rho \leqslant \sigma$, et prenons une écriture réduite $(t_1, \ldots, t_\ell)$ de σ. Appelons $k \in [\![1, n-1]\!]$ l'indice tel que $t_1 = \tau_k$. De deux choses l'une :
– Soit $N(\tau_k \circ \rho) < N(\rho)$. Dans ce cas, on a $\tau_k \circ \rho \leqslant \tau_k \circ \sigma$ (question 5.6). Comme $N(\tau_k \circ \sigma) < N(\sigma)$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : (ii) est vraie pour $\tau_k \circ \rho$ et $\tau_k \circ \sigma$. De l'écriture réduite $(t_2, \ldots, t_\ell)$ de $\tau_k \circ \sigma$, on peut donc extraire une écriture réduite de $\tau_k \circ \rho$. En y ajoutant la première lettre $t_1 = \tau_k$, on obtient une écriture réduite de ρ.
– Soit $N(\tau_k \circ \rho) > N(\rho)$. Dans ce cas, on a $\rho \leqslant \tau_k \circ \sigma$ (question 5.6), et en raisonnant comme dans le premier cas, on extrait de $(t_2, \ldots, t_\ell)$ une écriture réduite de ρ.

Dans les deux cas, on a su extraire de $(t_1, \ldots, t_\ell)$ une écriture réduite de ρ ; autrement dit, on a montré (ii).

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est banale.

Montrons l'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv). Soient deux permutations ρ et σ, et soit $(t_1, \ldots, t_\ell)$ une écriture réduite de σ et $(i_1, \ldots, i_k)$ une suite strictement croissante d'éléments de $[\![1, \ell]\!]$ tels que $(t_{i_1}, \ldots, t_{i_k})$ soit une écriture réduite de ρ. D'après l'égalité (†), on a alors $C(\sigma) = C(t_1) \cdots C(t_\ell)$, et par continuité du produit, il vient $\overline{C(\sigma)} \supset \overline{C(t_1)} \cdots \overline{C(t_\ell)}$. Par ailleurs, on déduit de la question 5.2 que la matrice identité appartient à $\overline{C(t)}$ pour n'importe quelle lettre $t \in T$. Par conséquent, $\overline{C(\sigma)} \supset C(t_{i_1}) \cdots C(t_{i_\ell}) = C(\rho)$, ce qu'il fallait démontrer.

Il reste à montrer l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i). Soit $\mathbb{F} = (F_0, \ldots, F_n)$ le drapeau standard de $\mathbb{R}^n$. D'après les questions 3.4 et 5.3 (c), un élément $g \in \mathrm{GL}(E)$ appartient à une double classe $C(\sigma)$ si et seulement si

$$d_{i,j}(\sigma) = \dim\big(F_i \cap g(F_j)\big)$$

pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$. Soient maintenant deux permutations ρ et σ telles que $C(\rho) \subset \overline{C(\sigma)}$. L'ensemble

$$\big\{g \in \mathrm{GL}(E) \bigm| \forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ \dim\big(F_i \cap g(F_j)\big) \geqslant d_{i,j}(\sigma)\big\}$$

contient $C(\sigma)$ d'après ce qui précède et est fermé d'après la question 5.7, donc contient $C(\rho)$. Prenons donc $g \in C(\rho)$. Alors pour chaque $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, on a

$$d_{i,j}(\rho) = \dim\big(F_i \cap g(F_j)\big) \geqslant d_{i,j}(\sigma),$$

d'où $\rho \leqslant \sigma$, comme désiré.

5.9 Dans la réponse à la question 5.4 (b), nous avons observé que les ensembles $C(\rho)$ étaient les orbites pour l'action de $B \times B$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Soit $\sigma \in S_n$. Alors $C(\sigma)$ est stable par cette action de $B \times B$. Comme cette action est continue, l'adhérence $\overline{C(\sigma)}$ est également stable par l'action de $B \times B$, donc est une union d'orbites $C(\rho)$. La question 5.8 précise quelles sont les permutations ρ concernées : $C(\rho)$ est inclus dans $\overline{C(\sigma)}$ si et seulement si $\rho \leqslant \sigma$.

3.3.6 Matrices unitriangulaires totalement positives

6.1

(a) Considérons l'application

$$\psi : \Big(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (a,b) \mapsto ab\Big).$$

Elle est de classe C^∞, donc son graphe est une sous-variété de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. L'ensemble

$$\big\{(a,b,ab) \bigm| (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2\big\}$$

est un ouvert de cette sous-variété ; c'est donc une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
Grâce au difféomorphisme

$$(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ z & y & 1 \end{pmatrix},$$

on peut identifier $\mathbb{R}^3$ avec le sous-espace affine de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices unitriangulaires inférieures. Dans cette identification, l'image de $Y(m)$ est précisément notre sous-variété.

(b) Les mineurs de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ z & y & 1 \end{pmatrix}$$

sont 0, 1, x, y, z, $xy - z$. Si l'on identifie l'ensemble des matrices unitriangulaires inférieures de taille 3×3 avec $\mathbb{R}^3$, ainsi que l'avons fait dans la question (a), alors l'ensemble des matrices TP correspond au cône défini par les équations

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant xy. \tag{‡}$$

Dans cette identification, les images des différentes applications $Y(m)$ sont données dans le tableau suivant.

m	image de $Y(m)$
$()$	$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$
(τ_1)	$x > 0, \quad y = 0, \quad z = 0$
(τ_2)	$x = 0, \quad y > 0, \quad z = 0$
(τ_1, τ_2)	$x > 0, \quad y > 0, \quad z = 0$
(τ_2, τ_1)	$x > 0, \quad y > 0, \quad z = xy$
(τ_1, τ_2, τ_1)	$x > 0, \quad y > 0, \quad 0 < z < xy$

On vérifie alors sans peine que les images des $Y(m)$ sont deux à deux disjointes et que leur union est l'ensemble des triplets vérifiant (‡).

6.2

(a) Cela résulte d'un calcul banal avec des matrices diagonales par blocs.

(b) Les matrices sont diagonales par blocs, le bloc central étant de taille 3×3 et formé des lignes d'indice appartenant à $\{i, j, i+1, j+1\}$, et les deux blocs extérieurs étant des matrices identité. Il suffit donc de se focaliser sur le bloc central, c'est-à-dire de faire le calcul pour $n = 3$ et $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Le calcul est élémentaire et conduit à

$$(a', b', c') = \left(\frac{bc}{a+c},\ a+c,\ \frac{ab}{a+c}\right),$$

que ce soit pour $(i, j) = (1, 2)$ ou $(i, j) = (2, 1)$. Il est dès lors naturel de s'attendre à ce que l'application $(a, b, c) \mapsto (a', b', c')$ de $(\mathbb{R}_+^*)^3$ dans lui-même soit involutive, donc bijective. De fait, cela se vérifie par un calcul direct.

6.3

(a) Soient σ, k, a et g comme dans l'énoncé, et soit $m = (t_1, \ldots, t_\ell)$ une écriture réduite de σ.

Supposons d'abord que $N(\tau_k \circ \sigma) > N(\sigma)$. Alors le mot $m' = (\tau_k, t_1, \ldots, t_\ell)$ est une écriture réduite de $\tau_k \circ \sigma$, et comme g appartient à l'image de $Y(m)$, le produit $y_k(a)g$ appartient à l'image de $Y(m')$, c'est-à-dire à $W(\tau_k \circ \sigma)$.

Dans le cas contraire, $m' = (\tau_k, t_1, \ldots, t_\ell)$ est une écriture non réduite de $\tau_k \circ \sigma$, donc il existe $p \in [\![1, \ell]\!]$ tel que $\tau_k \circ \sigma = t_1 \circ \cdots \circ t_{p-1} \circ t_{p+1} \circ \cdots \circ t_\ell$ (question 4.5). Alors le mot $m'' = (\tau_k, t_1, \ldots, t_{p-1}, t_{p+1}, \ldots, t_\ell)$ est une écriture réduite de σ, ce qui permet d'écrire g sous la forme $Y(m'')(b_1, \ldots, b_\ell)$, avec $(b_1, \ldots, b_\ell) \in (\mathbb{R}_+^*)^\ell$. On voit ainsi que $y_k(a)g = Y(m'')(a + b_1, b_2, \ldots, b_\ell)$ appartient à l'image de $Y(m'')$, c'est-à-dire à $W(\sigma)$.

(b) Soient $(a_1, \ldots, a_\ell)$ et $(b_1, \ldots, b_\ell)$ deux éléments de $(\mathbb{R}_+^*)^\ell$ qui ont même image par $Y(m)$. Nous voulons montrer que $(a_1, \ldots, a_\ell) = (b_1, \ldots, b_\ell)$.

On raisonne par récurrence sur $N(\sigma)$. Ecrivons $m = (t_1, \ldots, t_\ell)$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $t_1 = \tau_k$. Posons $m' = (t_2, \ldots, t_\ell)$; c'est une écriture réduite de $\tau_k \circ \sigma$. Supposons un instant que l'on ait $a_1 > b_1$; on pourrait alors écrire

$$Y(m)(a_1 - b_1, a_2, \ldots, a_\ell) = y_k(-b_1)\, Y(m)(a_1, \ldots, a_\ell) = Y(m')(b_2, \ldots, b_\ell),$$

ce qui contredirait le fait, affirmé dans l'énoncé, que les ensembles $W(\sigma)$ et $W(\tau_k \circ \sigma)$ sont disjoints. Par symétrie, le cas $b_1 > a_1$ n'est pas non plus possible. On a donc $a_1 = b_1$. Après simplification, on observe que $(a_2, \ldots, a_\ell)$ et $(b_2, \ldots, b_\ell)$ ont même image par $Y(m')$. L'hypothèse de récurrence donne alors $(a_2, \ldots, a_\ell) = (b_2, \ldots, b_\ell)$, ce qui conclut la preuve.

6.4

(a) Soit $\sigma \in S_n$ et soit $m = (t_1, \ldots, t_\ell)$ une écriture réduite de σ.

Soit $\rho \in S_n$ une permutation plus petite que σ. D'après la question 5.8, il existe une suite strictement croissante d'indices $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant \ell$ telle que $m' = (t_{i_1}, \ldots, t_{i_k})$ soit une écriture réduite de ρ. Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}_+^*$. Pour chaque $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, construisons un $\underline{b} \in (\mathbb{R}_+^*)^\ell$ en mettant a_r en position i_r, pour $r \in [\![1, k]\!]$, et en mettant ε aux autres endroits. Alors $Y(m)(\underline{b})$ appartient à $W(\sigma)$ et tend vers $Y(m')(\underline{a})$ quand ε tend vers 0. Ce dernier appartient donc à l'adhérence de $W(\sigma)$. Ceci étant valable pour tout $\underline{a} \in (\mathbb{R}_+^*)^k$, on a $W(\rho) \subset \overline{W(\sigma)}$.

Dans l'autre sens, soit h un élément de $\overline{W(\sigma)}$. Cet élément est la limite d'une suite (g_p) d'éléments de $W(\sigma)$. Écrivons $g_p = Y(m)(b_{p,1}, \ldots, b_{p,\ell})$, avec $b_{p,r} \in \mathbb{R}_+^*$ pour chaque $p \geqslant 0$ et chaque $r \in [\![1, \ell]\!]$. La somme $b_{p,1} + \cdots + b_{p,\ell}$ est égale à la somme des coefficients sur la sous-diagonale de la matrice g_p, donc admet une limite quand p tend vers l'infini. Par conséquent, la suite $(b_{p,1}, \ldots, b_{p,\ell})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^\ell$, est bornée. Quitte à extraire, on peut la supposer convergente et appeler $(c_1, \ldots, c_\ell)$ sa limite. Supprimant les zéros dans cette liste, on voit qu'il existe une suite strictement croissante d'indices $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant \ell$ telle que $h = Y(m')(c_{i_1}, \ldots, c_{i_k})$, où $m' = (t_{i_1}, \ldots, t_{i_k})$. Du résultat de la question 6.3 (a), appliqué de façon répétée, on déduit alors que $h \in W(\rho)$, où ρ s'écrit comme un produit de certaines des lettres du mot m'. La question 5.8 assure que $\rho \leqslant \sigma$, de sorte qu'on a

$$h \in \bigcup_{\substack{\rho \in S_n \\ \rho \leqslant \sigma}} W(\rho),$$

comme désiré.

(b) Appelons V l'union $\bigcup_{\sigma \in S_n} W(\sigma)$. Chaque élément de V est produit de matrices $y_k(a)$, pour $(k, a) \in [\![1, n-1]\!] \times \mathbb{R}_+^*$. La stabilité de V par multiplication découle ainsi de la question 6.3 (a). (Incidemment, puisque V contient toutes les matrices $y_k(a)$ ainsi que la matrice identité, on voit que V est l'ensemble de tous les produits de matrices $y_k(a)$.)

Soit σ_0 la permutation définie dans la question 5.1. D'après la question 5.5 (c), σ_0 est le plus grand élement de S_n pour l'ordre $\leqslant$. D'après la question (a), V est l'union des adhérences dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des $W(\sigma)$, pour $\sigma \in S_n$, donc est une union finie de fermés, donc est fermé.

Chapitre 4

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.1 Énoncé

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

Introduction, notations et conventions

L'objet de ce problème est l'étude de la transformation intégrale d'Abel considérée comme opérateur sur divers espaces et de son usage pour la résolution d'un problème concret abordé dans la partie III. Les parties III et IV sont indépendantes mais dépendent des propriétés de la transformée d'Abel définie dans les parties I et II.

On rappelle que si E et F sont deux $\mathbf{C}-$espaces normés, dont les normes sont respectivement notées $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, et si $T : E \to F$ est une application linéaire, alors T est continue sur E si, et seulement si, il existe une constante positive C telle que

$$\forall f \in E, \qquad \|Tf\|_F \leqslant C\|f\|_E,$$

et on appelle norme de T, notée $|||T|||$, la plus petite des constantes C pour lesquelles cette inégalité a lieu.

Une application linéaire continue entre deux espaces normés sera appelée un opérateur.

Si $T : E \to F$ est une application linéaire, on définit son image comme

$$\mathrm{Im}(T) = T(E) = \{Tf,\, f \in E\},$$

et son noyau comme

$$\mathrm{Ker}(T) = \{f \in E,\, Tf = 0\}.$$

De même si B est une partie de F, on définit

$$T^{-1}(B) = \{f \in E,\, Tf \in B\}.$$

Pour I intervalle de $\mathbf{R}$, on note $C^0(I)$ (respectivement $C^1(I)$) l'espace des fonctions à valeurs complexes et continues sur l'intervalle I (respectivement de classe C^1 sur l'intervalle I).

Les espaces de Banach que nous considérerons dans ce problème sont :

– l'espace $C^0([0,1])$, muni de la norme uniforme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

– pour I, intervalle de $\mathbf{R}$, et $p \in [1,+\infty[$, nous noterons $\mathcal{L}^p(I)$ l'espace des fonctions $f : I \to \mathbf{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$, Lebesgue-mesurables et telles que $\displaystyle\int_I |f(t)|^p \mathrm{d}t$ soit finie. Nous désignerons par $L^p(I)$ l'espace quotient de $\mathcal{L}^p(I)$ par la relation d'égalité presque partout. On confondra systématiquement un élément de l'espace $L^p(I)$ avec l'un de ses représentants dans l'espace $\mathcal{L}^p(I)$. La norme sur l'espace $L^p(I)$ est :

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On rappelle que si α est un réel strictement positif alors on peut définir

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

On a alors $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et pour tout entier positif n, $\Gamma(n+1) = n!$.
Pour α, β des réels strictement positifs, on admettra la formule classique suivante :

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}\mathrm{d}t.$$

Si $A \subset \mathbf{R}$ est un ensemble borélien on notera 1_A sa fonction indicatrice, définie par

$$1_A(x) = 1 \text{ si } x \in A \text{ et } 1_A(x) = 0 \text{ sinon.}$$

4.1.1 Transformation intégrale d'Abel

Transformée d'Abel dans $C^0([0,1])$ et dans $C^1([0,1])$

1. (a) Pour $x \in [0,1[$, montrer la convergence et calculer l'intégrale

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-x}}.$$

(b) En déduire, pour $f \in C^0([0,1])$, que l'intégrale

$$\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\mathrm{d}t$$

est convergente et que

$$\lim_{x\to 1} \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\mathrm{d}t = 0.$$

Pour $f \in C^0([0,1])$, on définit alors la fonction $Af : [0,1] \to \mathbf{C}$ par $Af(1) = 0$ et pour tout $x \in [0,1[$ par

$$Af(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\mathrm{d}t.$$

2. Pour $x \in [0,1[$, montrer que

$$Af(x) = \sqrt{1-x}\int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$

3. En déduire que Af appartient à $C^0([0,1])$ et que $A : f \mapsto Af$ est un opérateur de $C^0([0,1])$ dans lui-mÍme dont on déterminera la norme.

4. On suppose dans cette question que $f(1) \neq 0$.
   (a) Donner un équivalent de $Af(x)$ au voisinage de 1.
   (b) En déduire que Af n'est pas dérivable en 1.

5. On suppose dans cette question que f est de classe C^1 sur $[0,1]$.
   (a) Montrer que Af est de classe C^1 sur $[0,1[$.
   (b) On suppose de plus que $f(1) = 0$, montrer que Af est de classe C^1 sur $[0,1]$.

La formule d'inversion

1. Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Montrer que

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u)}} = \pi.$$

Pour $f \in C^0([0,1])$, on définit la fonction Vf de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ par $Vf(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$.

2. Montrer que $V : f \mapsto Vf$ est un opérateur de $C^0([0,1])$ dans lui-même et calculer sa norme.

3. Montrer l'égalité d'opérateurs de $C^0([0,1])$: $A \circ A = \pi V$.
   (*Indication : on pourra utiliser I.B.1.*)

4. En déduire que l'opérateur A est injectif sur $C^0([0,1])$.

5. (a) Déterminer l'image de l'opérateur V de $C^0([0,1])$, notée $\mathrm{Im}(V)$.
   (b) En déduire que : $\mathrm{Im}(A) = A^{-1}\left(C^1([0,1])\right)$.
   (c) Montrer que toute fonction $g \in C^1([0,1])$ telle que $g(1) = 0$ appartient à $\mathrm{Im}(A)$.

6. Soit $g \in \mathrm{Im}(A)$. Montrer que l'unique fonction $f \in C^0([0,1])$ telle que $Af = g$ est donnée par

$$f = -\frac{1}{\pi}(Ag)',$$

   où $(Ag)'$ désigne la fonction dérivée de Ag.

Un semi-groupe d'opérateurs

1. Soit α un réel strictement positif.

   (a) En s'inspirant de la section I.A, montrer que pour $f \in C^0([0,1])$, on peut définir une fonction $V^\alpha f : [0,1] \to \mathbf{C}$ par $V^\alpha f(1) = 0$ et pour tout $x \in [0,1[$ par

   $$V^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} f(t) \mathrm{d}t.$$

   (b) Montrer que l'application $V^\alpha : f \mapsto V^\alpha f$ est un opérateur de $C^0([0,1])$ dans lui-même.

2. Montrer la propriété de semi-groupe, pour α, β des réels strictement positifs,

   $$V^{\alpha+\beta} = V^\alpha \circ V^\beta.$$

3. Pour $\alpha = n$, un entier strictement positif, montrer l'égalité d'opérateurs de $C^0([0,1])$:

   $$V^\alpha = V \circ \ldots \circ V$$

   (composée n fois), oùV est l'opérateur introduit en I.B.2.

4. Montrer l'égalité d'opérateurs de $C^0([0,1])$: $A = \sqrt{\pi} V^{1/2}$.

4.1.2 La transformée d'Abel et les espaces L^p

Dans cette partie p désigne un réel de l'intervalle $[1, +\infty[$.

1. Soit $h \in L^1(\mathbf{R})$ telle que $\|h\|_1 = 1$ et $f \in L^p(\mathbf{R})$.

   (a) Montrer l'inégalité suivante :

   $$\int_{\mathbf{R}} \left| \int_{\mathbf{R}} |f(t)||h(x-t)| \mathrm{d}t \right|^p \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^p |h(x-t)| \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x.$$

   (b) En déduire que si $g \in L^1(\mathbf{R})$, alors

   $$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(t) g(x-t) \mathrm{d}t$$

   existe pour presque tout $x \in \mathbf{R}$ et que $f * g : x \mapsto (f * g)(x)$ définit une fonction appartenant à $L^p(\mathbf{R})$ et telle que

   $$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1.$$

Pour $f \in L^1([0,1])$, on note $E(f)$ la fonction de $L^1(\mathbf{R})$ qui coïncide avec f sur l'intervalle $[0,1]$ et qui vaut 0 en dehors de cet intervalle. On définit aussi la fonction r de $L^1(\mathbf{R})$ en posant

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} 1_{]-1,0[}(x).$$

2. Pour $f \in C^0([0,1])$ et $x \in [0,1]$, montrer que
$$Af(x) = (E(f) * r)(x).$$

3. (a) Montrer que A et V se prolongent de façon unique en des opérateurs de $L^p([0,1])$ dans lui-même. On note encore A et V ces prolongements.
   (b) Montrer que si $f \in L^p([0,1])$ alors on a, pour presque tout x de $[0,1]$,
$$Af(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad Vf(x) = \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

4. Pour ϵ réel strictement positif, on définit la fonction $\varphi_\varepsilon \in L^1(\mathbf{R})$ par
$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$
où$x \in \mathbf{R}$ et $\varphi(x) = 1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)$.
   (a) Montrer que si $f \in \mathrm{Ker}(V)$, oùV est considéré comme un opérateur de $L^p([0,1])$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a $E(f) * \varphi_\varepsilon = 0$.
   (b) En déduire que les opérateurs V et A de $L^p([0,1])$ sont injectifs.
   (c) L'opérateur A, de $L^p([0,1])$ dans lui-même, est-il surjectif ?

5. Dans cette question, on suppose que $p > 2$ et on note $q = \frac{p}{p-1}$.
   (a) Montrer que $r \in L^q(\mathbf{R})$.
   (b) Pour $x \in \mathbf{R}$, notons $\tau_x r$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\tau_x r(t) = r(x-t)$. Montrer que l'application $x \mapsto \tau_x r$ est continue de $\mathbf{R}$ dans $L^q(\mathbf{R})$.
   (c) Montrer que l'opérateur A est continu de $L^p([0,1])$ dans $C^0([0,1])$.
   (d) On note B_p la boule unité fermée de $L^p([0,1])$. À l'aide du théorème d'Ascoli, prouver que $A(B_p)$ est une partie de l'espace $C^0([0,1])$ d'adhérence compacte.

6. Dans cette question on se propose de montrer que la conclusion de la question précédente est fausse pour $1 \leqslant p \leqslant 2$. Pour λ réel strictement positif, on définit la fonction f_λ par
$$f_\lambda(t) = \Big(t(-\ln t)^\lambda\Big)^{-1/2} 1_{]0,1/2]}(t).$$
   (a) Pour quelles valeurs de $\lambda > 0$, f_λ est-elle dans $L^2([0,1])$?
   (b) Montrer que si $0 < \lambda < 2$ alors $Af_\lambda(x) \to +\infty$ quand $x \to 0$.
   (*Indication : on pourra utiliser le lemme de Fatou.*)
   (c) En déduire l'existence d'une fonction f de $L^2([0,1])$ telle que Af n'est pas dans $C^0([0,1])$.

À partir de la question qui suit et jusqu'à la fin du problème, les opérateurs A, V seront toujours considérés comme agissant sur $L^1([0,1])$. On note $|||\cdot|||$ la norme d'opérateurs sur $L^1([0,1])$.

7. (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |||V^n|||^{\frac{1}{n}} = 0$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |||A^n|||^{\frac{1}{n}} = 0$.

8. On note I l'opérateur identité de $L^1([0,1])$. Déduire de la question précédente que pour tout réel $t \neq 0$, les opérateurs $tI+A$ et $tI+V$ sont inversibles et exprimer leurs inverses à l'aide d'une série.

4.1.3 Sphères aléatoires

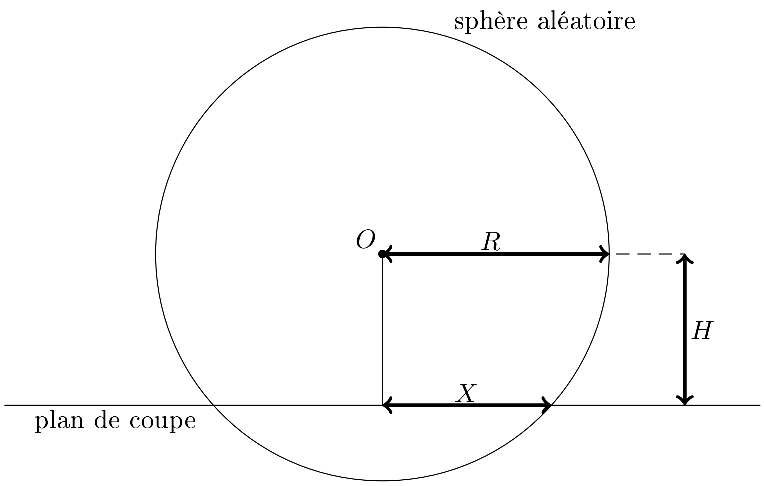
On s'intéresse à l'étude d'un milieu opaque où se développent des sphères de centres et rayons aléatoires (on peut penser par exemple à des trous dans un gruyère). Nous souhaiterions estimer la loi de distribution des rayons, mais pour cela nous ne pouvons pas observer directement ces sphères. En revanche, nous pouvons couper régulièrement le milieu par des plans et observer les rayons des cercles d'intersection des sphères avec les plans de coupe.

On modélise le problème en introduisant une variable aléatoire R, ayant pour loi la loi des rayons des sphères. On fait l'hypothèse que cette loi est à densité $f \in L^1([0,1])$.

On considère de plus une variable aléatoire H indépendante de R et suivant une loi uniforme sur $[0,1]$.

On coupe la sphère aléatoire $\mathcal{S}$ de centre $O \in \mathbf{R}^3$ et de rayon R par un plan aléatoire $\mathcal{P}$ à distance H de O et on désigne par X le rayon du cercle $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$, en convenant que $X = 0$ si $H \geqslant R$.

Le dessin ci-dessous représente la situation d'une sphère et un plan de coupe. Le dessin est fait dans un plan perpendiculaire au plan de coupe et contenant le centre de la sphère.



L'objet de cette partie est d'établir le lien entre la loi de R et la loi de X.

1. Déterminer la loi du couple (R, H).

2. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.

3. Pour $x \in [0,1]$, montrer que la probabilité de l'événement $\{X > x\}$ est donnée par :

$$P(X > x) = \int_x^1 \sqrt{r^2 - x^2} f(r) \mathrm{d}r.$$

Pour $h \in L^1([0,1])$ on pose $\tilde{h}$ la fonction définie presque partout par $\tilde{h}(x) = \frac{h(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

4. Montrer que $h \mapsto \tilde{h}$ est un isomorphisme isométrique de $L^1([0,1])$.

5. (a) Soit ψ la fonction définie pour presque tout $u \in [0,1]$ par $\psi(u) = u \int_u^1 \frac{f(r)dr}{\sqrt{r^2-u^2}}$. Montrer que $\psi \in L^1([0,1])$.
   (b) Montrer que la probabilité $P(X > x)$ s'écrit aussi
   $$P(X > x) = \int_x^1 \psi(u)\mathrm{d}u.$$
   (*Indication : on pourra utiliser l'égalité suivante, que l'on ne demande pas de démontrer : pour* $0 \leqslant x < r \leqslant 1$ $\sqrt{r^2 - x^2} = \int_x^r \frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{r^2-u^2}}$)
   (c) Montrer que la loi de X est la mesure P_X sur $[0,1]$ définie par :
   $$P_X = P(X = 0)\delta_0 + \psi(u)\mathrm{d}u,$$
   où δ_0 désigne la masse de Dirac en 0.

6. Etablir que $A\tilde{f} = 2\tilde{\psi}$, où A est la transformée d'Abel sur $L^1([0,1])$ définie dans les parties I et II.
7. En déduire que pour presque tout $x \in [0,1]$ la probabilité de l'événement $\{R > x\}$ est donnée par
   $$P(R > x) = \frac{2}{\pi} A\tilde{\psi}(x^2).$$

On considère à présent une variante du modèle précédent. Au lieu de couper la sphère aléatoire $\mathcal{S}$ de rayon aléatoire R par un plan $\mathcal{P}$ à distance H du centre, on la coupe par la réunion des plans parallèles à $\mathcal{P}$ et à distance de moins de $\epsilon > 0$ de $\mathcal{P}$. En termes imagés, on coupe une tranche de la sphère $\mathcal{S}$ d'épaisseur 2ϵ. On retient alors comme variable aléatoire X le plus grand des rayons de $\mathcal{P}' \cap \mathcal{S}$, $\mathcal{P}'$ décrivant l'ensemble des plans parallèles à $\mathcal{P}$ et à distance de moins de ϵ de ce dernier.

Dans ce nouveau modèle on supposera encore que R, le rayon de la sphère aléatoire $\mathcal{S}$ suit une loi de densité f sur $[0,1]$ mais on suppose maintenant que H suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1+\epsilon]$.

8. Montrer que la loi de X est encore une mesure P_X sur $[0,1]$ qui s'écrit
   $$P_X = P(X = 0)\delta_0 + \phi(x)\mathrm{d}x,$$
   avec $t = 2\epsilon$ et
   $$2(1+\epsilon)\tilde{\phi} = (tI + A)\tilde{f}.$$

4.1.4 Problèmes bien et mal posés

Soient E, F deux $\mathbb{C}-$ espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire continue et injective. On définit l'application linéaire
$$T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \to E.$$
On s'intéresse à l'équation
$$T(f) = g \tag{4.1}$$

où il s'agit de trouver $f \in E$ connaissant $g \in F$.

Dans la pratique (c'est le cas de l'équation obtenue en III.6) on ne connaît g qu'approximativement et on ne désire pas que de petites variations sur g induisent de grandes variations sur la solution f.

On dira donc que le problème (4.1) est bien posé si $g \in \mathrm{Im}(T)$ et si T^{-1} est une application linéaire continue, mal posé dans le cas contraire.

Dans le reste du problème l'opérateur A est la transformée d'Abel sur $L^1([0,1])$ définie dans les parties I et II. On écrit $t \mapsto 0^+$ (respectivement $s \mapsto 0^+$), si le réel t (respectivement s) tend vers 0 tout en restant strictement positif.

1. Soit $h \in L^1[0,1]$ et $g = Ah$.
   (a) Montrer que le problème $Af = g$ est mal posé.
   (b) Montrer que le problème $(tI + A)f = g$, où t est un réel non nul, est bien posé.

On appelle f_t l'unique solution de ce dernier problème et dans le reste de cette partie, on se propose de montrer que

$$f_t \text{ converge vers } h = A^{-1}g \text{ dans } L^1([0,1]) \text{ lorsque } t \to 0^+. \tag{4.2}$$

On commence par s'intéresser à la question analogue pour l'opérateur V de $L^1([0,1])$ introduit dans la partie I.

Soit $h \in L^1([0,1])$ et $s > 0$. On note $f_{s,V}$ l'unique solution de l'équation $(sI + V)f_{s,V} = Vh$.
On définit la fonction k par $k(x) = e^x 1_{]-\infty,0]}(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$ et on définit la fonction k_s par $k_s(x) = \frac{1}{s}k(\frac{x}{s})$ pour $x \in \mathbf{R}$.

2. (a) Montrer que $y = Vf_{s,V}$ est de classe C^1 et écrire une équation différentielle dont y est solution.
   (b) Montrer que les fonctions $f_{s,V}$ et $E(h) * k_s$ coïncident presque partout sur $[0,1]$.
3. En déduire que :
   (a) $\forall s > 0, |||(sI + V)^{-1}V||| \leqslant 1$,
   (b) $\forall s > 0, |||(sI + V)^{-1}||| \leqslant \frac{2}{s}$,
   (c) $f_{s,V} \to h$ dans $L^1([0,1])$ lorsque $s \to 0^+$.
4. En utilisant le théorème des résidus, montrer l'identité suivante, où x, t sont deux réels strictement positifs, et $\alpha \in]0,1[$:
$$\int_0^\infty \frac{s^\alpha \mathrm{d}s}{(s+t^2)(s+x)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \frac{t^{2\alpha} - x^\alpha}{t^2 - x}.$$

La formule précédente pour $\alpha = 1/2$ peut encore s'écrire :

$$\frac{1}{t + \sqrt{x}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{s}\mathrm{d}s}{(s+t^2)(s+x)}. \tag{4.3}$$

Par le calcul fonctionnel holomorphe on montre (et la démonstration de ce fait n'est pas demandée) que la formule (4.3) s'étend au cas où x est un opérateur et en particulier que

$$|||(tI + V^{1/2})^{-1}||| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{s}|||(sI + V)^{-1}|||}{s + t^2} \mathrm{d}s.$$

5. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $t > 0$,

$$|||(tI + A)^{-1}||| \leqslant \frac{C}{t}.$$

(*Indication : on rappelle* $V^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}A$.)

6. Montrer que si h est dans l'image de A alors f_t converge vers h dans $L^1([0,1])$ lorsque $t \to 0^+$.
7. Conclure dans le cas général.

4.2 Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.2.1 Le toboggan d'Abel

Appelons toboggan le graphe d'une fonction f de classe C^1 sur $[0,1]$ qui est strictement décroissante et qui vérifie $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. Si $h \in [0,1]$, on notera $\omega(h)$ le temps nécessaire à un point matériel situé initialement sur le toboggan à hauteur h et glissant sans frottement pour atteindre le point $(1,0)$.

Niels Abel a considéré en 1826 le problème de savoir si la donnée de la fonction ω permettait de reconstituer la géométrie du toboggan, c'est à dire la fonction f.

Non seulement Abel a répondu positivement, mais il a de plus trouvé une formule explicite donnant f en fonction de ω : les historiens des mathématiques considèrent qu'il s'agit là de la première apparition d'une équation fonctionnelle en mathématiques. Cette équation fonctionnelle implique la transformation d'Abel qui peut être vue comme une primitivisation d'ordre 1/2. C'est cet opérateur qui est l'objet principal d'étude du problème.

4.2.2 Du toboggan d'Abel à la tomographie

Non seulement la transformation intégrale d'Abel s'est avérée être un outil fondamental pour ce qui s'appelle à présent le calcul différentiel fractionnaire mais surtout elle permet de résoudre des problèmes très concrets dans de nombreux domaines. Citons la sismographie, la biophysique, la mécanique quantique et la tomographie. C'est ce dernier aspect qui a été développé dans ce problème.

La question posée est la suivante : on veut étudier des milieux ou existent des objets sphériques dont les diamètres se distribuent suivant une loi inconnue. On ne peut pas accéder directement à cette loi mais les techniques d'imagerie permettent néammoins de connaître la loi des rayons des coupes planes du milieu. On peut penser à un fromage comportant des trous que l'on ne peut appréhender qu'en regardant des coupes. La loi des rayons des sphères se déduit de la statistique des rayons des cercles des coupes par une variante de la transformée intégrale d'Abel : ceci est l'objet de la partie III.

4.2.3 Problèmes bien et mal posés

Le problème est que l'on ne connait les lois des coupes qu'approximativement alors que le problème mathématique sous-jacent est mal posé. On sait que pour remédier à cela il faut "régulariser", et dans le cas présent cette régularisation consiste à remplacer les coupes par des tranches. L'intuition est ici, pour rester dans la métaphore culinaire plutôt celle de la salade de tomates : comment reconstituer la loi des rayons des tomates à partir de la loi des diamètres des tranches qui constituent la salade ? On montre (et c'est l'objet de la fin de la partie III) que ce problème est maintenant bien posé et l'objet de la partie IV est de montrer que sa solution converge vers la solution du problème mal posé lorsque l'épaisseur des tranches tend vers 0.

4.2.4 Rapport sur l'épreuve

La première partie traitait de la transformée d'Abel dans $C^0([0,1])$ et $C^1([0,1])$. Les questions étaient de nature très classiques ; on y testait les connaissances de base sur les questions de régularité des intégrales à paramètres. Force est de constater que la notion d'absolue convergence n'est pas assimilée par nombre de candidats : on rappelle que pour montrer qu'une intégrale converge absolument il convient de majorer la valeur absolue de la fonction qu'on intègre par une fonction intégrable (et non la valeur absolue de l'intégrale dont on ne sait pas qu'elle converge). La section traitant de la formule d'inversion nécessitait l'usage du théorème de Fubini qui est également très mal appliqué. Beaucoup de candidats ne vérifient pas l'absolue convergence de l'intégrale double ou bien se trompent dans les bornes d'intégration (on intégrait sur un domaine triangulaire et non rectangulaire). A noter aussi dans cette partie la confusion fréquente entre la continuité de Af et celle de l'opérateur A : en particulier l'inégalité $\|Af\|_\infty \leqslant M\|f\|_\infty$ n'implique nullement que la fonction Af est continue. Enfin l'injectivité de l'opérateur V a causé du souci à de nombreux candidats qui s'empêtrent dans des preuves alambiquées alors qu'il suffisait de remarquer que $f = -(Vf)'$.

La partie II testait les connaissances des candidats sur les espaces L^p : très peu d'entre eux ont répondu correctement à la première question où une indication était pourtant donnée. La question liée au théorème d'Ascoli a été très peu abordée.

La partie III testait des connaissances basiques de probabilité. La notion de loi de couples de variables aléatoires est très floue pour beaucoup de candidats.

La partie IV a été abordée par une toute petite minorité de candidats.

Enfin, notons que l'introduction comportait deux petites coquilles qui heureusement n'ont pas eu d'influence sur la compréhension du texte et dans les copies. Il fallait évidemment définir les espaces L^p comme espaces de (classes de) fonctions à valeurs complexes, de façon à ce que l'espace $C([0,1])$ qui était défini sur les complexes soit dense dans les L^p. Par ailleurs les espaces L^p étaient définis sur un intervalle I quelconque tandis que la norme n'était définie que dans le cas $I = [0,1]$. Les candidats ont corrigé d'eux mêmes.

4.3 Corrigé de l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.3.1 La transformation intégrale d'Abel

Transformée d'Abel dans $C^0([0,1])$ et dans $C^1([0,1])$

1. (a) Si $x \in [0,1[$ et $1 - x > \epsilon > 0$ alors
$$\int_{x+\epsilon}^1 \frac{dt}{\sqrt{t-x}} = 2(\sqrt{1-x} - \sqrt{\epsilon}) \to 2\sqrt{1-x}$$
si ϵ tend vers 0. L'intégrale est donc convergente et vaut $2\sqrt{1-x}$.

   (b) Comme
$$\frac{|f(t)|}{\sqrt{t-x}} \leqslant \|f\|_\infty \frac{1}{\sqrt{t-x}},$$
l'intégrale
$$\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt$$
est absolument convergente, donc convergente. De plus
$$|\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt| \leqslant 2\|f\|_\infty \sqrt{1-x} \to 0, \text{ quand } x \to 1.$$

2. On effectue le changement de variable $t = (1-u)x + u = x + u(1-x)$:
$$Af(x) = \int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u(1-x)}}(1-x)du = \sqrt{1-x}\int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}} du.$$

3. Posons
$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}du,$$
de sorte que $Af(x) = \varphi(x)\sqrt{1-x}$.
Comme $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est continue sur $[0,1]$, il suffit de montrer que φ l'est aussi. Mais $\varphi(x) = \int_0^1 F(u,x)du$ où
$$F(u,x) = \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}.$$
Soit alors $x \in [0,1]$ et (x_n) une suite de points de $[0,1]$ convergeant vers x. Alors $F(u,x_n) \to F(u,x)$ pour tout $u \in]0,1]$.De plus,
$$|F(u,x_n)| \leqslant g(u) = \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{u}}$$
où g est une fonction de $L^1([0,1])$. Le théorème de convergence dominée s'applique et prouve que $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ et donc que φ est continue sur $[0,1]$.
On peut aussi pour prouver le résultat invoquer le thórème général (dont le raisonnement précédent ramène la preuve au théorème de convergence dominée) :
Si la fonction $x \mapsto F(u,x)$ est continue pour presque tout $u \in [0,1]$ et si $|F(u,x)| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{u}}$ qui est une fonction intégrable, alors la fonction φ est continue sur $[0,1]$.
Passons à la continuité de A. On peut écrire
$$|Af(x)| \leqslant \|f\|_\infty 2\sqrt{1-x} \leqslant 2\|f\|_\infty,$$
ce qui prouve que $\|A\| \leqslant 2$, et la considération de la fonction constante 1 implique $\|A\| = 2$.

4. (a) On rappelle que $Af(x) = \varphi(x)\sqrt{1-x}$ où φ est continue sur $[0,1]$ avec $\varphi(1) = 2f(1)$: dans le cas où $f(1) = 0$ on en conclut que $Af(x) \sim 2f(1)\sqrt{1-x}$ au voisinage de 1.

   (b) Comme $Af(1) = 0$ on peut écrire
$$|\frac{Af(x) - Af(1)}{x-1}| = |\frac{Af(x)}{x-1}| \sim_{x\to 1} |\frac{-2f(1)}{\sqrt{1-x|}} \to +\infty$$
   quand $x \to 1$.

5. (a) On reprend les notations de IA5 : il suffit de montrer que φ est de classe C^1 sur $[0,1]$. Soit donc comme plus haut $x \in [0,1]$ et $x_n \in [0,1]$ une suite convergeant vers x. Alors
$$\frac{\varphi(x_n) - \varphi(x)}{x_n - x} = \int_0^1 H_n(u)du$$
   où
$$H_n(u) = \frac{f(u + x_n(1-u)) - f(u + x(1-u))}{(x_n - x)\sqrt{u}} \to \frac{(1-u)f'(u + x(1-u))}{\sqrt{u}},\ u \in]0,1[.$$
   Par ailleurs, par le théorème des accroissements finis,
$$|H_n(u)| \leqslant \frac{(1-u)\|f'\|_\infty}{\sqrt{u}} = H(u),$$
   où $H \in L^1([0,1])$. Le théorème de convergence dominée s'applique et nous permet d'affirmer que φ est dérivable sur $[0,1]$ et que
$$\varphi'(x) = \int_0^1 \frac{(1-u)f'(u + x(1-u))}{\sqrt{u}}du.$$

On montre alors comme dans IA5 que φ' est continue sur $[0,1]$; on en déduit immédiatement que Af est de classe C^1 sur $[0,1[$.
Comme plus haut, on peut aussi invoquer pour cette question un théorème général :
Si la fonction $x \mapsto F(u,x)$ est de classe C^1 pour presque tout $u \in [0,1]$ et si

$$|\frac{\partial F}{\partial x}(u,x)| \leqslant H(u)$$

avec $H \in L^1$, alors la fonction φ est de classe C^1 sur $[0,1]$ et que sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe $\int$.

(b) Par dérivation du produit donnant Af, pour $x \in [0,1[$,

$$(Af)'(x) = \sqrt{1-x}\varphi'(x) - \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{1-x}}.$$

La fonction φ' étant continue sur $[0,1]$, le premier terme de cette somme tend vers 0 en 1 ; par ailleurs on observe tout d'abord que $f(1) = 0 \Rightarrow \varphi(1) = 0$, et donc que

$$\frac{\varphi(x)}{2\sqrt{1-x}} = \frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{2\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{1-x} \to 0 \text{ quand } x \to 1,$$

car φ est dérivable en 1.
On en déduit que $(Af)'(x) \to 0$ quand $x \to 1$ et puis que Af est de classe C^1 sur $[0,1]$.C'est en effet une simple application du théorème des accroissements finis que de dire que Af est dérivable en 1 avec dérivée nulle, comme conséquence du fait que la dérivée $Af'(x)$ converge vers 0 quand $x \to 1$.

La formule d'inversion

1. On fait le changement de variable $t = (1-u)a + ub$:

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_0^1 \frac{(b-a)du}{\sqrt{(1-u)(b-a)u(b-a)}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}.$$

On observe ensuite que

$$u(1-u) = u - u^2 = \frac{1}{4} - (u - \frac{1}{2})^2$$

et on fait le changement de variable $v = 2(u - \frac{1}{2})$, ce qui donne

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \int_{-1}^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \pi,$$

comme on le voit en faisant le dernier changement de variable $v = \sin\theta$.

2. L'application V envoie $C^0([0,1])$ dans $C^1([0,1]) \subset C^0([0,1])$ et

$$\forall x \in [0,1],\ |Vf(x)| \leqslant \|f\|_\infty,$$

ce qui prouve que $\|V\| \leqslant 1$ et la considération de la fonction constante 1 montre que $\|V\| = 2$.

3. Soit $f \in C^0([0,1])$ et $x \in [0,1[$:

$$A(Af)(x) = \int_x^1 \frac{Af(t)dt}{\sqrt{t-x}}$$

$$= \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t-x}} \left(\int_x^1 \frac{1_{[t,1]}(u)f(u)du}{\sqrt{u-t}}\right) dt.$$

La fonction

$$(t, u) \mapsto \frac{1_{[t,1]}(u)|f(u)|du}{\sqrt{(t-x)(u-t)}}$$

est intégrable sur $[x, 1] \times [x, 1]$ car

$$\int_x^1 \int_x^1 \frac{1_{[t,1]}(u)|f(u)|du}{\sqrt{(t-x)(u-t)}} dtdu \leqslant \|f\|_\infty \int_x^1 du \left(\int_x^u \frac{dt}{\sqrt{(t-x)(u-t)}} \right) \leqslant \pi \|f\|_\infty (1-x).$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini pour obtenir

$$A \circ Af(x) = \int_x^1 f(u) \left(\int_x^u \frac{dt}{\sqrt{(t-x)(u-t)}} \right) du = \pi V f(x).$$

4. $Af = 0 \Rightarrow A \circ Af = 0 \Rightarrow Vf = 0$, mais $f = -(Vf)' = 0$.
5. (a) $\mathrm{Im} V = \{f \in C^0([0, 1]);\ f(1) = 0\}$. L'inclusion $\subset$ est évidente ; pour l'inclusion inverse on observe que si $g \in C^1([0, 1])$ et $g(1) = 0$, alors $g = -Vg'$.
   (b) 1) Si $h \in \mathrm{Im} A$ alors $h = Af$ et donc $Ah = \pi V f \in C^1([0, 1])$ et $h \in A^{-1}(C^1([0, 1]))$.
   2) Si $Ah \in C^1([0, 1])$ alors, comme $Ah(1) = 0$, $Ah = V(-(Ah)') = A(\pi A(-Ah)'$ et donc, par l'injectivité de A,
   $$h = A(-\pi(Ah)') \in \mathrm{Im} A.$$
   (c) Si $g \in C^1([0, 1])$ et $g(1) = 0$ alors $g = -V(g') = A(-\frac{1}{\pi}A(g')) \in \mathrm{Im} A$.
6. On suppose que $g = Af$: alors $Ag = \pi V f$ et donc $f = -1/\pi(Ag)'$.

Un semi-groupe d'opérateurs

1. Sur $[x, 1]$ on a $|(t-x)^{\alpha-1} f(x)| \leqslant \|f\|_\infty (t-x)^{\alpha-1}$ et $\int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} dx$ converge par le critère de Riemann. $V^\alpha f(x)$ est donc bien défini et, par le même changement de variable qu'au IA4) on obtient
   $$V^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (1-x)^\alpha \int_0^1 u^{\alpha-1} f(x + (1-x)u) du$$
   et on montre comme dans IA4) que $V^\alpha f$ est continue.
   En ce qui concerne l'application linéaire V^α, sa continuité découle de
   $$\|V^\alpha f\|_\infty \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f\|_\infty \int_0^1 u^{\alpha-1} du = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|f\|_\infty.$$
   On peut remarquer (non demandé) que la considération de la fonction constante 1 conduit à montrer que
   $$\|V^\alpha\| = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}.$$
2. $V^\alpha V^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 V^\beta f(t)(t-x)^{\alpha-1} dt$
   $$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} \left(\int_x^1 (u-t)^{\beta-1} 1_{[t,1]}(u) f(u) du \right) dt.$$
   On montre comme plus haut que le théoréme de Fubini s'applique et que
   $$V^\alpha V^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^1 f(u) \left(\int_x^u (t-x)^{\alpha-1} (u-t)^{\beta-1} dt \right) du.$$

On effectue alors le changement de variable $t = (1-s)x + xs$ dans $\int_x^u$ que l'on désigne par I :

$$I = (u-x)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1} ds.$$

On applique alors le résultat rappelé dans l'introduction :

$$I = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(u-x)^{\alpha+\beta-1}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} V^\alpha V^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_x^1 f(u)(u-x)^{\alpha+\beta-1} du \\ &= V^{\alpha+\beta} f(x). \end{aligned}$$

3. Notons $V^{(n)} = V \circ V ... \circ V$ (n fois) et montrons par récurrence que $V^{(n)} = V^n$. C'est vrai pour $n = 1$. Si la propriété est vraie au rang n alors, par la question précédente, $V^{n+1} = V \circ V^n = V \circ V^{(n)} = V^{(n+1)}$ d'après l'hypothèse de récurrence.
Enfin
$$V^{1/2} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_x^1 \frac{f(t)dt}{\sqrt{t-x}} = \frac{1}{\Gamma(1/2)} Af(x).$$
4. En utilisant le résultat admis dans l'introduction, on en déduit que
$$Af(x) = \sqrt{\pi} V^{1/2} f(x).$$

4.3.2 La transformée d'Abel et les espaces L^p

1. (a) On considère l'espace de probabilité $(\mathbf{R}, |h(x-t)|dt)$. L'inégalité de Hölder permet de montrer que les normes L^p sur cet espace sont croissantes. On a donc, si f est mesurable,
$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)||h(x-t)|dt \leqslant \left(\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^p |h(x-t)| dt \right)^{1/p},$$
d'où l'on déduit l'inégalité demandée.
   (b) Pour le reste de la question on suppose tout d'abord $g \neq 0$ sans quoi il n'y a rien à démontrer, puis on pose $h = g/\|g\|_1$. Supposons d'abord $f, h \geqslant 0$: alors $f * h$ a un sens (fini ou infini) et l'inégalité que l'on vient de démontrer permet d'écrire
$$\begin{aligned} \int |f*h|^p dx &\leqslant \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^p |h(x-t)| dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} |h(x-t)| \left(\int_{\mathbf{R}} f(t)^p dt \right) dx = \|f\|_p^p, \end{aligned}$$
et l'on obtient l'inégalité désirée en remplaąnt dans le membre de gauche h par $g/\|g\|_1$. Le cas général (sans hypothèse de signe) est alors une conséquence du théorème de Fubini.
2. Par définition du produit de convolution, $E(f) * r(x) = \int_{\mathbf{R}} E(f)(t) r(x-t) dt$. Le support de la fonction $E(f)$ est inclus dans $[0,1]$, et celui de la fonction $t \mapsto r(x-t)$ est inclus dans $[x, 1+x]$. On voit donc que si $x \in [0,1]$ alors
$$E(f) * r(x) = \int_x^1 \frac{f(t)dt}{\sqrt{t-x}} = Af(x)$$
dans le cas où f est continue.

3. ((a) et(b))On déduit de la question précédente que l'expression qui définit Af lorsque f est continue garde un sens (pp) lorsque $f \in L^p([0,1])$ et que de plus l'application linéaire A ainsi définie est un opérateur de L^p. Comme $C^0([0,1])$ est dense dans L^p, cet opérateur est bien l'unique prolongement continu de A à L^p. Le cas de V est similaire ; tout d'abord l'expression de Vf garde un sens pour $f \in L^p$ car $L^p([0,1]) \subset L^1([0,1])$. Ensuite $\|Vf\|_p \leqslant \|Vf\|_\infty \leqslant \|f\|_p$ par l'inégalité de Hölder.
4. (a) Soit $f \in L^p([0,1])$ telle que $Vf = 0$: alors
$$\forall x < y \in [0,1], \int_x^y f = 0$$
et $\int_I (E(f)(x)dx = 0$ pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$. Mais alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $E(f)*\varphi_\epsilon(x) = 1/\epsilon \int_{[x-\epsilon/2, x+\epsilon/2]} E(f)(t)dt = 0$.
   (b) Par ailleurs (φ_ϵ) est une identité approchée et donc $E(f) * \varphi_\epsilon \to E(f)$ dans L^1 quand $\epsilon \to 0$. On en déduit que $E(f) = 0$. L'opérateur V est donc injectif et l'identité $A \circ A = \pi V$ implique que A l'est aussi.
   (c) La même identité prouve que si A était surjective, V le serait aussi, or V ne peut l'être car $\mathrm{Im} V \subset C^0([0,1])$. Ce dernier point est une conséquence du théor
‘eme de convergence dominée : soit en effet $x \in [0,1]$ et (x_n) une suite de cet intervalle convergeant vers x : alors $|Vf(x) - Vf(x_n)| = \int_0^1 1_{[x,x_n]} f(x)dx$ et on a immédiatement, en posant $f_n(x) = 1_{[x,x_n]} f(x)$, que $f_n \to 0$ p.p. et $|f_n| \leqslant |f| \in L^1$.
5. (a) On a $r \in L^q(\mathbf{R})$ car $q < 2$; c'est une application immédiate du critère de Riemann pour les intégrales généralisées sur $\mathbf{R}$ en 0.
   (b) Rappelons le principe de Banach : Si (T_n) est une suite d'applications linéaires continues de l'espace normé E dans l'espace normé F telle que $\exists M \geqslant 1; \forall n \|T_n\| \leqslant M$ et telle que $T_n f \to 0$ quand $n \to \infty$ pour $f \in D$, une partie dense de E, alors $T_n f \to 0$ pour tout $f \in E$. Donnons une démonstration de ce principe que nous allons utiliser à plusieurs reprises dans la suite. Soit donc $f \in E$ et $\epsilon > 0$: on veut montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow \|T_n f\| \leqslant \epsilon$; on commence par utiliser la densité de D : il existe $g \in D$ tel que $\|f - g\| < \frac{\epsilon}{2M}$. On fixe alors cet élément g et on utilise l'hypothèse : il existe n_0 tel que $\|T_n g\| \leqslant \epsilon/2$ pour $n \geqslant n_0$. Si maintenant $n \geqslant n_0$ on écrit
$$\|T_n f\| \leqslant \|T_n(f-g)\| + \|T_n g\| \leqslant \epsilon,$$
ce qu'il fallait démontrer.
On considère alors $x \in [0,1]$ et une suite (x_n) de points de $[0,1]$ convergeant vers x : On applique le principe de Banach à $E = L^q = F$ et $T_n(f) = \tau_{x_n}(f) - \tau_x(f)$. Il est clair que $\|T_n\| \leqslant 2$. Montrons que $T_n(f) \to 0$ si f est continue à support compact. Soit $[a,b]$ un intervalle en dehors duquel $\tau_x f$ est nulle. Pour n assez grand toutes les fonctions $\tau_{x_n} f$ ont leur support inclus dans $[a-1, b+1]$. Par ailleurs la fonction $\tau_x f$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$ et donc $\tau_{x_n} f$ converge uniformément vers $\tau_x f$ sur $[a-1, b+1]$; on en déduit que
$$\|T_n(f)\|_1 \leqslant (b-a+2)\|T_n(f)\|_\infty \to 0$$
quand n tend vers $+\infty$. L'espace des fonctions continues à support compact étant dense dans L^p, le principe de Banach permet de conclure.
   (c) On peut écrire $Af(x) = \int_0^1 f(t)\tau_x r(t)dt$ et donc, x, y étant deux réels de $[0,1]$,
$$|Af(x) - Af(y)| = |\int_0^1 f(t)(\tau_x r(t) - \tau_y r(t))dt| \leqslant \|f|_p \|\tau_x r - \tau_y r\|_q \to 0, \; y \to x$$
par la question précédente. L'opérateur A envoie donc L^p dans C^0 et une nouvelle application de Hölder donne
$$\forall f \in L^p([0,1]), \; \|Af\|_\infty \leqslant \|r\|_q \|f\|_p.$$

(d) Le théorème d'Ascoli nous dit que pour montrer que $A(B_p)$ est d'adhérence compacte, il suffit de montrer que c'est une partie bornée et équicontinue de C^0. Le fait que c'est une partie bornée se déduit du fait que si $f \in B_p$ alors $\|Af\|_\infty \leqslant \|r\|_q$. L'équicontinuité découle de l'inégalité

$$|Af(x) - Af(y)| \leqslant \|\tau_x r - \tau_y r\|_q$$

vraie pour $f \in B_p$ et de la continuité de l'application $x \mapsto \tau_x r$ de $[0,1]$ dans L^q.

6. (a) On peut écrire $\int f_\lambda(t)^2 dt = -\int u' u^{-\lambda}$ où $u(t) = \ln(1/t)$. La primitive de $u'u^{-\lambda}$ est

$$u^{1-\lambda}/(1-\lambda)$$

(ou bien $\ln\ln u$ si $\lambda = 1$) : il y a donc convergence (en 0, la seule singularité) si et seulement si $\lambda > 1$.

(b) On applique le lemme de Fatou :

$$\liminf_{x\to 0} \int_x^{1/2} \frac{t^{-1/2}(\ln\frac{1}{t})^{-\lambda/2}}{\sqrt{t-x}} dt \geqslant \int_0^{1/2} \frac{dt}{t(\ln\frac{1}{t})^{\lambda/2}} = +\infty$$

si $\lambda < 2$.

(c) Il suffit de prendre f_λ avec $1 < \lambda < 2$.

7. (a) On écrit pour $x \in [0,1]$,$|V^n f(x)| = |V^{n-1}Vf(x)| \leqslant \frac{\|Vf\|_\infty}{(n-2)!}\frac{(1-x)^{n-1}}{n-1}$ et donc $\|V^n f\|_1 \leqslant \frac{\|f\|_1}{n!}$. On en déduit que $\|V^n\|^{1/n} \leqslant n!^{-1/n}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini car

$$n!^{1/n} = \exp(\frac{\ln 1 + .. + \ln n}{n}) \to \infty$$

par le théorème classique sur les moyennes de Cesaro.

(b) $\|A^{2n}\|^{1/2n} = \sqrt{\pi\|V^n\|^{1/n}} \to 0$ et $\|A^{2n+1}\|^{1/(2n+1)} \leqslant \|A\|^{1/(2n+1)}\left(\pi\|V^n\|^{1/n}\right)^{n/(2n+1)} \to 0$.

8. Pour t assez grand,

$$(tI + A)^{-1} = \frac{1}{t}(I + \frac{A}{t})^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-A)^n}{t^{n+1}}.$$

Mais d'après ce qui précède, le rayon de convergence de la série est infini ; l'écriture précédente est donc valable pour tout $t > 0$.

4.3.3 Sphères aléatoires

1. Les deux lois étant indépendantes, la loi du couple est la mesure de densité

$$f(r)drdh$$

sur $[0,1] \times [0,1]$.

2. $P(X = 0) = P(H \geqslant R) = \int_0^1 (1-r)f(r)dr$.
3. $P(X > x) = P(H^2 < R^2 - x^2) = \int_x^1 \sqrt{r^2 - x^2} f(r)dr$.
4. On pose $\theta(x) = \sqrt{x}$: c'est un homéomorphisme de $[0,1]$ sur lui-même dont la restriction à $]0,1[$ est un difféomorphisme. Alors $V_\theta : f \mapsto f \circ \theta\theta'$ est un isomorphisme isométrique de $L^1([0,1])$ comme on le voit par la formule du changement de variable et par le fait que $V_\theta^{-1} = V_{\theta^{-1}}$.
5. (a) On effectue le changement de variable $v = r^2 = \theta^{-1}(r)$ dans l'intégrale ; cela donne

$$\psi(u) = u\int_{u^2}^1 \frac{\tilde{f}(v)dv}{\sqrt{v-u^2}}$$
$$= \frac{1}{2} A\tilde{f}(\theta^{-1}(u))(\theta^{-1})'(u),$$

qui est bien une fonction de L^1 par la formule du changement de variable et le fait que $A\tilde{f} \in L^1$ par la question précédente et les résultats de la partie II.

(b) L'égalité admise découle du fait que

$$\sqrt{r^2 - x^2} = -\int_x^r \frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{r^2 - u^2})du = \int_x^r \frac{u}{\sqrt{r^2 - u^2}}du.$$

En remplaçant dans l'expression plus haut on obtient

$$P(X > x) = \int_x^1 \left(\int_x^1 \frac{u 1_{[x,r]}(u)du}{\sqrt{r^2 - u^2}} \right) f(r)dr.$$

Par le théorème de Fubini on peut intervertir, ce qui donne le résultat demandé.

(c) On en déduit que pour tout intervalle I de $]0,1]$, $P(X \in I) = \int_I \varphi$ et donc que pour tout intervalle $I \subset [0,1]$ on a $P(X \in I) = P_X(I)$.

6. On a montré dans III.5.a que

$$\psi = \frac{1}{2} V_{\theta^{-1}}(A\tilde{f}).$$

Le résultat demandé s'obtient alors en prenant l'image par V_θ des deux membres.

7. On fait agir A sur les deux membres de l'égalité du III.6 :

$$2A\tilde{\psi} = A \circ A\tilde{f} = \pi V \tilde{f},$$

et l'on conclut par le changement de variable $x \mapsto x^2$.

8. Le calcul est tout à fait similaire au précédent : on remarque simplement que $X = 0$ si $H \geqslant R + \epsilon$ et que $X = R$ si $h \leqslant \epsilon$. On peut alors écrire, si $x \in]0,1]$,

$$P(X > x) = P(X > x, H \leqslant \epsilon) + P(X > x, H > \epsilon) = P(R > x)P(H \leqslant \epsilon) + P(X > x, H > \epsilon)$$
$$= (I) + (II).$$

En utilisant l'indépendance de R et H on obtient

$$(I) = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \int_x^1 f(r)dr.$$

Afin de calculer (II) on observe tout d'abord que si $H > \epsilon$ alors X est donné par le rayon d'un cercle intersection de la sphère avec un plan à distance $H - \epsilon$ du centre. On a donc

$$(II) = P(\epsilon < H < \sqrt{R^2 - x^2} + \epsilon) = \frac{1}{1+\epsilon} \int_x^1 (r^2 - x^2) f(r)dr.$$

On conclut alors successivement :

$$(1+\epsilon)\int_x^1 \Phi(u)du = \epsilon \int_x^1 f(r)dr + \int_x^1 \psi(u)du,$$
$$(1+\epsilon)\Phi = \epsilon f + \psi,$$
$$(1+\epsilon)\tilde{\Phi} = \epsilon \tilde{f} + \tilde{\psi},$$
$$(1+\epsilon)\tilde{\Phi} = \epsilon \tilde{f} + \frac{1}{2}A\tilde{f},$$

ce qui constitue le résultat demandé.

4.3.4 Problèmes bien et mal posés

1. ((a)et (b)) : Si le problème $Af = g$ était bien posé on aurait l'existence d'une constante $c > 0$ telle que pour tout $f \in L^1$, $\|Af\| \geqslant c\|f\|$. Mais alors A serait d'image fermée, et donc serait surjectif car il est aussi d'image dense , ce que l'on a vu être faux. Par contre on a vu que pour tout $t > 0$ $tI + A$ est un isomorphisme ; le problème $(tI + A)f = g$ est donc bien posé.
2. (a) On part de l'équation
$$tf_{t,V} + Vf_{t,V} = Vh.$$
On sait que $f_{t,V} \in L^1$, ainsi que h. On a donc $Vf_{t,V}, Vh \in C^0$ et donc a fortiori $f_{t,V} \in C^0$ aussi et donc $y = Vf_{t,V} \in C^1$.
Mais alors , comme $y(1) = 0$, on a $y = -Vy'$ et $f_{t,V} = -y'$, ce qui prouve que Vf_s est solution de
$$y' - \frac{y}{t} = -\frac{Vh}{t}. \tag{4.4}$$
(b) De (4.4)on déduit que
$$f_s = -y' = \frac{Vh}{s} - \frac{1}{s^2}\int_x^1 e^{\frac{x-u}{s}} Vh(u)du.$$
Par une intégration par parties on obtient alors :
$$\begin{aligned} -y' &= \frac{Vh}{s} - \frac{1}{s}\int_x^1 (1 - e^{\frac{x-u}{s}})h(u)du \\ &= \frac{1}{s}\int_x^1 e^{\frac{x-u}{s}} h(u)du = E(h) * \psi_s(u). \end{aligned}$$
3. (a) $\|(sI + V)^{-1}Vh\| = \|h * \psi_s\| \leqslant \|h\|$.
(b) $(sI + V)^{-1}V = I - s(sI + V)^{-1}V$ et donc $\|s(sI + V)^{-1}V = \| = \|I - sI + V)^{-1}V\| \leqslant 2$.
(c) - première méthode : (ψ_s), $s > 0$ est une approximation de l'identité.
- deuxième méthode : On applique le principe de Banach à $T_t = (tI + V)^{-1}V - I$. Cette famille est uniformément bornée par ce que l'on vient de voir. D'autre part soit $D = V(L^1)$: c'est un sous espace dense de L^1 car il contient les fonctions de classe C^1 nulles en 1. Si $h = Vk \in D$ alors
$$\|T_t h\| = \| - t(tI + V)^{-1}Vk\| \leqslant Ct\|k\| \to 0$$
quand $t \to 0$.
4. On intègre la fonction $z \mapsto \frac{z^\alpha}{(z+t^2)(z+x)}$ sur le chemin qui va de ϵ à R le long de l'axe réel prolongé par le cercle de centre 0 et de rayon R parcouru une fois dans le sens trigonométrique, continué par le chemin le long de l'axe réel de R à ϵ et terminé par le cercle de centre 0 et de rayon ϵ parcouru une fois dans le sens des aiguilles d'une montre. En faisant tendre ϵ vers 0 et R vers ∞ on obtient
$$\begin{aligned} \frac{(1 - e^{2i\pi\alpha})}{2i\pi}\int_0^\infty \frac{s^\alpha ds}{(s + t^2)(s + x)} &= \frac{(-t^2)^\alpha}{x - t^2} + \frac{(-x)^\alpha}{t^2 - x} \\ &= e^{i\pi\alpha}\frac{x^\alpha - t^{2\alpha}}{t^2 - x} \end{aligned}$$
d'où le résultat découle.
5. Par la formule du 4),
$$|(tI + \frac{A}{\pi})^{-1}\| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}(s + t^2)}.$$
On fait le changement de variable $s = t^2u$ dans la dernière intégrale :
$$\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}(s + t^2)} = \frac{1}{t}\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}(1 + u)} = C/t.$$

6. Par la question précédente et la formule
$$t(tI+A)^{-1}+(tI+A)^{-1}A=I$$
on voit qu'il existe une constante $C>0$ telle que $\|(tI+A)^{-1}A\|\leqslant C$. Maintenant
$$f_t-h=(tI+A)^{-1}Ah-h=-t(tI+A)^{-1}h$$
et si de plus $h\in \mathrm{Im}A$, soit $h=Ak$, alors
$$\|f_t-h\|\leqslant t\|(tI+A)^{-1}A\|\|k\|\leqslant Ct\|k\|\to 0$$
avec t.
7. On conclut avec le principe de Banach : Soit $T_t=-t(tI+A)^{-1}$ de sorte que $f_t-h=T_th$. On a montré que $\|T_t\|\leqslant C$ et que
$$T_th\to 0$$
si $h\in \mathrm{Im}A$ qui est dense dans $L^1([0,1])$; par le principe de Banach $T_th\to 0$ pour tout $h\in L^1([0,1])$.

4.3.5 Annexes

Annexe 1

Le résultat démontré dans la partie IV tombe en défaut pour $t<0$. Plus précisément soit pour $t>0$, f_t la solution de
$$(A-tI)f_t=g,$$
où $g=Ah$, $h\in L^1$. S'il était vrai que $f_t\to h$ dans L^1 pour tout $h\in L^1$, alors le théorème de Banach-Steinhaus impliquerait qu'il existe une constante $M>0$ telle que
$$\forall t>0,\ \|(A-tI)^{-1}A\|\leqslant M. \tag{4.5}$$
Mais alors il existerait une autre constante $M'>0$ telle que
$$\forall t>0,\ \|(V-tI)^{-1}V\|\leqslant M',$$
comme on le voit en écrivant l'identité
$$(V-tI)^{-1}V=(A-\sqrt{t}I)^{-1}A(A+\sqrt{t}I)^{-1}A.$$
Montrons que l'inégalité (4.5) n'est pas possible : un calcul en tous points analogues à celui fait plus haut montre que
$$f_t(x)=\frac{1}{t}\int_x^1 e^{\frac{u-x}{t}}h(u)du.$$
Considérons alors le cas particulier où h est identiquement égale à 1. Dans ce cas tout est explicite, et en particulier
$$f_t(x)=e^{\frac{1-x}{t}}-1,$$
et $\|f_t\|_1=te^{1/t}-t-1\to\infty$, $t\to 0$. on en déduit que
$$\|(A-tI)^{-1}A\|\to\infty$$
quand $t\to 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite.

Annexe 2

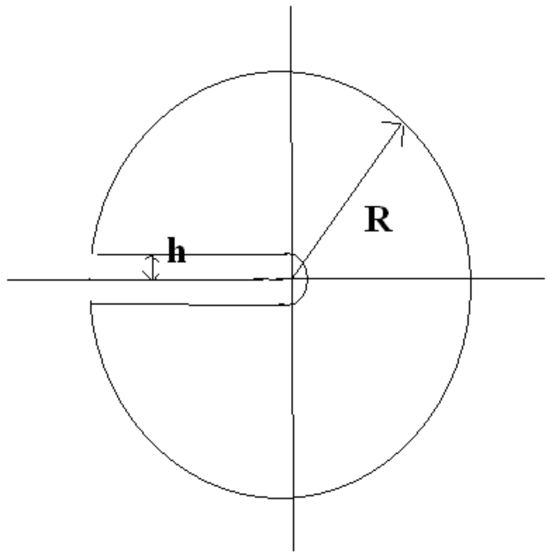
Nous indiquons ici brièvement comment démontrer le résultat admis sur le calcul fonctionnel holomorphe.
Soit $\alpha > 0$, $T = V + \alpha I$, F une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$, et $R > 0$, $0 < h < \alpha$. On peut alors définir

$$f(T) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{h,R}} f(z)(zI - T)^{-1}dz$$

et l'on montre (c'est le calcul fonctionnel holomorphe) que

$$f(T) \circ g(T) = fg(T)$$

si g est une autre fonction holomorphe dans $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$. Dans cet énoncé, le lacet $\gamma_{h,R}$ est donné par la figure suivante :



le résultat provient alors de l'écriture de $f(T)$ avec

$$f(z) = \frac{1}{t + \sqrt{z}}$$

suivi de trois passages à la limite, successivement

$$h \to 0,\ R \to \infty,\ \alpha \to 0.$$

Annexe 3

Dans la partie III l'équation est un peu différente mais le résultat est le même :

$$(tI + A)f_t = (1 + t)Ah.$$

Mais alors

$$f_t = (1 + t)(tI + A)^{-1}Ah$$

qui converge aussi bien vers h lorsque $h \to 0$.

Chapitre 5

Épreuves orales : Algèbre et Géométrie ; Analyse et Probabilités ; Mathématiques pour l'Informatique ; Informatique-Option D

5.1 Organisation des épreuves 2014

Tous les candidats tirent un couple de sujets. Le candidat est libre de choisir le sujet qui lui plait.

À l'issue de la période de préparation qui dure 3 heures pour "Analyse et Probabilités" et 3h30 pour l'épreuve "Algèbre et Géométrie" ou "Mathématiques pour l'Informatique" (cette extension de 30mn est due au temps de préparation de l'épreuve "Agir en fonctionnaire de l'État et de façon éthique et responsable", voir le chapitre 7) durant laquelle le candidat dispose des livres de la bibliothèque de l'Agrégation ou de ses propres ouvrages s'ils ne sont pas imprimés par le candidat lui-même (avec un numéro ISBN et non annotés[1]) mais n'a pas accès à Internet (ni bien-sûr à son téléphone portable ou tout autre objet électronique[2] !), le jury fait procéder à la photocopie des plans préparés par les candidats. Ces derniers sont manuscrits, comportent 3 pages A4 ***au maximum*** et possèdent une marge de 1 cm sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. *Il est conseillé de ne pas utiliser de stylos de couleurs.* Il est en revanche conseillé de soigner la présentation du plan écrit, de mettre des titres, d'encadrer les formules, *etc.* pour qu'il soit le plus lisible possible. En particulier il est vain de vouloir écrire petit dans l'espoir de placer plus de contenu ; on perd en clarté et le jury n'est pas disposé à utiliser une loupe. Les plans peuvent être complétés par une quatrième page consacrée aux figures. Il faut noter clairement sur le plan les développements proposés.

Le candidat *peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve* et pourra utiliser les notes manuscrites produites durant la préparation, pendant la première phase de l'interrogation dite « présentation

1. Les rapports de jury de l'agrégation externe de mathématiques, complets et reliés sont autorisés.
2. Les calculatrices ne sont pas autorisées, ni les clés USB, etc...

du plan ». Notons toutefois que le jury peut restreindre cette utilisation durant la période consacrée au développement, si le plan comporte lui-même trop de détails sur les développements proposés !

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale d'un maximum de 50 minutes environ : une présentation du plan éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions.

Le jury ne cherche pas à déstabiliser le candidat pendant l'épreuve.

5.1.1 Première partie : présentation du plan

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole, **6 minutes maximum**, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de son plan.

Le plan écrit n'est ni une énumération de paragraphes, ni un exposé complet avec développement des démonstrations. Il définit avec précision les notions introduites, donne les *énoncés complets* des résultats fondamentaux, cite des exemples et des applications. La formalisation mathématique doit être soignée et l'utilisation des symboles mathématiques correcte. Le jury conseille vivement aux candidats de soigner tant leurs écrits que leur expression orale. ***Le plan doit être maîtrisé***, c'est à dire que les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours : le jury pourra appliquer ce critère pour évaluer la maîtrise du plan. C'est au candidat de circonscrire son plan, notamment en ce qui concerne les énoncés débordant largement le cadre du programme. Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples.

Il s'agit d'une épreuve orale, il est donc inutile de recopier le plan au tableau, dans la mesure où le jury possède une copie du texte. Toutefois il peut être pertinent d'utiliser le tableau pour écrire l'architecture du plan, les théorèmes importants ou un exemple significatif, voire faire un dessin !

Il est souhaitable que le candidat utilise son temps de parole pour expliquer de façon systématique les articulations principales de son plan. Les détails techniques, s'ils sont clairement écrits dans le plan, pourront ne pas être repris oralement. Le candidat peut faire un bref exposé introductif et commenter utilement ensuite ses résultats principaux, les outils développés, l'organisation d'ensemble et les méthodes utilisées. Il peut être utile de consacrer du temps à un exemple pertinent qui éclaire la problématique de la leçon, à faire usage du tableau pour illustrer ses propos.

Le plan est malheureusement rarement commenté. Le candidat se contente trop souvent d'une présentation linéaire, sans expliquer ou mettre en valeur les articulations du plan, ni faire ressortir les méthodes ou les résultats importants. Parfois le candidat se met à parler extrêmement rapidement, ce qui rend incompréhensible les mathématiques présentées. Si le candidat énonce un théorème particulièrement difficile, il faut qu'il soit *contextualisé* en montrant comment il répond à des problématiques naturelles de la leçon ou en donnant des applications internes ou externes de la théorie dont il est issu.

La présentation orale, l'organisation et la cohérence globale du plan écrit constituent des éléments importants d'appréciation.

Insistons sur le fait que la recopie de plans disponibles sur Internet ou dans des livres spécialisés ne constitue pas un travail suffisant de préparation du concours. L'exposé oral ne peut être maîtrisé s'il ressemble à une récitation. Quelques rares candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon ; les titres des leçons définissent un champ clair qu'il faut traiter entièrement. **Le hors sujet est lourdement sanctionné**.

À la fin de cette présentation, le jury peut éventuellement questionner très brièvement le candidat. On peut aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

5.1.2 Deuxième partie : le développement

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements eu égard au niveau du candidat. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre son niveau intrinsèque et les développements proposés. Un candidat ne sera pas avantagé s'il présente un développement non maîtrisé, mal compris ou exposé trop rapidement. Il faut toutefois veiller à rester au niveau de l'Agrégation ; les développements de niveau d'une classe de Terminale ou d'une première année post-bac ne peuvent constituer une proposition acceptable.

Le jury demande au candidat de présenter *deux développements au moins*. Ceux-ci doivent être clairement mentionnés sur le plan écrit et non pas vaguement évoqués à l'oral. Le candidat doit aussi préciser, **sur son plan écrit**, ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre pour mener à bien son développement. Le candidat dispose de 15mn (maximum) pour mener à bien ce développement. Le jury demande au candidat de bien gérer son tableau, en particulier le candidat doit demander aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Le jury souhaite, dans la mesure du possible, que le candidat efface le moins possible le tableau pendant cette période.

Lors du développement, le jury attend du candidat des explications sur la preuve et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté.

Trop peu de candidats commencent leur développement par une rapide exposition des grandes idées ou des étapes qui le composent. Le jury aimerait avoir une petite explication de la démarche au début du développement. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury !

Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. La récitation d'un développement est lourdement sanctionnée ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'un futur agrégé.

On ne saurait trop conseiller aux candidats d'illustrer leur développement (et éventuellement leur plan) par un ou plusieurs dessins : l'exposé y gagnerait en clarté pour le jury, le candidat pourrait ainsi montrer un souci louable de pédagogie.

Rappelons que le développement doit être en rapport avec le sujet traité, la leçon présentée et le plan écrit. Tout hors sujet est sévèrement sanctionné. L'utilisation d'un résultat non présent dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme, soit-disant admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explication convaincante. Dans le cas d'un développement ambitieux, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury.

Comme mentionné précédemment, le candidat *peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve* et ses notes manuscrites produites durant la préparation, uniquement durant la première phase de l'interrogation dite « présentation du plan », mais il ne pourra les utiliser pendant le développement.

Enfin, même si le jury laisse évoluer le candidat durant son développement, en intervenant le moins possible, il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, interrompre le candidat pour demander des explications. Cette intervention ne donne pas droit à une extension du temps consacré au développement.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'il vient d'exposer.

5.1.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury vérifie systématiquement la maîtrise approfondie du plan présenté. C'est à dire qu'une part importante de la discussion portera sur le plan, ou trouvera sa source dans le plan présenté par le candidat. De manière générale, il faut éviter de dépasser largement son niveau. Pour assimiler les notions il faut, durant l'année de préparation, se demander si on est capable de les mettre en œuvre sur des exemples simples et, pour certains théorèmes, si on a réfléchi à des exemples ou des contre-exemples. Le candidat doit être conscient que, s'il met un énoncé dans son plan, il doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme évidentes auxquelles il doit répondre avec précision, et à des calculs éventuels sur ce point.

Une fois de plus, insistons sur le fait qu'il est essentiel de bien maîtriser ce que l'on propose.

Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon, mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiatement. Le but est plutôt de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être compris comme un échec et le candidat ne doit pas se décourager. *Il doit au contraire rester attentif aux suggestions du jury* ; la qualité du dialogue, les réponses aux questions, l'utilisation du plan écrit et l'écoute dont le candidat fait preuve sont des éléments importants de notation.

Pendant cette discussion le jury veille à laisser un temps raisonnable au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Rappelons que l'objet du concours est de recruter de futurs enseignants, le jury peut donc aussi comme l'indique l'article 8 de l'arrêté du 25 juillet 2014, poser toutes questions utiles pour juger de la capacité des candidats à occuper de tels postes.

5.2 Rapport détaillé sur les épreuves orales

Le jury suggère la lecture des rapports de ces cinq dernières années. Les commentaires précis sur les leçons y restent d'actualité.

Voici quelques remarques concernant certaines leçons de la session 2014, reprenant pour partie les commentaires des années précédentes. Les candidats sont invités à étendre ces commentaires aux leçons non commentées.

Les candidats de l'option D consulteront la liste *ad hoc* des titres (repérés par un numéro unique) reprenant ceux de l'oral des options A,B, C, en algèbre et analyse.

5.2.1 Leçons d'Algèbre et Géométrie

En règle générale, le jury apprécie que les candidat soient capables d'appliquer les résultats fondamentaux de leur leçon à des cas simples. Par exemple il est important de savoir

– justifier qu'une matrice est diagonalisable ou en déterminer un polynôme annulateur ;
– effectuer des manipulations élémentaires sur les éléments appartenant à diverses structures algébriques standards ($\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\mathcal{S}_n$, $\mathbf{F}_q$ etc.) ;
– mettre en œuvre des algorithmes exposés dans le plan (opérations élémentaires sur des systèmes ou des déterminants, réduction de Gauss d'une forme quadratique, etc.).

Les leçons d'algèbre sont de difficultés variables, mais le candidat n'aura jamais à choisir entre deux leçons de niveau difficile. En revanche, le jury comprendra qu'un candidat de niveau modeste ne choisisse pas une leçon de niveau difficile.

Les leçons de géométrie sont souvent délaissées alors que les candidats seront amenés à enseigner la géométrie. Notons de plus que les illustrations des notions algébriques des leçons par des exemples et des applications issus de la géométrie sont les bienvenus, ceci tout particulièrment en théorie des groupe. À ce propos, rappelons qu'un dessin au tableau est souvent apprécié et soulignons que le jury n'est pas vraiment regardant sur les qualités esthétiques du dessin.
Les titres des leçons comportent souvent les mots « exemples » et « applications ». Il faut bien distinguer les deux termes ; un exemple n'est pas en soi une application et inversement. Les leçons d'exemples devraient être construites à partir des connaissances théoriques du candidat et ne pas contenir uniquement de la théorie. Le jury a noté que les notions de quotients échappent souvent au candidat.
La théorie des représentations est apparue il y a quelques années au programme. Elle est naturellement reliée à bon nombre leçons. En dehors des leçons qui la concerne directement les représentations peuvent figurer naturellement dans les leçons 101, 102, 103, 104, 105, 106, 150. Le jury note avec satisfaction une réelle progression des connaissances des candidats autour des représentations et de actions de groupes.

5.2.2 Commentaires sur les leçons d'algèbre et géométrie

Les remarques qui suivent sont spécifiques à chaque leçon et permettent de mieux saisir les attentes du jury.

leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Il faut bien dominer les deux approches de l'action de groupe : l'approche naturelle et l'approche, plus subtile, via le morphisme qui relie le groupe agissant et le groupe des permutations de l'ensemble sur lequel il agit. Des exemples de natures différentes doivent être présentés : actions sur un ensemble fini, sur un espace vectoriel (en particulier les représentations), sur un ensemble de matrices, sur des polynômes. Les exemples issus de la géométrie ne manquent pas (groupes d'isométries d'un solide). Certains candidats décrivent les actions naturelles de $PGL(2, \mathbf{F}_q)$ sur la droite projective qui donnent des injections intéressantes pour $q = 2, 3$ et peuvent plus généralement en petit cardinal donner lieu à des isomorphismes de groupes. Enfin, on pourra noter que l'injection du groupe de permutations dans le groupe linéaire par les matrices de permutations donne lieu à des représentations dont il est facile de déterminer le caractère.

leçon 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Cette leçon est encore abordée de façon élémentaire sans réellement expliquer où et comment les nombres complexes de modules 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques (polynômes cyclotomiques, théorie des représentations, spectre de certaines matrices remarquables).

leçon 103 : Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications

Les candidats parlent de groupe simple et de sous-groupe dérivé ou de groupe quotient sans savoir utiliser ces notions. Entre autres, il faut savoir pourquoi on s'intéresse particulièrement aux groupes simples. La notion de produit semi-direct n'est plus au programme, mais lorsqu'elle est utilisée, il faut savoir la définir proprement et savoir reconnaître des situations simples où de tels produits apparaissent (le groupe diédral D_n par exemple).

On pourra noter que les tables de caractères permettent d'illustrer toutes ces notions.

leçon 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. On peut par exemple étudier les groupes de symétries A_4, S_4, A_5 et relier sur ces exemples géométrie et algèbre, les représentations ayant ici toute leur place. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit être connu.

On attend des candidats de savoir manipuler correctement les éléments de quelques structures usuelles ($\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\mathcal{S}_n$, etc.). Par exemple, proposer un générateur simple de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ voire tous les générateurs, calculer aisément un produit de deux permutations, savoir décomposer une permutation en produit de cycles à support disjoint.
Il est important que la notion d'ordre d'un élément soit mentionnée et comprise dans des cas simples.

leçon 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Il faut relier rigoureusement les notions d'orbites et d'action de groupe. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). Des dessins ou des graphes illustrent de manière commode ce que sont les permutations. Par ailleurs un candidat qui se propose de démontrer que *tout groupe simple d'ordre* 60 *est isomorphe à* A_5 devrait aussi savoir montrer que A_5 est simple.

L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement.

Comme pour toute structure algébrique, il est souhaitable de s'intéresser aux automorphismes du groupe symétrique. Les applications du groupe symétrique ne concernent pas seulement les polyèdres réguliers. Il faut par exemple savoir faire le lien avec les actions de groupe sur un ensemble fini. Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles.

leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathbf{GL}(E)$. Applications.

Cette leçon est souvent présentée comme un catalogue de résultats épars et zoologiques sur $GL(E)$. Il faudrait que les candidats sachent faire correspondre sous-groupes et noyaux ou stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, symplectiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, *etc.*). À quoi peuvent servir des générateurs du groupe $GL(E)$? Qu'apporte la topologie dans cette leçon ? Il est préférable de se poser ces questions avant de les découvrir le jour de l'oral.

Certains candidats affirment que $GL_n(\mathbf{K})$ est dense (respectivement ouvert) dans $\mathfrak{M}_n(\mathbf{K})$. Il est judicieux de préciser les hypothèses nécessaires sur le corps $\mathbf{K}$ ainsi que la topologie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbf{K})$.

Il faut aussi savoir réaliser S_n dans $GL(n, \mathbf{R})$ et faire le lien entre signature et déterminant.

leçon 107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C-espace vectoriel.

Il s'agit d'une leçon où théorie et exemples doivent apparaître. Le candidat doit d'une part savoir dresser une table de caractères pour des petits groupes. Il doit aussi savoir tirer des informations sur le groupe à partir de sa table de caractères, et aussi savoir trouver la table de caractères de certains sous-groupes.

Les développements prouvent souvent qu'un candidat qui sait manier les techniques de base sur les caractères ne sait pas forcément relier ceux-ci aux représentations.

Dans le même ordre d'idée, le lemme de Schur est symptomatique d'une confusion : dans le cas où les deux représentations V et V' sont isomorphes, on voit que les candidats confondent isomorphisme de V dans V' avec endomorphisme de V. Ce qui revient implicitement à identifier V et V', ce que le candidat devrait faire de façon consciente et éclairée.

leçon 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

C'est une leçon qui demande un minimum de culture mathématique. Peu de candidats voient l'utilité des parties génératrices dans l'analyse des morphismes de groupes ou pour montrer la connexité de certains groupes.

leçon 109 : Représentations de groupes finis de petit cardinal.

Il s'agit d'une leçon où le matériel théorique doit figurer pour ensuite laisser place à des exemples. Les représentations peuvent provenir d'actions de groupes sur des ensembles finis, de groupes d'isométries, d'isomorphismes exceptionnels entre groupes de petit cardinal... Inversement, on peut chercher à interpréter des représentations de façon géométrique, mais il faut avoir conscience qu'une table de caractères provient généralement de représentations complexes et non réelles (a priori). Pour prendre un exemple ambitieux, la construction de l'icosaèdre à partir de la table de caractères de $\mathcal{A}_5$ demande des renseignements sur l'indice de Schur (moyenne des caractères sur les carrés des éléments du groupe).

leçon 110 : Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de Fourier discrète. Applications.

Il s'agit d'une nouvelle leçon pour laquelle le jury attend une synthèse de résultats théoriques et des applications détaillées. En particulier on pourra y introduire la transformée de Fourier rapide sur un groupe abélien d'ordre une puissance de 2 ainsi que des applications à la multiplication d'entiers, de polynômes et éventuellement au décodage de codes via la transformée de Hadamard.

leçon 120 : Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

Cette leçon, plus élémentaire, demande toutefois une préparation minutieuse. Tout d'abord n n'est pas forcément un nombre premier. Il serait bon de connaître les sous-groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et les morphismes de groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$

Bien maîtriser le lemme chinois et sa réciproque. Savoir appliquer le lemme chinois à l'étude du groupe des inversibles. Distinguer clairement propriétés de groupes additifs et d'anneaux. Connaître les automorphismes, les nilpotents, les idempotents. Enfin, les candidats sont invités à rendre hommage à Gauss en présentant quelques applications arithmétiques des anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, telles l'étude de quelques équations diophantiennes bien choisies.

leçon 121 : Nombres premiers. Applications.

Il s'agit d'une leçon pouvant être abordée à divers niveaux. Attention au choix des développements, ils doivent être pertinents (l'apparition d'un nombre premier n'est pas suffisant !). La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers est un résultat historique important, qu'il faudrait citer. Sa démonstration n'est bien-sûr pas exigible au niveau de l'Agrégation. Quelques résultats sur la géométrie des corps finis sont les bienvenus.

leçon 122 : Anneaux principaux. Applications.

Les plans sont trop théoriques. Il est possible de présenter des exemples d'anneaux principaux classiques autres que $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ (décimaux, entiers de Gauss ou d'Eisenstein), accompagnés d'une description de leurs irréductibles. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas, il serait bon que les candidats les illustrent. Par exemple, il est étonnant de ne pas voir apparaître la notion de polynôme minimal parmi les applications.

On peut donner des exemples d'anneaux non principaux, mais aussi des exemples d'équations diophantiennes résolues à l'aide d'anneaux principaux. A ce sujet, il sera fondamental de savoir déterminer les unités d'un anneau, et leur rôle au moment de la décomposition en facteurs premiers.

On a pu noter dans cette leçon l'erreur répandue que $1+i$ et $1-i$ sont des irréductibles premiers entre eux dans l'anneau factoriel $\mathbf{Z}[i]$.

leçon 123 : Corps finis. Applications.

Un candidat qui étudie les carrés dans un corps fini doit savoir aussi résoudre les équations de degré 2. Les constructions des corps de petit cardinal doivent avoir été pratiquées. Les injections des divers $\mathbf{F}_q$ doivent être connues.

Le théorème de Wedderburn ne doit pas constituer le seul développement de cette leçon. En revanche, les applications des corps finis (y compris pour $\mathbf{F}_q$ avec q non premier !) ne doivent pas être négligées. Citons par exemple l'étude de polynômes à coefficients entiers.

Le théorème de l'élément primitif, s'il est énoncé, doit pouvoir être utilisé.

leçon 124 : Anneau des séries formelles. Applications.

C'est une leçon qui doit être illustrée par de nombreux exemples et applications, souvent en lien avec les séries génératrices ; combinatoire, calcul des sommes de Newton, relations de récurrence, nombre de partitions, représentations et séries de Molien, *etc.*

A ce propos, on note que les candidats qui choisissent de présenter en développement les séries de Molien ne savent que rarement interpréter ces séries obtenues sur des exemples simples. Ces séries ne font pas que calculer les dimensions de sous-espaces d'invariants, elles suggèrent aussi des choses plus profondes sur la structure de l'algèbre d'invariants.

leçon 125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

Très peu de candidats ont choisi cette leçon. On doit y voir le théorème de la base téléscopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis. Une version dégradée de la théorie de Galois (qui n'est pas au programme) est très naturelle dans cette leçon.

leçon 126 : Exemples d'équations diophantiennes.

Il s'agit d'une leçon nouvelle ou plus exactement d'une renaissance. On attend là les notions de bases servant à aborder les équations de type $ax+by=d$ (identité de Bezout, lemme de Gauss), les systèmes de congruences, avec le lemme des noyaux. A ce sujet, il est important que le candidat connaisse l'image du morphisme du lemme des noyaux lorsque les nombres ne sont pas premiers entre eux.

On attend bien entendu la méthode de descente et l'utilisation de la réduction modulo un nombre premier p.

La leçon peut aussi dériver vers la notion de factorialité, illustrée par des équations de type Mordell, Pell-Fermat, et même Fermat (pour $n=2$, ou pour les nombres premiers de Sophie Germain).

leçon 127 : Droite projective et birapport.

Il s'agit également d'une leçon nouvelle reprenant un titre ancien. Le birapport peut être vu comme un invariant pour l'action du groupe linéaire $\mathrm{GL}(2,\mathbf{K})$ (ou plus finement son quotient projectif $\mathrm{PGL}(2,\mathbf{K})$) sur l'ensemble $\mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ des droites du plan vectoriel $\mathbb{K}^2$.

Lorsque le corps $\mathbf{K}$ est le corps des complexes, il ne faudra pas manquer d'en voir les applications à la cocyclicité, et à l'étude des droites et cercles du plan affine euclidien.

On peut s'aider du birapport, sur des corps finis, afin de construire des isomorphismes classiques entre groupes finis de petit cardinal.

L'ensemble des droites du plan contenant un point fixe est naturellement une droite projective. Cela permet enfin d'identifier une conique ayant au moins un point à une droite projective : c'est l'idée d'une preuve classique du théorème de l'hexagramme de Pascal. Par ailleurs, on pourra remarquer le birapport dans l'expression de la distance hyperbolique sur le demi-plan de Poincaré.

leçon 140 : Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

Le bagage théorique est somme toute assez classique, même si parfois le candidat ne voit pas l'unicité de la décomposition en éléments simples en terme d'indépendance en algèbre linéaire. Ce sont surtout les applications qui sont attendues : séries génératrices (avec la question à la clef : à quelle condition une série formelle est-elle le développement d'une fraction rationnelle), automorphismes de $K(X)$, version algébrique du théorème des résidus, action par homographies.

Le théorème de Luroth n'est pas obligatoire et peut même se révéler un peu dangereux si le candidat n'est pas suffisamment préparé aux questions classiques qui l'attendent.

leçon 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Les applications ne concernent pas que les corps finis. Il existe des corps algébriquement clos de caractéristique nulle autre que $\mathbf{C}$. Un polynôme réductible n'admet pas forcément de racines. Il est instructif de chercher des polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbf{F}_2$. Il faut connaître le théorème de la base téléscopique ainsi que les utilisations artithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes.

leçon 142 : Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

La leçon ne doit pas se concentrer exclusivement sur les aspects formels ni sur les les polynômes symétriques.

Les aspects arithmétiques ne doivent pas être négligés. Il faut savoir montrer l'irréductibilité d'un polynôme à plusieurs indéterminées en travaillant sur un anneau de type $A[X]$, où A est factoriel.

Le théorème fondamental sur la structure de l'algèbre des polynômes symétriques est vrai sur $\mathbf{Z}$. L'algorithme peut être présenté sur un exemple.

Les applications aux quadriques, aux relations racines cœfficients ne doivent pas être négligées. On peut faire agir le groupe $GL(n, \mathbf{R})$ sur les polynômes à n indéterminées de degré inférieur à 2.

leçon 143 : Résultant. Applications.

Le caractère entier du résultant (il se définit sur $\mathbf{Z}$) doit être mis en valeur et appliqué.

La partie application doit montrer la diversité du domaine (par exemple en arithmétique, calcul d'intersection/élimination, calcul différentiel, polynômes annulateurs d'entiers algèbriques).

Il ne faut pas perdre de vue l'application linéaire sous-jacente $(U, V) \mapsto AU + BV$ qui lie le résultant et le PGCD de A et B.

leçon 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

Il s'agit d'une leçon au spectre assez vaste. On peut y traiter de méthodes de résolutions, de théorie des corps (voire théorie de Galois si affinités), de topologie (continuité des racines) ou même de formes quadratiques. Il peut être pertinent d'introduire la notion de polynôme scindé, de citer le théorème de d'Alembert-Gauss et des applications des racines (valeurs propres, *etc.*). On pourra parler des applications de la réduction au calcul d'approximations de racines.

leçon 150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Cette leçon n'a pas souvent été prise, elle demande un certain recul. Les actions ne manquent pas et selon l'action, on pourra dégager d'une part des invariants (rang, matrices échelonnées réduites), d'autre part des algorithmes. On peut aussi, si l'on veut aborder un aspect plus théorique, faire apparaître à travers ces actions quelques décompositions célèbres, ainsi que les adhérences d'orbites, lorsque la topologie s'y prête.

leçon 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

C'est une leçon qui, contrairement aux apparences, est devenue difficile pour les candidats. Nombre d'entre eux n'ont pas été capables de donner des réponses satisfaisantes à des questions élémentaires comme : un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, est-il aussi de dimension finie ?

Il faut bien connaître les théorèmes fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves.

Les diverses caractérisations du rang doivent être connues.

leçon 152 : Déterminant. Exemples et applications.

Il faut que le plan soit cohérent ; si le déterminant n'est défini que sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, il est délicat de définir $\det(A - XI_n)$ avec A une matrice carrée. L'interprétation du déterminant comme volume est essentielle. Beaucoup de candidats commencent la leçon en disant que le sous-espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1, ce qui est fort à propos. Toutefois, il est essentiel de savoir le montrer.

Le jury ne peut se contenter d'un Vandermonde ou d'un déterminant circulant ! Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent trouver leur place dans cette leçon. D'une manière générale on attend pendant le développement l'illustration d'un calcul ou la manipulation de déterminants non triviaux.

Il serait bien que la continuité du déterminant trouve une application, ainsi que son caractère polynomial.

leçon 153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Les polynômes d'un endomorphisme ne sont pas tous nuls ! Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$, connaître sa dimension sans hésiter. Les propriétés globales pourront être étudiées par les meilleurs. Le jury souhaiterait voir certains liens entre réduction et structure de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$. Le candidat peut s'interroger sur les idempotents et le lien avec la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.

Le jury ne souhaite pas que le candidat présente un catalogue de résultats autour de la réduction, mais seulement ce qui a trait aux polynômes d'endomorphismes. Il faut bien préciser que dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme.

L'aspect *applications* est trop souvent négligé. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est souhaitable que les candidats ne fassent pas la confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin rappelons que pour calculer A^k, il n'est pas nécessaire en général de faire la réduction de A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit bien souvent).

leçon 154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Les candidats doivent s'être interrogés sur les propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées de cas sont les bienvenues. La décomposition de Frobenius trouve tout à fait sa place dans la leçon. Notons qu'il a été ajouté la notion de familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des endomorphismes commutant entre eux ou sur la théorie des représentations.

leçon 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Il faut pouvoir donner des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères. Le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable est immédiat une fois que l'on connaît les valeurs propres et ceci sans diagonaliser la matrice, par exemple à l'aide des projecteurs spectraux.

On peut sur le corps des réels et des complexes donner des propriétés topologiques, et sur les corps finis, dénombrer les endomorphismes diagonalisables, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.

Mentionnons que l'affirmation «l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{K})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbf{K})$ » nécessite quelques précisions sur le corps $\mathbf{K}$ et la topologie choisie pour $\mathfrak{M}_n(\mathbf{K})$.

leçon 156 : Exponentielle de matrices. Applications.

C'est une leçon difficile et ce n'est pas une leçon d'analyse. Il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle. Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle dans l'image $\exp(\mathrm{Mat}(2, \mathbf{R}))$? La matrice blocs $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle dans l'image $\exp(\mathrm{Mat}(4, \mathbf{R}))$?

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ doit être connue. Les groupes à un paramètre peuvent trouver leur place dans cette leçon. On peut s'interroger si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $GL(n, \mathbf{R})$. L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve toute sa place dans cette leçon. Si on traite du cas des matrices nilpotentes, on pourra invoquer le calcul sur les développements limités.

Les applications aux équations différentielles doivent être évoquées sans constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un développement.

Les notions d'algèbres de Lie ne sont pas au programme de l'agrégation, on conseille de n'aborder ces sujets qu'à condition d'avoir une certaine solidité. Sans aller si loin, on pourra donner une application de l'exponentielle à la décomposition polaire de certains sous-groupes fermés de GL_n (groupes orthogonaux par exemple).

leçon 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Il est possible de mener une leçon de bon niveau, même sans la décomposition de Jordan à l'aide des noyaux itérés. On doit savoir déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables grâce aux noyaux itérés (ou grâce à la décomposition de Jordan si celle-ci est maîtrisée).

Notons que l'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

leçon 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

C'est une leçon transversale. La notion de signature doit figurer dans la leçon et on ne doit surtout pas se cantonner au cas des matrices définies positives. Curieusement, il est fréquent que le candidat énonce l'existence de la signature d'une matrice symétrique réelle sans en énoncer l'unicité dans sa classe de congruence. On doit faire le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes. La partie réelle et la partie imaginaire d'un produit hermitien définissent des structures sur l'espace vectoriel réel sous-jacent.

leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon : celle-ci permet de créer une correspondance féconde entre un morphisme et son morphisme transposé, un sous-espace et son orthogonal (canonique), les noyaux et les images, les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance.

Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algèbrique, topologique, analytique, *etc.* Il faut que les développements proposés soient en lien direct, comme toujours, avec la leçon ; proposer la trigonalisation simultanée est un peu osé ! Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction réelle est une forme linéaire semble incontournable.

leçon 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Les candidats doivent bien prendre conscience que le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Par exemple, des développements comme le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford n'ont rien à faire ici. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur.

leçon 161 : Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

La classification des isométries en dimension 2 est exigible. En dimension 3, les rotations et les liens avec la réduction. On peut penser aux applications aux isométries laissant stables certaines figures en dimension 2 et 3.

leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Le jury n'attend pas *une version à l'ancienne* articulée autour du théorème de Rouché-Fontené, qui n'est pas d'un grand intérêt dans sa version traditionnellement exposée.

La leçon doit impérativement présenter la notion de système échelonné, avec une définition précise et correcte et situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire (sans oublier la dualité !). Par exemple les relations de dépendances linéaires sur les colonnes d'une matrice échelonnée sont claires et permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $GL(n, \mathbf{K})$ sur $M_n(\mathbf{K})$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$. Le candidat doit pouvoir écrire un système d'équations de l'espace vectoriel engendré par les colonnes.

Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt pratique (algorithmique) des méthodes présentées doit être expliqué y compris sur des exemples simples où l'on attend parfois une résolution explicite.

leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbf{R}$. Il faut savoir que les formes quadratiques existent sur le corps des complexes et sur les corps finis et savoir les classifier. On ne doit pas négliger l'interprétation géométrique des notions introduites (lien entre coniques, formes quadratiques, cônes isotropes) ou les aspects élémentaires (par exemple le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$). On ne peut se limiter à des considérations élémentaires d'algèbre linéaire. Les formes quadratiques ne sont pas toutes non dégénérées (la notion de quotient est utile pour s'y ramener).

L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être pratiqué sur une forme quadratique de $\mathbf{R}^3$. Le lien avec la signature doit être clairement énoncé. Malheureusement la notion d'isotropie est mal maîtrisée par les candidats, y compris les meilleurs d'entre eux. Le cône isotrope est un aspect important de cette leçon, qu'il faut rattacher à la géométrie différentielle. Il est important d'illustrer cette leçon d'exemples naturels.

leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

La preuve de la loi d'inertie de Silvester doit être connue ainsi que l'orthogonalisation simultanée. Le candidat doit avoir compris la signification géométrique de ces deux entiers composant la signature d'une forme quadratique réelle ainsi que leur caractère classifiant. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante.

Pour les candidats de bon niveau, l'indicatrice de Schur-Frobenius, sur la possibilité de réaliser une représentation donnée sur le corps des réels, permet un belle incursion de la théorie des représentations dans cette leçon.

leçon 180 : Coniques. Applications.

La définition des coniques affines non dégénérées doit être connue. Les propriétés classiques des coniques doivent être présentées. Bien distinguer les notions affines, métriques ou projectives, la classification des coniques étant sensiblement différente selon le cas.

On peut se situer sur un autre corps que celui des réels. Le lien entre classification des coniques et classification des formes quadratiques peut être établi à des fins utiles.

leçon 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

On attend des candidats qu'ils parlent de coordonnées barycentriques et les utilisent par exemple dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables). Il est judicieux de parler d'enveloppe convexe, de points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent.

leçon 182 : Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies

Cette leçon ne saurait rester au niveau de la Terminale. Une étude de l'exponentielle complexe et des homographies de la sphère de Riemann est tout à fait appropriée. La réalisation du groupe SU_2 dans le corps des quaternions et ses applications peuvent trouver sa place dans la leçon.

leçon 183 : Utilisation des groupes en géométrie.

C'est une leçon transversale et difficile, qui peut aborder des aspects variés selon les structures algébriques présentes. D'une part un groupe de transformations permet de ramener un problème de géométrie à un problème plus simple. D'autre part, les actions de groupes sur la géométrie permettent de dégager des invariants essentiels (angle, birapport). On retrouvera encore avec bonheur les groupes d'isométries d'un solide.

leçon 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Il faut dans un premier temps dégager clairement les méthodes et les illustrer d'exemples significatifs. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. Le jury s'attend à ce que les candidats sachent calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités ! L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien fécond avec l'algèbre linéaire.

5.2.3 Leçons d'Analyse et Probabilités

Probabilités et Analyse complexe

Le jury rappelle que le chapitre des probabilités a vocation à se développer dans l'enseignement secondaire et post-baccalauréat. Les candidats à un futur poste d'enseignant de mathématiques doivent maîtriser les notions centrales de ces thématiques. C'est pourquoi le programme 2014 fait apparaître un chapitre 10 intitulé **Probabilités**, séparé de la théorie de l'intégration, mais qui reprend essentiellement les contenus des programmes précédents.

Il est construit autour de quelques notions de base sur l'indépendance, les lois classiques, les moments, les transformées et les convergences. Ces thèmes sont évidemment liés.

Le jury a observé que le nombre de candidats qui ont choisi les leçons de probabilité augmente ; le jury se félicite de cette évolution, et rappelle aux candidats que les leçons de probabilités ne recèlent pas de piège ou de danger particulier.

Il y avait six leçons de probabilités proposées à cette session 2014. Elles pouvaient toutes se traiter à un niveau raisonnable et mettre en jeu des outils qui sont au cœur du programme d'analyse de l'agrégation.

De nombreux développements tournés vers la théorie des probabilités sont possibles. Notons par exemple les différentes versions de la loi des grands nombres ou du théorème de la limite centrale. On peut également penser à des inégalités comme celles des grandes déviations, de Hoeffding, ou bien des preuves de théorèmes importants comme ceux de Borel-Cantelli, de Glivenko-Cantelli ou des théorèmes de convergence de martingales.

Enfin, les probabilités interagissent de manière significative avec de nombreuses branches de l'analyse (et plus largement des mathématiques). Le travail sur les leçons précédentes devrait permettre aux candidats d'affermir leurs réflexes en matière de théorie de la mesure et de probabilités, mais aussi d'aborder sous un angle nouveau d'autres items du programme. C'est ainsi que le problème de la détermination d'une variable par ses moments est lié à la théorie des fonctions holomorphes, que l'étude des fonctions caractéristiques prolonge et approfondit celle de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$, que la convergence de variables aléatoires permet de retrouver des résultats classiques de l'analyse tels que l'approximation uniforme des fonctions continues par les polynômes de Bernstein.

Rassurons les candidats futurs, il n'est pas question d'exiger d'eux qu'ils connaissent tout cela, mais le rapport vise aussi à donner aux candidats et aux préparateurs des idées de développement de niveau varié.

Le jury s'inquiète, depuis un certain temps, du recul de la connaissance par les candidats de l'analyse complexe, dont il n'est pas nécessaire de souligner l'importance et les très nombreuses applications en mathématiques fondamentales ou appliquées. Il est patent que les connaissances sur les fonctions holomorphes, leur comportement au bord du domaine de convergence, les espaces fonctionnels qu'elles constituent, les concepts topologiques qu'elles mettent en œuvre (familles normales, simple connexité) sont globalement en recul. Les candidats en sont sans doute conscients puisqu'ils évitent souvent les leçons correspondantes. L'analyse complexe est cependant appelée à conserver dans le programme de l'agrégation la place centrale que lui impose son importance scientifique. **Les candidats sont invités à en prendre acte et à se préparer en conséquence.**

Commentaires généraux

Le jury apprécie que les candidats soient en mesure d'appliquer les résultats élémentaires mais fondamentaux de leur leçon, par exemple : justifier une permutation limite-intégrale ; résoudre une équation différentielle simple ; étudier la convergence d'une suite ou d'une série (numérique, de fonctions, de variables aléatoires).

De nombreux candidats ont présenté au jury des plans raisonnables, suivis d'un développement correctement mené, car soigneusement appris et révisé pendant les trois heures de préparation. Cependant, la première question du jury a souvent révélé une incompréhension réelle du sujet traité. Rappelons aux candidats qu'ils peuvent s'attendre, après leur plan, à quelques questions portant sur un cas particulièrement simple d'application du théorème présenté, ou sur des situations proches qui soulignent l'utilité des hypothèses ou la portée des arguments de la preuve qu'ils viennent de développer. Si ces questions restent sans réponse, le jury sera conduit à la conclusion que le candidat n'a fait que restituer mécaniquement quelques pages apprises à la va-vite et sa note s'en ressentira. Il est attendu des candidats qu'ils aient compris les notions mathématiques au programme de l'agrégation. Les candidats ne sont pas tenus de savoir établir complètement chacun des résultats de leur plan, en revanche il leur est demandé d'avoir une idée raisonnable des arguments employés dans les preuves. Par exemple : mentionner le théorème de Cauchy-Lipschitz dans la leçon "Théorèmes du point fixe" suppose de savoir transformer un problème de Cauchy en équation à point fixe !

Il est légitime qu'un candidat ignore certains résultats, le jury ne prétend pas à l'omniscience et ne l'attend pas des candidats. Cependant, un candidat qui se montre capable de proposer des pistes de solutions aux questions qu'on lui pose impressionne très favorablement le jury. **Il faut donc apprendre, mais surtout comprendre**.

Il est également souhaitable que les candidats gardent à l'esprit la nature des objets qu'ils sont en train de manipuler : quantités numériques, variables muettes, indéterminées, inconnues, paramètres, vecteurs, fonctions, opérateurs.... Cela est assez sensible en analyse où par exemple, la question "à quel espace appartiennent les deux termes de votre équation ?" peut se révéler embarrassante. Le calcul différentiel est particulièrement délicat à cet égard, et on recommande aux candidats qui préparent l'agrégation de s'astreindre à la rigueur dans les leçons correspondantes.

Le jury observe enfin que d'assez nombreux candidats, dont le niveau est convenable et qui ont soigneusement préparé l'agrégation, ont répété une petite quinzaine de développements choisis pour leur caractère bien classique et répartis de façon à couvrir une bonne moitié des leçons possibles. Mais il faut souligner qu'un développement pertinent mais un peu original est bien récompensé. Les candidats sont donc invités à sortir des sentiers battus : une petite prise de risque sera reconnue et appréciée.

En dépit des intitulés, beaucoup de leçons manquent d'exemples et se cantonnent pour l'essentiel à des généralités théoriques. Ainsi la leçon relative aux espaces vectoriels normés doit comporter quelques calculs de normes subordonnées, la leçon sur les séries doit être illustrée par des exemples d'études de convergence et d'évaluations asymptotiques.

Enfin, le jury apprécierait que les candidats fassent plus de dessins !

5.2.4 Commentaires sur les leçons d'Analyse et Probabilités

Voici quelques points plus spécifiques concernant les leçons :

201-Espaces de fonctions ; exemples et applications.

C'est une leçon riche où le candidat devra choisir soigneusement le niveau auquel il souhaite se placer. Les espaces de fonctions continues sur un compact et les espaces de fonctions holomorphes offrent des possibilités de leçons de qualité avec des résultats intéressants. Il est regrettable de voir des candidats, qui auraient eu intérêt à se concentrer sur les bases de la convergence uniforme, proposer en développement le théorème de Riesz-Fisher dont il ne maîtrise visiblement pas la démonstration. Pour les candidats solides, les espaces L^p offrent de belles possibilités.

Signalons que des candidats proposent assez régulièrement une version incorrecte du théorème de Müntz pour les fonctions continues. La version correcte dans ce cadre est

$$\overline{\mathrm{Vect}\{1, \mathrm{x}^{\lambda_{\mathrm{n}}}\}} = \mathcal{C}([0,1];\mathbf{R}) \iff \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty.$$

Des candidats aguerris peuvent développer la construction et les propriétés de l'espace de Sobolev $H_0^1(]0,1[)$, ses propriétés d'injection dans les fonctions continues, et évoquer le rôle de cet espace dans l'étude de problèmes aux limites elliptiques en une dimension. Ce développement conduit naturellement à une illustration de la théorie spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints.

202 : Exemples de parties denses et applications.

Cette leçon permet d'explorer les questions d'approximations de fonctions par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Au delà des exemples classiques, les candidats plus ambitieux peuvent aller jusqu'à la résolution d'équations aux dérivées partielles (ondes, chaleur, Schrödinger) par séries de Fourier.

203 : Utilisation de la notion de compacité.

Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale (confusion générale entre *utilisation de la notion compacité* et *notion de compacité*), sans proposer des exemples significatifs d'utilisation (Stone-Weierstrass, point fixe, voire étude qualitative d'équations différentielles, *etc.*). La leçon peut être aussi avantageusement illustrée par des exemples d'opérateurs à noyau et l'analyse de leur compacité par le théorème d'Ascoli, par exemple. Le rôle de la compacité pour des problèmes d'existence d'extrema mériterait d'être davantage étudié (lien avec la coercivité en dimension finie).

Pour les candidats solides, les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. Les opérateurs autoadjoint compacts sur l'espace de Hilbert relèvent également de cette leçon, et on pourra développer par exemple leurs propriétés spectrales.

204 : Connexité. Exemples et applications.

Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité ; par exemple, diverses démonstrations du théorème de d'Alembert-Gauss. On distinguera bien connexité et connexité par arcs, mais il est pertinent de présenter des situations où ces deux notions coïncident.

205 : Espaces complets. Exemples et applications.

Les candidats devraient faire apparaître que l'un des intérêts essentiel de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence en dimension infinie, en particulier dans les espaces de fonctions. Rappelons que l'on attend des candidats une bonne maîtrise de la convergence uniforme. Le théorème de Cauchy-Lipschitz, mal maîtrisé par beaucoup de candidats, est un point important de cette leçon.

Les espaces L^p sont des exemples pertinents qui ne sont pas sans danger pour des candidats aux connaissances fragiles.

Le théorème de Baire trouve naturellement sa place dans cette leçon, mais il faut l'accompagner d'applications. Rappelons que celles-ci ne se limitent pas aux théorèmes de Banach-Steinhaus et du graphe fermé, mais qu'on peut évoquer au niveau de l'agrégation l'existence de divers objets : fonctions continues nulle part dérivables, points de continuité pour les limites simples de suites de fonctions continues, vecteurs à orbite dense pour certains opérateurs linéaires, etc. Les candidats prendront toutefois garde à ne pas présenter des applications de ce théorème au dessus de leur force.

206 : Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

Les applications aux équations différentielles sont importantes. Répétons que la maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz est attendue. Il faut préparer des contre-exemples pour illustrer la nécessité des hypothèses.

Pour l'analyse de convergence des méthodes de point fixe, les candidats ne font pas suffisamment le lien entre le caractère localement contractant de l'opérateur itéré et la valeur de la différentielle au point fixe. La méthode de Newton, interprétée comme une méthode de point fixe, fournit un exemple où cette différentielle est nulle, la vitesse de convergence étant alors de type quadratique. L'étude de méthodes itératives de résolution de systèmes linéraires conduit à relier ce caractère contractant à la notion de rayon spectral.

Il est envisageable d'admettre le théorème de point fixe de Brouwer et d'en développer quelques conséquences comme le théorème de Perron-Froebenius.

207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Les candidats exploitent rarement toutes les potentialités de cette leçon très riche.

Le jury se réjouirait aussi que les candidats abordent les notions de solution maximale pour les équations différentielles ordinaires et maîtrisent le théorème de sortie des compacts.

Le prolongement analytique relève bien-sûr de cette leçon ainsi que le prolongement de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur un segment en fonctions de la même classe, le théorème de Tietze sur l'extension des fonctions continues définies sur un sous-ensemble fermé d'un espace métrique, la transformation de Fourier sur L^2 et l'extension des fonctions Lipschitziennes définies sur un sous-ensemble (pas nécesairement dense) d'un espace métrique.

En ce qui concerne le théorème d'Hahn-Banach, le candidat n'en donnera la version en dimension infinie que s'il peut s'aventurer sans dommage sur le terrain très souvent mal maîtrisé du lemme de Zorn. Il vaut mieux disposer d'applications pertinentes autre que des résutats classiques abstraits sur les duaux topologiques.

208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être donnée. Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux.

Une telle leçon doit bien-sûr contenir beaucoup d'illustrations et d'exemples. Lors du choix de ceux-ci (le jury n'attend pas une liste encyclopédique), le candidat veillera à ne pas mentionner des exemples sans avoir aucune idée de leur étude et à ne pas se lancer dans des développements trop sophistiqués.

L'analyse des constantes de stabilité pour l'interpolation de Lagrange fournit un exemple non trivial peu présenté.

Pour des candidats aguerris, la formulation variationnelle de problèmes elliptiques mono-dimensionnels peut donner lieu à des approfondissements intéressants.

209 : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

Cette leçon comporte un certain nombre de classiques comme le théorème de Stone-Weierstrass. Comme la leçon 202, elle permet d'explorer aux candidats plus ambitieux d'aller jusqu'à la résolution d'équations aux dérivées partielles (ondes, chaleur, Schrödinger) par séries de Fourier.

213 : Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne. De plus, la formule de la projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie d'un espace de Hilbert doit absolument être connue. Il faut connaître quelques critères simples pour qu'une famille orthogonale forme une base hilbertienne et illustrer la leçon par des exemples de bases hilbertiennes (polynômes orthogonaux, séries de Fourier, *etc.*). Le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de Hilbert H est régulièrement mentionné. Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules $x = \sum\limits_{n\geqslant 0}(x|e_n)e_n$ et $||x||^2 = \sum\limits_{n\geqslant 0}(x|e_n)^2$ en précisant les hypothèses sur la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et en justifiant la convergence.

La notion d'adjoint d'un opérateur continu peut illustrer agréablement cette leçon.

Pour des candidats solides, le programme permet d'aborder la résolution, et l'approximation, de problèmes aux limites en dimension 1 par des arguments exploitant la formulation variationnelle de ces équations. Plus généralement, l'optimisation de fonctionnelles convexes sur les espaces de Hilbert devrait être plus souvent explorée.

Enfin, pour les plus valeureux, le théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints compacts peut être abordé.

214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

Il s'agit d'une belle leçon qui exige une bonne maîtrise du calcul différentiel. Même si le candidat ne propose pas ces thèmes en développement, on est en droit d'attendre de lui des idées de démonstration de ces deux théorèmes fondamentaux. On attend des applications en géométrie différentielle (notamment dans la formulation des multiplicateurs de Lagrange). Rappelons que les sous-variétés sont au programme.

215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

Cette leçon requiert une bonne maîtrise de la notion de différentielle première et de son lien avec les dérivés partielles. Le théorème de différentiation composée doit être connu et pouvoir être appliqué dans des cas simples comme le calcul de la différentielle de l'application $x \mapsto \|x\|^2$ pour la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^n$.

La notion de différentielle seconde est attendue au moins pour les fonctions de classe C^2 ainsi que les applications classiques quant à l'existence d'extrema locaux.

217 : Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Exemples.

Cette leçon n'a pas eu beaucoup de succès, c'est bien dommage. Elle ne saurait être réduite à un cours de géométrie différentielle abstraite ; ce serait un contresens. Le jury attend une leçon concrète, montrant une compréhension géométrique locale. Aucune notion globale n'est exigible, ni de notion de variété abstraite. Le candidat doit pouvoir être capable de donner plusieurs représentations locales (paramétriques, équations, *etc.*) et d'illustrer la notion d'espace tangent sur des exemples classiques. Le jury invite les candidats à réfléchir à la pertinence de l'introduction de la notion de sous-variétés.

Le théorème des extremas liés devient assez transparent lorsqu'on le traite par les sous-variétés. Les groupes classiques donnent des exemples utiles de sous-variétés.

218 : Applications des formules de Taylor.

Il faut connaître les formules de Taylor des polynômes et certains développements très classiques. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Le jury s'inquiète des trop nombreux candidats qui ne savent pas expliquer clairement ce que signifient les notations o ou O qu'ils utilisent.

Il y a de très nombreuses applications en géométrie et probabilités (le théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités $||f^{(k)}|| \leqslant 2^{k(n-k)/2}||f||^{1-k/n}||f^{(n)}||^{k/n}$ (lorsque f et sa dérivée n-ème sont bornées). On soignera particulièrement le choix des développements.

219- Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Cette leçon a changé de titre. Il faut bien faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum) et globales (existence par compacité, par exemple). Dans le cas important des fonctions convexes, un minimum local est également global. Les applications de la minimisation des fonctions convexes sont nombreuses et elles peuvent illustrer cette leçon.

L'étude des algorithmes de recherche d'extremas y a maintenant toute sa place : méthode de gradient, preuve de la convergence de la méthode de gradient à pas optimal, etc. Le cas particulier des fonctionnelles sur $\mathbf{R}^n$ de la forme $\frac{1}{2}(Ax|x)-(b|x)$, où A est une matrice symétrique définie positive, devrait être totalement maîtrisé. Les candidats devraient aussi être amenés à évoquer les problèmes de type moindres carrés et les équations normales qui y sont attachés. Enfin, les problèmes de minimisation sous contrainte amènent à faire le lien avec les extrema liés, la notion de multiplicateur de Lagrange et, là encore des algorithmes peuvent être présentés et analysés.

220 : Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études des solutions en dimension 1 et 2.

C'est l'occasion de rappeler une nouvelle fois que le jury s'alarme des nombreux défauts de maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz. La notion même de solution maximale d'un problème de Cauchy est trop souvent mal comprise. Il est regrettable de voir des candidats ne connaître qu'un énoncé pour les fonctions globalement lipschitziennes ou plus grave, mélanger les conditions sur la variables de temps et d'espace. La notion de solution maximale et le théorème de sorties de tout compact sont nécessaires.

Le lemme de Gronwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est curieusement rarement énoncé. L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en œuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées.

Pour les équations autonomes, la notion de point d'équilibre permet des illustrations de bon goût comme par exemple les petites oscillations du pendule. Trop peu de candidats pensent à tracer et discuter des portraits de phase.

Enfin, il n'est pas malvenu d'évoquer les problèmatiques de l'approximation numérique dans cette leçon par exemple autour de la notion de problèmes raides et de la conception de schémas implicites pour autant que la candidat ait une matrîse convenable de ces questions.

221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

On attend d'un candidat qu'il sache déterminer rigoureusement la dimension de l'espace vectoriel des solutions (dans le cas de la dimension finie bien-sûr)

Le cas des systèmes à cœfficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. L'utilisation des exponentielles de matrices doit pouvoir s'expliquer. Dans le cas général, certains candidats évoquent les généralisations de l'exponentielle (résolvante) via les intégrales itérées. Les problèmatiques de stabilité des solutions et le lien avec l'analyse spectrale devrait être exploitées.

222 : Exemple d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Cette nouvelle leçon peut être abordée en faisant appel à des techniques variées et de nombreux développements pertinents peuvent être construits en exploitant judicieusement les éléments les plus classiques du programme. Les techniques d'équations différentielles s'expriment par exemple pour traiter $\lambda u - u''$ avec des conditions de Dirichlet en $x = 0$, $x = 1$ ou pour analyser l'équation de transport par la méthode des caractéristiques.

Les séries de Fourier trouvent dans cette leçon une mise en pratique toute désignée pour résoudre l'équation de la chaleur, de Schrödinger ou des ondes dans le contexte des fonctions périodiques. La transformée de Fourier permet ceci dans le cadre des fonctions sur $\mathbf{R}^d$.

Le point de vue de l'approximation numérique donne lieu à des développements originaux, notamment autour de la matrice du laplacien et de l'analyse de convergence de la méthode des différences finies.

Des développements plus sophistiqués se placeront sur le terrain de l'analyse hilbertienne avec le théorème de Lax-Milgram, l'espace de Sobolev $H_0^1([0, 1])$, jusqu'à la décomposition spectrale des opérateurs compacts, ou encore sur celui des distributions avec l'étude de solutions élémentaires d'équations elliptiques.

226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applcations.

Le jury attend d'autres exemples que la traditionnelle suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Les suites homographiques réelles ou complexes fournissent des exemples intéressants, rarement évoqués.

Cette leçon doit être l'occasion d'évoquer les problématiques de convergence d'algorithmes d'approximation de solutions de problèmes linéaires et non linéaires : dichotomie, méthode de Newton, algorithme du gradient, méthode de la puissance, méthodes itératives de résolution de système linéaire, schéma d'Euler . . . .

228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Un plan découpé en deux parties (I : Continuité, II : Dérivabilité) n'est pas le mieux adapté. Les théorèmes de base doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La dérivabilité presque partout des fonctions Lipschitziennes relève de cette leçon. Enfin les applications du théorème d'Ascoli (par exemple les opérateurs intégraux à noyau continu, le théorème de Peano, *etc*), sont les bienvenues.

229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Les candidats sont invités à réfléchir à l'incidence de ces notions en théorie des probabilités. La dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat important. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs, même si ces dessins ne peuvent remplacer un calcul. On notera que la monotonie concerne (à ce niveau) les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, qui fournissent de beaux exemples d'utilisation. L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon.

Pour les candidats aguerris, la dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité et les candidats bien préparés peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.

230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être véritablement hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel du plan. Le thème central de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, etc...) et leurs applications diverses, comme par exemple des résultats d'irrationalité, voire de transcendance. Enfin on rappelle que la transformation d'Abel trouve toute sa place dans cette leçon.

232 : Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

Trop de candidats se limitent au simple cas où X est une variable scalaire. Il serait bon d'envisager les extensions des méthodes classiques dans le cas vectoriel. Au delà de la méthode de Newton, d'intéressants développements peuvent s'intéresser à la résolution de systèmes linéaires, notamment par des méthodes itératives.

233 : Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

Cette leçon puise une bonne part de son contenu dans le programme complémentaire de l'oral, commun aux différentes options. Les notions de norme matricielle et de rayon spectral sont bien sûr centrales pour ce sujet où le rôle du conditionnement dans l'étude de sensibilité des solutions de systèmes linéaires doit être bien identifié. L'analyse de convergence des méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, en identifiant leurs avantages par rapport aux méthodes directes, trouve naturellement sa place dans cette leçon, tout comme l'étude d'algorithmes de recherche déléments propres, avec la méthode de la puissance (ou la méthode QR) et des applications à des matrices vérifiant les hypothèses des théorèmes de Perron-Frobenius. Le cas particulier des matrices symétriques définies positives doit amener à faire le lien avec les problèmes de minimisation et les méthodes de gradient. On notera d'ailleurs que de tels développements peuvent aussi être exploités avec bonheur dans la leçon 226.

Les techniques d'analyse permettent aussi l'investigation des propriétés spectrales de matrices et la localisation de valeurs propres de matrices (théorème de Gershgörin, suites de Sturm). Le jury encourage les candidats à illustrer leur propos d'exemples pertinents issus de la théorie de l'interpolation ou de la résolution approchée de problèmes aux limites, incluant l'analyse de stabilité de méthodes numériques.

234 : Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Le jury a apprécié les candidats sachant montrer qu'avec une mesure finie $L^2 \subset L^1$ (ou même $L^p \subset L^q$ si $p \geqslant q$). Il est important de pouvoir justifier l'existence de produits de convolution (exemple $L^1 \star L^1$). Par ailleurs, les espaces associés à la mesure de décompte sur $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{Z}$ fournissent des exemples pertinents non triviaux.

239 : Fonctions définies par une intégrales dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Cette leçon doit être enrichie par des études et méthodes asymptotiques et les transformations classiques (Fourier, Laplace, *etc.*).

240 : Produit de convolution, Transformation de Fourier. Applications.

Cette leçon ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de Fourier. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soigneuse des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. Le lien régularité de la fonction et décroissance de sa transformé de Fourier doit être fait même sous des hypothèses qui ne sont pas minimales.

La formule d'inversion de Fourier pour une fonction L^1 dont la transformée de Fourier est aussi L^1 ainsi que les inégalités de Young sont attendues ainsi que l'extension de la transformée de Fourier à l'espace L^2 par Fourier-Plancherel. Des exemples explicites de calcul de transformations de Fourier paraissent nécessaires.

Les candidats solides peuvent aborder ici la résolution de l'équation de la chaleur, de Schrödinger pour des fonctions assez régulières, ou plus délicats la détermination des solutions élémentaires du Laplacien ou de l'opérateur $k^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$.

La transformation de Fourier des distributions tempérées ainsi que la convolution dans le cadre des distributions tempérées trouve sa place ici mais est réservé aux candidats aguerris. On peut aussi considérer l'extension de la transformée de Fourier à la variable complexe, riche d'applications par exemple dans la direction du théorème de Paley-Wiener.

243 : Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Il est regrettable de voir beaucoup de candidats qui maîtrisent raisonnablement les classiques du comportement au bord du disque de convergence traiter cette leçon en faisant l'impasse sur la variable complexe. C'est se priver de beaux exemples d'applications ainsi que du théorème de composition, pénible à faire dans le cadre purement analytique et d'ailleurs très peu abordé.

245 : Fonctions holomorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.

Le titre a changé. Les conditions de Cauchy-Riemann doivent être parfaitement connues et l'interprétation de la différentielle en tant que similitude directe doit être comprise. La notation $\int_\gamma f(z)dz$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. Par ailleurs, même si cela ne constitue pas le cœur de la leçon, il faut connaître la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète) !

246 : Série de Fourier. Exemples et applications.

Les différents modes de convergence (L^2, Fejer, Dirichlet *etc*...) doivent être connus. Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Dans le cas d'une fonction continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet.

Il est souhaitable que cette leçon ne se réduise pas à un cours abstrait sur les cœfficients de Fourier. La résolution des équations de la chaleur, de Schrödinger et des ondes dans le cadre de fonctions assez régulières peuvent illustrer de manière pertinente cette leçon.

249 : Suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

La notion d'indépendance ainsi que les théorèmes de convergence (loi des grands nombres et théorème limite central) doivent être rappelés.

Il peut être intéressant de donner une construction explicite d'une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

Certains candidats plus aguerris pourront s'intéresser au comportement asymptotique de marches aléatoires (en utilisant par exemple le lemme de Borel-Cantelli), ou donner des inégalités de grandes déviations (comme l'inégalité de Hoeffding).

254 : Espaces de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et distributions tempérées. Transformation de Fourier.

Rappelons une fois de plus que les attentes du jury sur ces leçons restent modestes, et se placent au niveau de ce qu'un cours de M1 standard sur le sujet peut contenir. Aucune subtilité topologique portant sur l'espace des distributions tempérées n'est attendue. Par contre, on attend du candidat qu'il sache faire le lien entre décroissance de la transformée de Fourier et régularité de la fonction. Le fait que la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ dans lui même avec de bonnes estimations des semi normes doit être compris et la formule d'inversion de Fourier maîtrisée dans ce cadre.

Le passage à $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ repose sur l'idée dualité qui est le cœur de cette leçon. Des exemples de calcul de transformée de Fourier peuvent être données, classiques comme la gaussienne ou $(1+x^2)^{-1}$ et d'autres liées à la théorie des distributions comme la détermination de la transformée de Fourier d'une constante.

Les candidats ayant une bonne connaissance du sujet peuvent par exemple déterminer la transformée de Fourier de la valeur principale, la solution fondamentale du laplacien, voire résoudre l'équation de la chaleur ou de Schrödinger.

255 : Espaces de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, distributions tempérées. Dérivées au sens des distributions.

Ici aussi, les attentes du jury sur ces leçons restent modestes, et se placent au niveau de ce qu'un cours de M1 standard sur le sujet peut contenir. Aucune subtilité topologique portant sur l'espace des distributions tempérées n'est attendue.

Le passage à $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ repose sur l'idée dualité qui est le cœur de cette leçon. La détermination de la dérivée de $\log|x|$, de la dérivée seconde fournit un exemple pertinent tout comme la formule des sauts.

260 : Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

Le jury attend des candidats qu'ils donnent la définition des moments centrés, qu'ils rappellent les implications d'existence de moments. Les inégalités classiques (de Markov, de Bienaymé-Chebichev, de Jensen et de Cauchy-Schwarz) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (loi des grands nombres et théorème limite central).

Le comportement des moyennes de Cesàro pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées n'admettant pas d'espérance pourra être étudié.

La notion de fonction génératrice des moments pourra être présentée.

261 : Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

Le jury attend l'énoncé de théorème de Lévy et son utilisation dans la démonstration du théorème limite central.

Les candidats pourront présenter l'utilisation de la fonction caractéristique pour le calcul de lois de sommes de variables aléatoires indépendantes et faire le lien entre la régularité de la fonction caractéristique et l'existence de moments.

Enfin la transformée de Laplace pourra être utilisée pour établir des inégalités de grandes déviations.

262 : Mode de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

Les implications entre les divers modes de convergence, ainsi que les réciproques partielles doivent être connus. Des contre-exemples aux réciproques sont attendus par le jury.

Les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème limite central) doivent être énoncés.

Les candidats plus aguerris pourront présenter le lemme de Slutsky (et son utilisation pour la construction d'intervalles de confiance), ou bien certains théorèmes de convergence pour les martingales.

263 : Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire à densité et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation.

Le lien entre l'indépendance et la convolution pourra être étudié.

Les candidats pourront expliquer comment fabriquer n'importe quelle variable aléatoire à partir d'une variable uniforme sur $[0, 1]$ et l'intérêt de ce résultat pour la simulation informatique.

Pour aller plus loin, certains candidats pourront aborder la notion de vecteurs gaussiens et son lien avec le théorème limite central.

264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation.

Les techniques spécifiques aux variables discrètes devront être abordées (comme par exemple la caractérisation de la convergence en loi). La notion de fonction génératrice pourra être abordée.

Pour aller plus loin, certains candidats pourront étudier les chaînes de Markov à espaces d'états finis ou dénombrables.

5.2.5 Remarques sur l'épreuve de leçon de mathématiques - Option D

Dans cette épreuve, le candidat tire un couple de sujets au sein d'une liste d'une quarantaine de sujets d'algèbre et d'analyse extraite de la liste générale des autres options du concours. **Il n'y a donc plus nécessairement un sujet d'algèbre et un sujet d'analyse !** Il peut y avoir deux sujets d'algèbre ou deux sujets d'analyse, par exemple : *Loi binomiale* et *Fonctions monotones*. Le programme précise en effet :

> *Les candidats se verront proposer deux sujets, dans un corpus d'algèbre, de géométrie, d'analyse et de probabilités.*

Il est donc impératif que les candidats ajustent leur préparation à cette organisation.

Le jury a interrogé les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation étaient strictement identiques.

Notons toutefois que lorsqu'ils avaient le choix, les candidats ont le plus souvent préféré les sujets d'algèbre à ceux d'analyse. Nous conseillons vivement aux futurs candidats de cette option de ne pas négliger leur formation en analyse et probabilités.

Les remarques détaillées concernant cette épreuve ne sont pas différentes des remarques concernant les épreuves de leçon des autres options, et le lecteur est invité à se reporter à la section du rapport consacrée à ce point.

5.3 Épreuves orales Option D : Informatique

5.3.1 Remarques sur l'épreuve de leçon d'Informatique - Option D

Les sujets des leçons se répartissent en quatre grands domaines, bien identifiés : algorithmique (avec par exemple la leçon 902 : « *Diviser pour régner : exemples et applications* »), calculabilité et complexité (avec par exemple la leçon 928 : « *Problèmes NP-complets : exemples de réductions* »), langages et automates (avec par exemple la leçon 910 : « *Langages algébriques. Exemples et applications* »), et logique et preuves (avec par exemple la leçon 919 : « *Unification : algorithmes et applications* »).

De manière générale, le jury a apprécié la qualité de certaines leçons présentées, notamment parmi les leçons les plus avancées, ce qui confirme le bon travail des préparations spécifiques en amont du concours. Ceci est particulièrement net dans les plans des présentations proposées. Beaucoup de candidats cernent bien le sujet de leurs leçons et proposent des développements intéressants.

A contrario, le jury a constaté que des candidats ont choisi l'option D apparemment au hasard, et ne comprenaient même pas les intitulés des leçons. L'épreuve de la leçon est une épreuve difficile, qui couvre des domaines variés couvrant largement le champ de la science informatique. Elle ne peut être réussie que si elle est préparée sérieusement et sur une période longue, et *il serait illusoire de choisir cette option par défaut, sans préparation.*

Le niveau constaté est assez hétérogène, ce qui conduit à une grande dispersion des notes. Le jury n'hésite pas à utiliser toute l'étendue de la plage de notation.

Organisation de la leçon Le jury rappelle qu'il s'agit bien d'une épreuve d'*informatique fondamentale*, et non pas d'outils mathématiques pour l'informatique. Il appartient au candidat de montrer la pertinence des outils mathématiques qu'il développe vis-à-vis des objectifs du thème informatique développé dans la leçon.

La présentation d'outils mathématiques pour eux-mêmes, en particulier lorsqu'il s'agit d'outils sophistiqués comme ceux de la théorie de la calculabilité ou de la théorie des types, s'apparente donc à un *hors-sujet*. Ce point avait déjà été souligné dans les précédents rapports et les titres des leçons ont été affinés en conséquence. Les titres des leçons concernant des modèles formels de l'informatique sont maintenant libellés en mentionnant explicitement *exemples et applications*, ce qui devrait ramener le candidat aux réels attendus de l'épreuve.

Les deux questions-clés de cette épreuve sont toujours les mêmes :
- à quoi cet outil mathématique sert-il dans le cadre informatique considéré ? Pouvez-vous décrire quelques exemples pertinents de son application concrète ?
- la complexité ou le coût de son utilisation sont-ils bien compensés par la qualité supplémentaire d'information qu'il permet d'obtenir ?

Ces questions sont très souvent posées par le jury, sous une forme ou une autre. Le jury invite les candidats à se préparer tout particulièrement à gérer ce type de questions, centrales dans la pédagogie de l'informatique au niveau des lycées et des classes préparatoires.

Enfin, il faut rappeler que lors de la présentation de son plan, le candidat doit proposer au moins deux développements : le jury est attentif d'une part à ce que ces développements entrent strictement dans le cadre de la leçon, et que d'autre part ils ne se réduisent pas à des exemples triviaux. Tout hors sujet est sévèrement pénalisé.

Interaction avec le jury Une large partie de l'épreuve est consacrée à l'interaction avec le jury. En informatique, il s'agit plutôt d'explorer de manière plus approfondie les notions qui ont été présentées, les domaines connexes, et surtout les *exemples d'application* de ces notions.

L'interaction est conduite sous la forme d'un *dialogue* avec le candidat. Le jury respecte le niveau choisi par le candidat : les questions s'ajustent à ce niveau. De même, toute digression du candidat sur un domaine connexe à celui de la leçon conduira le jury à tester les connaissances du candidat sur ce domaine : les connaissances solides seront récompensées, mais un manque de maîtrise sur des notions choisies par le candidat lui-même seront pénalisées.

Ce long temps d'interaction doit être considéré comme une *occasion privilégiée* pour le candidat de montrer ses connaissances ! à lui, ou à elle, de guider le jury dans la direction adéquate. Il est indispensable que les candidats s'entraînent à ce type d'exercice avec leurs préparateurs.

5.3.2 Commentaires sur quelques leçons d'Informatique

Voici quelques points plus spécifiques concernant les leçons.

Les leçons 908, *Automates finis. Exemples et applications.* et 909 ont été regroupées. Il en est de même pour les leçons 910, *Langages algébriques. Exemples et applications.* et 911, *Automates à pile. Exemples et applications.*

901 : Structures de données : exemples et applications.

Le mot *algorithme* ne figure pas dans l'intitulé de cette leçon, même si l'utilisation des structures de données est évidemment fortement liée à des questions algorithmiques.

La leçon doit donc être orientée plutôt sur la question du choix d'une structure de données que d'un algorithme. Le jury attend du candidat qu'il présente différents types abstraits de structures de données en donnant quelques exemples de leur usage avant de s'intéresser au choix de la structure concrète. Le candidat ne peut se limiter à des structures linéaires simples comme des tableaux ou des listes, mais doit présenter également quelques structures plus complexes, reposant par exemple sur des implantations à l'aide d'arbres.

902 : Diviser pour régner : exemples et applications.

Cette leçon permet au candidat de proposer différents algorithmes utilisant le paradigme *diviser pour régner*. Le jury attend du candidat que ces exemples soient variés et touchent des domaines différents.

Un calcul de complexité ne peut se limiter au cas où la taille du problème est une puissance exacte de 2, ni à une application directe d'un théorème très général recopié approximativement d'un ouvrage de la bibliothèque de l'agrégation.

906 : Programmation dynamique : exemples et applications.

Même s'il s'agit d'une leçon d'exemples et d'applications, le jury attend des candidats qu'ils présentent les idées générales de la programmation dynamique et en particulier qu'ils aient compris le caractère générique de la technique de mémoïsation. Le jury appréciera que les exemples choisis par le candidat couvrent des domaines variés, et ne se limitent pas au calcul de la longueur de la plus grande sous-séquence commune à deux chaînes de caractères.

Le jury ne manquera pas d'interroger plus particulièrement le candidat sur la question de la correction des algorithmes proposés et sur la question de leur complexité en espace.

907 : Algorithmique du texte : exemples et applications.

Cette leçon devrait permettre au candidat de présenter une grande variété d'algorithmes et de paradigmes de programmation, et ne devrait pas se limiter au seul problème de la recherche d'un motif dans un texte, surtout si le candidat ne sait présenter que la méthode naïve.

De même, des structures de données plus riches que les tableaux de caractères peuvent montrer leur utilité dans certains algorithmes, qu'il s'agisse d'automates ou d'arbres par exemple.

909 : Langages rationnels. Exemples et applications.

Des applications dans le domaine de la compilation entrent naturellement dans le cadre de ces leçons.

917 : Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.

La question de la syntaxe dépasse celle de la définition des termes et des formules. Elle comprend aussi celle des règles de la démonstration.

Le jury attend donc du candidat qu'il présente au moins un système de preuve et les liens entre syntaxe et sémantique, en développant en particulier les questions de correction et complétude.

927 : Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

Le jury attend du candidat qu'il traite des exemples d'algorithmes récursifs et des exemples d'algorithmes itératifs.

En particulier, le candidat doit présenter des exemples mettant en évidence l'intérêt de la notion d'invariant pour la correction partielle et celle de variant pour la terminaison des segments itératifs.

Une formalisation comme la logique de Hoare pourra utilement être introduite dans cette leçon, à condition toutefois que le candidat en maîtrise le langage.

Chapitre 6

Épreuve orale de modélisation

6.1 Organisation des épreuves de Modélisation

Deux textes au choix sont proposés à l'épreuve de modélisation. Le jury souhaite rappeler ce qu'il attend des candidats dans cette épreuve. Les remarques concernant l'organisation de l'épreuve de modélisation s'appliquent à toutes les options, y compris à l'épreuve d'« analyse des systèmes informatiques » qui en est la version pour l'option D (informatique). Des remarques supplémentaires, spécifiques à cette épreuve, seront données plus loin, dans le cadre de la partie du rapport consacrée à l'option informatique.

Les textes sont surmontés du bandeau suivant :

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Il vous est conseillé de construire un exposé évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Vous êtes libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des pistes de réflexion, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte ; vous n'êtes pas tenu de les suivre. Le propos devra être illustré par des traitements ou des simulations numériques sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Le jury souhaiterait que le plan de la présentation soit annoncé au début de l'exposé.*

et se terminent par le texte suivant :

> *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives : vous n'êtes pas obligé de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos traitements ou simulations numériques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*

L'interrogation dure 1 heure et 5 minutes, pendant laquelle le candidat gère comme il le désire le tableau et les illustrations informatiques qu'il entend présenter. Le candidat doit préparer un exposé d'environ 40 minutes, les 25 minutes restantes étant occupées par les questions du jury.

Le texte est court, environ 5 pages, motivé par un problème concret. Il peut présenter des arguments rapides, voire heuristiques (signalés comme tels). Il ne contient pas d'assertion délibérément trompeuse et se conclut par une liste de suggestions.

Le candidat dispose pendant sa préparation et l'interrogation d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site de l'agrégation de mathématiques, à l'adresse `http://www.agreg.org`.

6.2 Recommandations du jury, communes aux options A, B, C

6.2.1 Recommandations pour l'exposé

Le jury tient à souligner les attentes partagées entre les trois options A (Probabilités et Statistiques), B (Calcul Scientifique) et C (Calcul Formel).

Dans cette épreuve, le candidat est appelé à **faire preuve d'initiative** pour s'exprimer et manifester ses qualités pédagogiques et de synthèse. Le texte fourni est un point de départ pour construire et exposer un traitement mathématique d'un problème «concret» en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. La présentation doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions et mise en lumière de connaissances. Il n'y a pas de «format type» et des prestations très différentes, dans leur forme et leur contenu, sur un même texte, éventuellement traité de façon partielle mais en profondeur, peuvent conduire également à des notes élevées.

Comme le candidat se le voit rappeler en début d'épreuve, il doit exposer son travail à un public qui n'est pas censé connaître le texte, et ce de façon à le lui faire comprendre. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis. Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur la stratégie d'exploitation du tableau et d'utilisation de l'outil informatique qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. En début d'épreuve, il est demandé au candidat d'annoncer **le plan** qui va structurer sa présentation. Répondre à cette requête ne peut s'improviser et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation. Le jury regrette de ne pas voir davantage de dessins (soignés) ou schémas explicatifs qui peuvent rendre l'argumentation plus claire et convaincante. La capacité à revenir sur le problème de départ et à conclure quant à l'efficacité de l'approche mathématique proposée pour y répondre est une qualité très appréciée. La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer : il vaut mieux indiquer les étapes cruciales d'un raisonnement que de se lancer dans un long calcul fastidieux qu'on aura du mal à mener à bien. À un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique ou critique scientifique, le candidat doit préférer une discussion fouillée d'une portion du texte, bâtie sur des arguments mathématiques solides, des simulations pertinentes accompagnées de commentaires de bon aloi.

Le candidat est invité à mobiliser ses connaissances, sur des aspects variés du programme, pour enrichir son propos, en étayant les arguments seulement esquissés dans le texte par des **énoncés précis.** Il est totalement illusoire de chercher à impressionner le jury par une logorrhée de mots savants : les textes proposés peuvent être discutés en exploitant un bagage technique qui n'utilise pas les éléments les plus sophistiqués du programme. Quoi qu'il en soit, le jury ne manque pas de s'attarder sur toute notion amenée par le candidat durant sa présentation et il est toujours dommageable de s'aventurer sur des terrains méconnus. Bien plus qu'une démonstration de virtuosité technique, le jury attend que le candidat montre sa maîtrise d'énoncés relativement simples «en situation» : c'est là que réside une des difficultés principales de l'épreuve. Nombre de candidats éprouvent des difficultés à **formaliser** précisément des notions de base du programme ou à mettre en œuvre certaines de leurs connaissances en algèbre, géométrie, et analyse pour l'étude des modèles. *A contrario*, utiliser une portion excessive du temps de parole pour recycler un développement d'une leçon d'analyse ou de mathématiques générales en s'éloignant des enjeux du texte est considéré comme un hors sujet sévèrement sanctionné. La paraphrase pure et simple d'amples portions du texte ne constitue en aucun cas un exposé satisfaisant. Les textes fournissent souvent des esquisses de démonstrations qui sont précisément destinées à être complétées et commentées. Le jury n'est pas dupe des candidats qui tentent de faire semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un point du texte ou une démonstration. Il ne se laisse pas tromper non plus par les candidats qui font des indications du texte un argument d'autorité, tentative maladroite de masquer des insuffisances techniques. Un regard critique («il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire», «les hypothèses du théorème de XXX que je connais pour aborder des problèmes similaires ne sont pas satisfaites dans le cas présent»...) est une attitude bien plus payante.

Enfin, le jury s'alarme de l'extrême faiblesse des connaissances en **algèbre linéaire**, les manipulations et raisonnements les plus élémentaires sont excessivement laborieux (calcul matriciel, certains candidats semblant découvrir qu'il puisse exister des matrices non carrées, résolution de systèmes linéaires, norme de matrices, décomposition spectrale et réduction).

6.2.2 Recommandations pour l'illustration informatique

Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, dont les ambitions sont clairement délimitées. Il ne s'agit en aucun cas, et pour aucune des 3 options, d'un exercice de programmation. L'objectif est d'être capable d'utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte. La réalisation de cet objectif constitue une part incompressible de la note finale attribuée à l'épreuve. Une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standards des logiciels fournis. À ce propos il n'est évidemment pas réaliste de découvrir ces logiciels le jour de l'épreuve : la configuration informatique utilisée pour le concours et sa documentation sont accessibles et téléchargeables sur le site officiel de l'agrégation et permettent de se familiariser avec l'environnement offert pour l'épreuve. La forme et la nature des illustrations proposées n'obéissent à aucun code préétabli. En revanche, elles doivent faire la preuve d'une véritable réflexion scientifique et être agrémentées de commentaires, sur les résultats et les méthodes. Même si les simulations ne sont pas abouties («ça ne marche pas»), le jury sait valoriser la démarche suivie lorsqu'elle est clairement argumentée et permettrait, avec des aménagements mineurs, de mettre en évidence des aspects intéressants du texte.

6.3 Option A : probabilités et statistiques

Le niveau de la session 2014 de ce concours en ce qui concerne l'option A a été assez proche de celui de 2013. Comme lors de cette dernière session, on se doit de regretter que de trop nombreux candidats, que ce soit par impréparation ou par manque de connaissances aient présenté des exposés soit trop courts, soit trop vides, voire carrément inquiétants par le nombre de raisonnements et énoncés faux. Quelques candidats ont su montrer un bon niveau, mais il semble clair que le niveau des candidats ne se répartit pas selon une gaussienne raisonnable.

Cette épreuve de modélisation, pour ce qui concerne ici l'option A, doit permettre au candidat de mettre en avant diverses qualités : les connaissances mathématiques, la réflexion et la mise en perspective de ses connaissances, l'aptitude à appliquer des mathématiques à des problèmes concrets de modélisation, la pertinence du choix des illustrations informatiques et les qualités pédagogiques de mise en forme d'un exposé construit et cohérent. La capacité du candidat à répondre aux questions qui lui sont posées fait partie intégrante de l'évaluation de cette leçon. Comme pour l'ensemble des oraux, le caractère dynamique de l'exposé apporte une valeur ajoutée conséquente sur l'évaluation.

Le jury tient à rappeler que l'exposé doit être construit par le candidat en s'appuyant sur le contenu du texte et des suggestions qui y sont présentes, mais que la paraphrase simple des résultats avec un suivi linéaire de la structure du texte ne saurait constituer un exposé satisfaisant : les textes ne sont en général que survolés dans leurs premières parties, qui reprennent souvent des notions simples du programme, alors que l'intérêt scientifique se situe dans les dernières parties du texte qui permettent aux candidats de montrer une étendue de connaissances et une faculté d'adaptation à des contextes mathématiques moins classiques que l'on est en droit d'attendre d'un bon candidat à l'agrégation. Le choix d'un exposé dénué ou quasiment dénué de tout contenu mathématique formalisé est également à proscrire : le jury attend au moins le développement précis d'une preuve non triviale proposée dans les suggestions du texte. Ce fut un écueil beaucoup trop fréquent lors de la session 2014.

Connaissance du programme

Les textes proposés comportent souvent les deux aspects probabiliste et statistique. Cependant il n'est pas impossible de se voir proposer le choix entre deux textes où l'aspect statistique est plus marqué : il est donc nécessaire que les candidats fassent un effort de formation et de culture statistique plus poussé qu'ils ne l'ont montré au cours de cette session et des précédentes. La part importante de la statistique dans l'enseignement des mathématiques, part qui devrait encore s'accroître dans les années futures, justifie que les futurs professeurs soient bien formés à la démarche statistique. De plus, lors de la discussion avec le candidat, le jury peut interroger celui-ci sur la totalité du programme. En particulier, il est systématique que le jury pose des questions de nature statistique à partir des textes à coloration probabiliste et inversement.

Il ne faut pas non plus que les candidats oublient que statistique et probabilités font appel à des résultats issus d'autres domaines des mathématiques. Ainsi le jury attend une utilisation pertinente de notions d'algèbre (en particulier linéaire), de géométrie et d'analyse dans l'exposé du candidat ; la modélisation stochastique faisant appel à toutes les connaissances des mathématiques, le candidat doit montrer qu'il en est conscient et capable de les appliquer à bon escient.

Contenu théorique en probabilités-statistique

Le jury s'attend au moins à un socle de connaissances minimales que ce soit en probabilités ou en statistique : les différentes notions de convergence, l'indépendance entre variables aléatoires, la loi forte des grands nombres et le théorème de la limite centrale, les notions d'estimation et de test paramétriques, ... Ceci n'est finalement maitrisé que par peu de candidats. Ne parlons pas des différents modes de convergence des chaînes de Markov ou des martingales qui ne sont généralement pas connus. A titre de satisfaction, on notera lors de cette session des progrès en ce qui concerne la connaissance de la notion de mesure invariante pour les chaînes de Markov, l'utilisation du Lemme de Slutsky, la construction des intervalles de confiance et l'obtention de l'estimateur par maximum de vraisemblance.

Modélisation et mise en œuvre informatique

Il est rappelé que même si la plupart des textes s'appuient sur des problèmes issus de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste donc avant tout à dégager les comportements qualitatifs du modèle mathématique proposé, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres et, à un niveau tout à fait élémentaire, s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter. Le jury s'attend à ce que le candidat ne se contente pas d'un exposé qualitatif et développe, fût-ce partiellement, certains aspects purement mathématiques du texte. A contrario, les interprétations qualitatives du comportement des modèles sont parfois absentes des exposés. Pourtant, montrer que l'on comprend un modèle ne se réduit pas à prouver un théorème.

Pour ce qui concerne les traitements ou les simulations numériques, trop souvent le jury a pu voir des programmes *types* appliqués de façon inadéquate à la situation de modélisation proposée, certains candidats proposant même parfois des programmes complètement en dehors du sujet. Il est bien évident que cette démarche ne correspond absolument pas aux attendus de l'épreuve : les traitements ou les simulations numériques doivent illustrer un des phénomènes du modèle, illustration à la fois qualitative et quantitative par exemple par la réalisation de tests ou d'intervalles de confiance pour l'estimation. Enfin, de nombreux textes sont assortis d'un jeu de données numériques sur lequel le candidat est invité à mettre en œuvre des procédures de test ou d'estimation : trop peu de candidats traitent effectivement ces données alors que cela constitue une réelle plus-value pour la présentation du texte par le candidat.

6.4 Option B : Calcul scientifique

Un certain nombre de candidats admissibles ne semblaient pas être au fait des modalités, ni des attentes de l'épreuve et ne maîtrisaient tout simplement pas les notions de base du programme général intervenant dans les textes. A contrario, des candidats qui avaient manifestement préparé l'épreuve y ont obtenu des notes très honorables, sans pour autant faire preuve d'une virtuosité technique particulière. Afin d'aborder sereinement les textes proposés dans l'option B, un minimum d'aisance est requis avec les notions suivantes :

- Connaître le théorème de Cauchy-Lipschitz (le cas C^1 est souvent suffisant) et être en mesure de l'appliquer pour des systèmes différentiels simples,
- Construire, analyser et mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite,
- Connaître les principes des méthodes directes de résolution de systèmes linéaires (pivot de Gauss, LU), notion de conditionnement, éléments propres de matrices, analyser et mettre en œuvre la méthode de la puissance,
- Analyser et mettre en œuvre la méthode de Newton (cas vectoriel),
- Construire la matrice correspondant à la discrétisation par différences finies de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ et connaître ses propriétés,
- Être capable d'énoncer et appliquer le théorème des extrêma liés (typiquement pour des problèmes de minimisation de fonctionnelles convexes sur $\mathbf{R}^N$ avec contraines linéaires), analyser et mettre en œuvre un algorithme du gradient.

Le jury souligne que les textes exploitent ces notions dans leurs versions les plus élémentaires et ne requièrent aucun raffinement technique. Il est aussi rappelé que de nombreux textes représentatifs de l'épreuve ont été rendus publics et sont disponibles sur le site `agreg.org`. Les candidats peuvent ainsi se familiariser avec le format des textes, se faire une idée des attentes de l'épreuve et s'entraîner avec l'environnement informatique du concours.

Dans l'épreuve de modélisation, un certain nombre de candidats, bien que disposant d'un bagage technique modeste, ont su tirer leur épingle du jeu et obtenir des notes très honorables :

- en se montrant capable d'identifier comment un théorème classique pouvait répondre à une question soulevée par le texte, énonçant clairement ce théorème et l'appliquant au contexte précis du texte,
- en commentant de manière pertinente la mise en équations évoquée par le texte,
- en proposant une illustration d'un fait discuté par le texte (la convergence vers un état stationnaire, l'apparition de structures particulières...).

Le jury de l'option B rappelle qu'une illustration réalisée avec les routines de base des logiciels fournis est tout à fait satisfaisante si elle est clairement présentée, motivée et discutée. Si `Scilab` est certainement le logiciel libre le mieux adapté, le jury relève qu'un certain nombre de candidats a pu fournir des résultats convaincants avec un logiciels comme `XCas` ou `Sage`.

En ce qui concerne l'option de Calcul Scientifique, le jury émet les recommandations spécifiques suivantes :

- **Analyse des équations différentielles ordinaires et calcul différentiel :**
  La dérivation de fonctions de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$ ne devrait pas poser de difficulté au niveau de l'agrégation. Les formules de développements de Taylor contiennent généralement un terme de reste, dont l'analyse

est un point souvent crucial. Les candidats devraient faire preuve d'automatismes à la vue de la moindre équation différentielle ordinaire. Par exemple, un texte indiquant «la solution de l'équation différentielle [...] est définie pour tout temps et reste positive» doit amener à : 1) citer le théorème de Cauchy-Lipschitz, 2) expliquer comment il s'applique dans le contexte présent [1], 3) établir des estimations sur la solution, 4) en déduire la positivité de la solution et le caractère non borné du temps d'existence.

– **Schémas numériques pour les équations différentielles :**
Le jury considère la description des schémas d'Euler comme un élément central du programme de l'option. Les candidats doivent être capables de présenter clairement les principes guidant l'écriture de ces schémas et l'analyse de leurs propriétés de convergence, ainsi que les avantages et inconvénients des méthodes explicites et implicites. Trop rares sont les candidats capables de formaliser correctement une définition de la convergence d'un schéma numérique. La confusion récurrente entre l'approximation X_n et l'évaluation $X(t_n)$ de la solution exacte au temps t_n, l'incapacité à relier le nombre de points de discrétisation et le pas Δt témoignent d'une compréhension déficiente du sujet. Afin de limiter des confusions coupables, le jury recommande instamment de prohiber toute utilisation de symboles comme $\simeq$, $\approx$ ou bien pire $\sim$, pour relier l'évaluation de la solution aux points de discrétisation et les éléments de la suite numérique définie par le schéma. La mise en œuvre de ces méthodes peut être l'occasion de discuter des difficultés potentielles liées à la stabilité et aux contraintes portant sur le pas de temps. Attribuer l'intérêt de la notion de stabilité aux «erreurs machines» traduit une interprétation erronée des enjeux du calcul scientifique.
– **Équations aux dérivées partielles :**
Le jury précise que les textes qui évoquent des problèmes d'équations aux dérivées partielles peuvent être abordés avec des outils rudimentaires et ne nécessitent *a priori* aucune connaissance sur la théorie des distributions, bien que ces notions aient intégré le programme commun, ni ne réclament de dextérité particulière d'analyse fonctionnelle. Le jury a été quelque peu surpris que des candidats à cette épreuve découvrent la matrice associée à la discrétisation de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ par différences finies le jour de l'oral.
– **Algèbre linéaire :**
Des lacunes profondes et inquiétantes sont trop régulièrement relevées. Au grand étonnement du jury, de nombreux candidats ne font pas le lien entre matrices symétriques et formes quadratiques. Les raisonnements liés à la réduction des matrices sont trop souvent extrêmement laborieux et les méthodes pratiques de calcul (résolution de systèmes, déterminant, inverse...) méconnues.

Les candidats qui ont choisi l'option B ne doivent pas hésiter à s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques pour proposer des développements originaux dans les leçons d'analyse et de mathématiques générales, en centrant leur propos sur des problématiques motivées par les préoccupations du calcul scientifique (approximation de solutions d'équations linéaires ou non linéaires, d'équations différentielles, convergence d'algorithmes, analyse matricielle,...).

6.5 Option C : Algèbre et Calcul formel

Généralités.

La ligne directrice du calcul formel est la recherche de l'*effectivité*, puis de l'*efficacité* (souvent en temps, parfois en espace) du calcul algébrique, en allant des aspects les plus élémentaires (calcul avec les entiers, les polynômes, les entiers modulo, les séries formelles) aux aspects plus avancés (élimination, géométrie effective, codes correcteurs d'erreur). La quasi-totalité des sujets posés dans le cadre de l'option rentrent totalement dans l'une ou l'autre, souvent les deux, de ces grandes problématiques.

1. Détailler explicitement la fonction $(t,X) \in [0,T] \times \mathbf{R}^n \mapsto f(t,X) \in \mathbf{R}^n$ qui permet de mettre le problème sous la forme $X'(t) = f(t,X(t))$, distinguer la variable vectorielle X et la fonction $X : t \mapsto X(t)$ sont malheureusement des obstacles majeurs pour une grande proportion des candidats.

Cette « grille de lecture » peut accompagner la lecture des candidats, et la construction de leur exposé de façon utile espérons-le ; et, rêvons tout haut, d'expliquer non seulement *ce que* le texte fait, mais aussi *pourquoi* il le fait. La capacité à percevoir ces problématiques fait la différence entre bonnes et excellentes prestations, et peut aussi expliquer les notes honorables de certains candidats dont le niveau mathématique était pourtant limité.

Construction de l'exposé.

Comme indiqué l'an dernier, et comme dans tout oral, la construction de l'exposé doit être une préoccupation importante des candidats. Le jury préfèrera toujours un traitement approfondi d'une partie, même modeste, du texte à un survol général sans réelle compréhension ni contribution personnelle. Cela ne dispense pas d'une réflexion permettant de produire un tout **cohérent** et **intelligible** par un public qui, dans l'esprit de l'épreuve, découvre le texte à travers l'exposé du candidat. Que penserait un tel public face à un enseignant qui se contente d'une brève introduction à la problématique avant de s'engager dans un long tunnel de théorèmes énoncés sans lien avec le problème de départ ? Ce d'autant plus qu'ils ne sont, dans ce cas, que rarement prouvés autrement que par la répétition des éléments de démonstration, souvent fragmentaires, donnés dans le texte.

Néanmoins, dans l'ensemble, les candidats semblent avoir perçu la nécessité d'utiliser, au mieux, le temps qui leur est consacré.

Les candidats ayant le réflexe de se saisir, seuls, d'une question de complexité, sont perçus très positivement par le jury. Pour prendre un exemple, quand le texte parle de cryptographie, comparer le coût du système proposé et le coût d'une attaque, même naïve, est une initiative intéressante et actuellement inexistante. Une telle étude est beaucoup plus à sa place qu'un exposé détaillé de RSA plaqué sur un texte qui n'en parle pas – la mention rapide de RSA dans un texte introduisant un système de chiffrement pour comparer des complexités restant bien sûr pertinente. Plus largement, une réflexion minimale sur les ordres de grandeur (est-ce qu'un calcul faisable représente $10^1, 10^{10}, 10^{100}, 10^{1000}$ opérations élémentaires) permettrait souvent de mieux situer les problèmes soulevés par un texte, ou de proposer des valeurs de paramètres réalistes quand ce sujet n'est pas évoqué par le texte.

Illustration informatique.

Par rapport à l'an dernier, les candidats ont presque toujours quelque chose à présenter ; l'exercice est donc globalement en progrès. Le principal défaut de l'illustration est le fait qu'elle soit souvent perçue comme une corvée, plutôt que comme un outil permettant d'aider à la compréhension du texte, ou de mettre ce dernier en valeur : mener des calculs du texte à l'aide du logiciel choisi (cela impose d'en connaître les limites, de savoir les expliquer, de se limiter si nécessaire à un cas particulier), étudier des exemples ou mener une étude expérimentale, comparer une méthode présentée dans le texte avec la solution implantée dans le système choisi, etc.

Aspects mathématiques.

Les remarques de l'année 2013 s'appliquent intégralement à la session 2014, et on renvoie le lecteur à ce rapport, en ajoutant ici quelques remarques complémentaires.

Deux régressions majeures, d'abord :

– pour beaucoup de candidats le réflexe « pivot de Gauss » ne vient qu'en réponse à des questions concernant les systèmes linéaires, mais son utilisation pour le calcul de déterminants ou de rang est parfois une découverte pour les candidats – cela devrait être une connaissance de base, ou, à défaut, une acquisition indispensable d'un travail de préparation à l'épreuve de modélisation C.
– après quelques années de progrès, les corps finis redeviennent un objet mystérieux dans l'esprit des candidats. Souvent la construction théorique (comme corps de décomposition, non effective donc) est connue, mais le vernis est bien fin et les questions révèlent de vives confusions entre $\mathbf{F}_{p^2}$, $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ et $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$.

À l'inverse, la connaissance du résultant semble progresser – à moins que cela ne signifie simplement que les candidats le connaissant mal évitent dorénavant les textes nécessitant son utilisation ; pointons néanmoins qu'il est difficile, dans l'option, d'échapper simultanément aux corps finis et au résultant... Les "pathologies" liées à la spécialisation (annulation simultanée des termes de tête) sont méconnues, mais les candidats savent souvent que l'annulation du résultant entraîne l'existence d'un facteur commun – on aimerait parfois qu'ils fassent le lien avec l'existence d'une racine dans la clôture algébrique. Encore beaucoup d'hésitations sur le bon cadre formel pour décrire la théorie (beaucoup de théorèmes dans $\mathbf{R}[X]$, en particulier, où ils ont alors peu d'intérêt).

Les codes correcteurs sont une partie limitée du programme, et très peu de connaissances sont exigibles (et exigées). Néanmoins, il est bon de s'y être un peu frotté pour se familiariser avec les problématiques sous-jacentes, typiquement qu'un bon code correcteur se décrit de façon compacte (et est donc en général linéaire), a une grande dimension et grande distance minimale (par rapport à sa longueur) et, aussi et surtout un algorithme de décodage efficace – rappelons que ce second point n'est pas vrai d'un code linéaire "quelconque". Il faut s'être confronté à ces faits pour comprendre les questions que se pose presque tout texte sur les codes... et que la méconnaissance des corps finis est généralement rédhibitoire pour ce sujet.

Enfin, même s'il s'agit d'une épreuve plus appliquée ou moins académique que les deux autres épreuves orales, cela ne dispense en aucun cas les candidats de faire preuve de la rigueur mathématique requise – quand on utilise un théorème, la capacité à en restituer un jeu d'hypothèses correct est une qualité indispensable. Par jeu d'hypothèses correct, on entend que :

– le théorème soit vrai
– et qu'il s'applique effectivement au contexte considéré.

Rappelons que la minimisation des hypothèses n'est que très rarement une préoccupation dans l'épreuve.

6.6 Option D : Modélisation et Analyse de Systèmes Informatiques

Commentaires généraux

Le jury a apprécié le travail accompli pour la préparation de cette épreuve par les meilleurs candidats. Il a interrogé les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation étaient largement identiques sauf en ce qui concerne l'exercice de programmation. Le lecteur est invité à se reporter à la section du rapport consacrée à l'épreuve de modélisation pour les remarques générales sur la structure de cette épreuve. Nous ne détaillons ici que les aspects spécifiques à cette épreuve dans l'option Informatique.

Exposé des motivations

Beaucoup de candidats omettent la phase indispensable d'introduction et de motivation. C'est au candidat d'introduire le sujet du texte et de motiver la présentation qui va suivre. Cette motivation sera le plus souvent l'évocation de situations concrètes dans lesquelles on a besoin d'outils informatiques spécifiques. Ces situations peuvent être proposées par le texte lui-même, mais elles peuvent aussi être tirées de l'expérience personnelle du candidat. Toute contribution personnelle à ce niveau est toujours très appréciée !

Présentation du texte

Il est attendu des candidats qu'ils soient fidèles à l'esprit du texte. Il ne s'agit pas qu'il traite l'intégralité des points du texte, mais que le traitement qu'il choisit d'en faire soit cohérent : il doit par exemple expliquer pourquoi il a choisi de développer certains points, et pas certains autres.

Particulièrement dans le cadre de l'option D, il est attendu une prise en compte soigneuse de l'ensemble de la démarche de modélisation, qu'on peut décomposer en quatre phases :

– partir d'une situation concrète, non nécessairement de nature informatique ;
– en proposer un modèle, mathématique et informatique ;
– travailler dans ce modèle, pour implémenter, expérimenter, décider d'un compromis sur la complexité en temps ou en espace, etc. ;
– revenir à la situation concrète de départ, se demander comment le modèle a permis de mieux analyser cette situation.

On attend, en particulier, que le candidat ne néglige pas l'étape de modélisation, ni la dernière (retour à la situation concrète).

Le jury est spécialement attentif aux questions liées à l'évaluation du coût, ainsi qu'aux compromis de la modélisation concernant la précision, la complexité, etc.

Concernant la troisième phase, de travail dans le modèle, il est rappelé que le candidat n'est pas dans le cadre d'une leçon : il ne doit pas se lancer dans une succession de démonstrations mathématiques, mais insister sur la variété des techniques qui peuvent être appliquées, et dont il doit être capable de développer en détail l'une ou l'autre à la demande du jury. Dans cette partie de l'épreuve, il ne s'agit pas de détailler toutes les preuves. Toute tentative de ramener cette épreuve à une leçon sera détectée et sanctionnées par le jury.

Exercice de programmation informatique

Au cours de l'exposé, le candidat présente son *exercice de programmation*. Nous donnons quelques recommandations spécifiques à cette partie de l'épreuve à la fin de ce rapport.

Cette partie de l'épreuve a été globalement satisfaisante, les candidats ayant généralement bien compris l'importance qui y est attachée. Elle dure environ 10 minutes. Le candidat choisit librement dans le temps d'exposé le moment où présenter son exercice de programmation, de façon qu'il s'intègre au mieux à la présentation. Si l'exercice n'a pas été présenté au bout d'une trentaine de minutes, le jury lui rappellera de le faire.

Le plus souvent, les candidats le placent dès que les notions nécessaires ont été introduites dans l'exposé. Cette introduction doit être soignée et complète, afin d'éviter tant les allers-retours du terminal au tableau que les discours approximatif devant l'écran.

Cette présentation au jury doit être faite que le programme fonctionne — ce que l'on espère ! — ou pas. C'est seulement dans un deuxième temps que le candidat lance une exécution. Dans tous les cas, le jury évalue la qualité générale du code réalisé. Cette évaluation interactive permet à un candidat réactif de repérer une erreur, voire de la corriger, de recompiler et de relancer l'exécution.

Interaction avec le jury

Cette dernière partie de l'épreuve est un *dialogue*, bidirectionnel.

Certes, le candidat répond aux questions du jury, mais il doit prendre conscience que ses réponses orientent les questions. Au-delà du sujet du texte, le jury n'interrogera que sur ce que le candidat aura évoqué de lui-même. Inversement, si le candidat s'écarte du texte proposé, le jury s'attend à ce qu'il puisse répondre aux questions qu'invariablement il lui posera sur ces points. Cependant, le candidat est bienvenu s'il fait intervenir des connaissances personnelles non abordées par le texte.

Dans cette dernière partie de l'épreuve, le jury souhaite pouvoir aborder de nombreuses questions : **il est donc attendu des réponses brèves et non pas des développements de type leçon.** Les questions du jury porteront au moins autant sur la démarche globale de modélisation et la compréhension des différentes approches du texte que sur l'étude technique des diverses propositions.

Il sera apprécié que la présentation des différentes approches souligne leurs avantages et inconvénients respectifs, en terme de coût, d'adéquation au problème, de complexité, de précision…

Une partie de la discussion pourra être consacrée à l'exercice de programmation, pour discuter avec le candidat de la cohérence de sa programmation : choix du langage, style de programmation (fonctionnel ou impératif) utilisation des structures de contrôle et en particulier des boucles, découpage du problème en fonctions...

6.6.1 Remarques spécifiques sur l'exercice de programmation.

Voici quelques recommandations plus précises concernant l'exercice de programmation. Elles sont motivées par les présentations des candidats de cette année. Nous espérons qu'elles seront utiles pour les candidats des années à venir.

Il s'agit d'un exercice de pédagogie et non pas de virtuosité. Le critère principal d'évaluation est la qualité pédagogique de la présentation du programme au jury et non pas la complexité du codage ou la virtuosité dans l'utilisation des aspects avancés du langage. Une question fréquente du jury sera : comment expliqueriez-vous ceci à une classe de terminale ?

Installation technique

Le candidat dispose d'un poste informatique analogue à celui utilisé pour la préparation. Les fichiers qu'il a préparés sont installés sur ce poste en début d'interrogation. Le jury suit la présentation, mais il ne dispose ni de clavier ni de souris : le candidat est donc le seul à contrôler ce qui est présenté, sans interférence possible.

Présentation du programme

D'une manière générale, le candidat doit proposer un code lisible et mettre en valeur ses connaissances en programmation et sa maîtrise du langage et de l'environnement de programmation utilisés. À titre de repère, la partie centrale du code devrait tenir sur un écran.

Les candidats sont invités à présenter le schéma algorithmique et les structures de données utilisés avant de lancer leur programme. Par contre, il est inutile de descendre dans les détails les plus triviaux du code. Le jury pourra demander au candidat d'évaluer la complexité de son implémentation ou de discuter de choix alternatifs de conception. La possibilité de modification au vol d'un paramètre ou des données est appréciée pour la vérification de la correction.

Choix des données d'exécution

Il est demandé aux candidats d'exécuter leurs programmes sur différents jeux de données, et il est souhaitable qu'ils aient anticipé ce point. La manière dont ces jeux de données sont choisis devra être justifiée par la démonstration de divers aspects du comportement du programme. Les candidats sont souvent interrogés sur leurs critères de choix.

Le candidat doit être capable de repérer des résultats erronés produits par son programme. Ne pas s'apercevoir que son programme renvoie des résultats absurdes est évidemment pénalisé ! Le jury invite donc les candidats à réfléchir aux ordres de grandeur des résultats attendus.

Choix du langage

Le candidat choisit son langage. Cette année, la plupart des candidats ont choisi Caml, mais C et Java ont également été utilisés. Depuis la session 2014, C++ pourra également être choisi, avec les bibliothèques disponibles en standard dans la distribution gcc, en particulier STL *(standard template library)*.

Ce choix peut orienter les questions, car l'implémentation d'un problème peut être plus facile dans certains langages qui permettent de manipuler les structures de données directement, par exemple les listes pour Caml. Mais un candidat qui utilise ces facilités doit pouvoir les justifier. Par exemple, la différence ensembliste entre deux listes étant prédéfinie dans les bibliothèques de Caml, on attend du candidat qui l'utiliserait qu'il puisse expliquer l'implémentation de cette fonction et la complexité des opérations concernées.

L'exercice est soigneusement spécifié dans les textes proposés. Il doit être conduit dans l'un des langages proposés : un candidat qui n'utilise pas les langages proposés reçoit la note 0 à l'exercice de programmation, même si ce langage est disponible sur le poste informatique (Maple, Scilab, etc.)

Style de programmation

La *lisibilité* et l'*élégance* de l'expression du programme dans le langage choisi sont particulièrement appréciées par le jury. Il est essentiellement attendu que le style de programmation des programmes soit *cohérent* : utilisation de structures d'itération (bornées `for` ou non-bornées `while`), initialisation des variables, découpage plus ou moins fin en fonctions auxiliaires, etc. **Les critères d'arrêt des boucles et des récursions doivent être parfaitement maîtrisés.** Toutes les quantités présentes dans les programmes doivent être définies par des constantes symboliques facilement modifiables à la demande du jury.

Certains langages favorisent une programmation récursive ou itérative. Le candidat peut utiliser le mode de programmation qu'il préfère, pourvu que ce soit de manière cohérente avec les autres choix de conception. Il est bien sûr attendu du candidat qu'il sache passer d'une programmation récursive à une programmation itérative et réciproquement dans les cas simples, par exemple en présence de *récursivité terminale*.

Entrées-sorties

Certains candidats passent beaucoup de temps à programmer des entrées *interactives* au clavier. Ce n'est pas nécessaire et souvent inutilement complexe, notamment en C (appel par référence dans la fonction `scanf`, etc.). Il est recommandé de coder le jeu de données dans une procédure d'initialisation qui pourra être facilement modifiée à la demande du jury.

Assertions de correction

Il est très souvent demandé aux candidats d'exécuter leurs programmes sur les cas limites de leurs spécifications, sauf si ces cas ont été explicitement exclus dans la présentation préalable : liste vide pour les algorithmes de tri, nombres négatifs pour des algorithmes de factorisation, etc. Il sera d'ailleurs bien apprécié que le candidat garde les parties délicates de son programme par des assertions, par exemple à l'aide de la fonction `assert` de la bibliothèque C ou de levée d'exception `failwith` de Caml. C'est particulièrement indiqué pour les accès aux tableaux passés en paramètre en C.

Recompilation

Dans le cas d'une programmation en C, il sera systématiquement demandé au candidat de recompiler son programme avec le niveau maximal d'avertissement :

```
gcc -Wall prog.c -o prog
```

Un programme qui produit des avertissements sera pénalisé et le candidat devra le corriger pendant l'interrogation. La même chose sera vérifiée en Caml ou Java. En particulier, les *pattern-matching* de

Caml doivent être exhaustifs et les fonctions internes à une séquence doivent retourner la valeur `()` du type `unit`.

Organisation de la préparation

Il est souvent demandé combien de temps un candidat devrait consacrer à la préparation de l'exercice de programmation au sein des heures de préparation. Ceci dépend bien sûr des capacités du candidat et de l'organisation de son exposé. Cependant, il faut noter que la présentation de cette partie ne dure que 10 minutes sur les 40 minutes d'exposé. Il est donc indiqué d'y passer au plus un quart du temps de préparation, soit entre une demi-heure et une heure, afin de ne pas empiéter sur la préparation du reste de l'épreuve.

Respect de la spécification

Le candidat doit respecter la spécification qui est donnée dans l'énoncé. C'est seulement dans un deuxième temps qu'il peut, s'il le souhaite, présenter un programme implémentant une autre spécification. Il devra alors expliquer pourquoi il le fait. Le fait que l'exercice proposé dans l'énoncé soit trivial ou inintéressant n'est évidemment pas une explication suffisante ! Ces extensions sont alors considérées et évaluées comme des développements au choix du candidat. Par exemple, des simulations simples ont pu servir à exposer un développement. Elles doivent mettre en valeur d'autres capacités du candidat que sa *virtuosité* en programmation pure qui n'est absolument pas l'objectif de l'épreuve. Ces présentations complémentaires peuvent utiliser l'ensemble des outils présents sur le poste informatique, Maple et Scilab par exemple.

Chapitre 7

Épreuve : Agir en fonctionnaire de l'État et de façon éthique et responsable

Conformément à l'arrêté du 28 décembre 2009 fixant les modalités d'organisation des concours de recrutement des enseignants, une interrogation portant sur la compétence "Agir en fonctionnaire de façon éthique et responsable" est insérée, depuis la session 2011, dans l'épreuve orale d'algèbre et géométrie pour les candidats des options A,B,C et dans l'épreuve orale de mathématiques pour l'informatique pour les candidats de l'option D.

Déroulement

Le candidat dispose d'un temps global de 3h30 qu'il a toute liberté de répartir entre la préparation des deux interrogations. Celle qui se rapporte à l'épreuve «Agir en fonctionnaire de l'État de manière éthique et responsable » comporte deux phases : un exposé du candidat d'une durée maximale de dix minutes, suivi d'un entretien avec le jury d'une durée maximale de dix minutes. L'exposé et l'entretien s'appuient sur le sujet remis au candidat à l'issue du tirage. Celui-ci comprend plusieurs extraits de textes officiels (de nature législative ou réglementaire) et deux ou trois pistes de réflexion conçues pour aider le candidat à structurer sa présentation et pouvant servir de support aux questions abordées lors de la phase de dialogue avec le jury. Il est à noter que le candidat n'est pas tenu de suivre ces pistes et a toute liberté pour analyser le texte comme il l'entend. Les sujets ont porté sur des thématiques regroupées autour des connaissances, capacités et attitudes portant définition des compétences à acquérir par les professeurs.

Parmi celles-ci, nous pouvons citer :

– Droits et obligations du fonctionnaire de l'État ;
– Missions de l'enseignant du second degré et du supérieur ;
– L'école et les parents ;
– L'obligation scolaire ;
– Education et égalité des chances ;
– Le projet d'établissement ;
– La lutte contre le décrochage scolaire ;
– La refondation de l'éducation prioritaire ;
– Les évaluations internationales ;
– La scolarisation des élèves en situation de handicap ;
– L'utilisation des ressources numériques ;
– Les sanctions disciplinaires.

Objectif

L'objectif de l'interrogation est de vérifier les connaissances du candidat sur l'une des compétences professionnelles du métier d'enseignant et ses capacités de compréhension, de réflexion et d'analyse, jugées indispensables pour un fonctionnaire de catégorie A. La conception de l'épreuve tend à minorer la place des connaissances du système éducatif au profit de capacités de réflexion, d'exploitation et d'analyse de documents et de communication orale.

Compétences attendues

Lors de l'exposé, le jury attend du candidat qu'il dégage les objectifs principaux visés par les extraits de textes figurant dans la documentation fournie par le sujet, qu'il cerne leurs articulations ou leurs apparentes contradictions, qu'il en fasse une analyse raisonnée et construise une argumentation.
Ceci suppose que le candidat soit capable de traiter scientifiquement une question en se méfiant tant de ses propres préjugés que de certains lieux communs ou idées reçues. Ce processus de distanciation vis à vis de ses propres représentations est particulièrement nécessaire sur certaines thématiques pouvant le toucher dans ses convictions ou son histoire personnelle. Outre le contenu de l'exposé, la manière dont il est présenté en termes de structure et d'expression sont des éléments d'appréciation importants : en particulier, le registre de langue orale (tant au niveau syntaxique que lexical) doit être adapté aussi bien à la situation d'oral de concours qu'aux situations de communication auxquelles un enseignant est confronté dans sa pratique professionnelle.
L'échange avec le jury qui fait suite à l'exposé porte aussi bien sur certains points évoqués par le candidat que sur des éléments figurant dans le document. Le jury n'attend a priori aucune prétendue bonne réponse, mais est sensible aux qualités d'écoute, de dialogue et d'ouverture d'esprit manifestées par le candidat, dans le respect des règles de la déontologie et de l'éthique d'un fonctionnaire de l'État. Le candidat peut, s'il le souhaite, illustrer sa présentation par des éléments tirés d'une expérience professionnelle. En revanche toute exposition uniquement basée sur des opinions ou convictions personnelles et non étayée ne peut satisfaire le jury qui en tient compte dans sa notation.

Bilan des interrogations

Parmi les candidats, le jury a pu détecter trois catégories de populations : quelques rares étudiants qui se sont présentés sans préparation, des professeurs déjà en activité, des étudiants ayant préparé l'épreuve et ayant bien compris les règles de l'exercice.

- Les premiers se sont contenté de résumer les textes proposés, sans identifier les liens logiques qui les unissent. L'entretien avec ces candidats a souvent révélé que leurs connaissances sur l'éducation relevaient davantage d'idées reçues et de lieux communs que de savoirs scientifiquement fondés. Dans des cas extrêmes, quelques très rares candidats ont mal géré leur temps de préparation et se sont présentés devant le jury sans même avoir pris connaissance du sujet. La durée de leur exposé a été amputée du temps nécessaire à la lecture des textes qui s'est alors effectuée au début de l'interrogation ; dans ces conditions, leur prestation s'est souvent limitée à de la paraphrase, sans aucune émancipation des textes proposés.
- Les seconds ont montré de bonnes connaissances de la politique éducative et des institutions qui la définissent et la mettent en œuvre. Ils n'ont pas hésité, pour organiser leur exposé ou participer à l'entretien, à compléter les éléments figurant dans le sujet par des exemples tirés de leur expérience personnelle. Certains d'entre eux n'ont cependant pas réussi à mettre leurs sentiments ou leurs opinions à l'épreuve de savoirs externes, notamment ceux produits par les sciences sociales. Quelques expériences présentées sur un registre affectif, voire pathétique, n'ont pas réussi à s'élever du niveau personnel au niveau professionnel.
- Les troisièmes ont montré des connaissances livresques sur les institutions et le système éducatif et ont su les mobiliser pour aborder la problématique abordée dans le corpus documentaire fourni.

Quelques uns sont même parvenus à le contextualiser en prenant appui sur une culture personnelle relative à l'histoire, la sociologie ou la philosophie.

Le jury a constaté une assez bonne qualité d'ensemble des prestations, la majorité des candidats ayant bien compris les règles de l'exercice, et s'y étant préparé. Nombre d'entre eux ont fait preuve de qualités de réflexion, d'analyse et d'esprit critique, se positionnant clairement dans le cadre des principes éthiques de la fonction publique de l'État.

Chapitre 8

Annexe 1 : Leçons d'oral (options A, B et C) proposées en 2014

Leçons d'algèbre et géométrie

Les leçons 110, 126, 127 n'ont pas été posées en 2014 mais pourront l'être en 2015

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

---

102 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

---

103 Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

---

104 Groupes finis. Exemples et applications.

---

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

---

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

---

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

---

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

---

109 Exemples et représentations de groupes finis de petit cardinal.

---

110 Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de Fourier discrète. Applications

---

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

---

121 Nombres premiers. Applications.

---

122 Anneaux principaux. Exemples et applications.

---

123 Corps finis. Applications.

---

124 Anneau des séries formelles. Applications.

---

125 Extensions de corps. Exemples et applications.

---

126 Exemples d'équations diophantiennes.

---

127 Droite projective et birapport.

---

140 Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

---

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

---

142 Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

---

143 Résultant. Applications.

---

144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

---

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

---

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

---

152 Déterminant. Exemples et applications.

---

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Applications à la réduction d'un endomorphisme en dimension finie.

---

154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

---

155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

---

156 Exponentielle de matrices. Applications.

---

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

---

158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

---

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

---

160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

---

161 Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

---

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

---

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

---

171 Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

---

180 Coniques. Applications.

---

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

---

182 Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies.

---

183 Utilisation des groupes en géométrie.

---

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Leçons d'analyse et probabilités

Les leçons 222 et 233 n'ont pas été posées en 2014 mais pourront l'être en 2015.

201 Espaces de fonctions : exemples et applications.

---

202 Exemples de parties denses et applications.

---

203 Utilisation de la notion de compacité.

---

204 Connexité. Exemples et applications.

---

205 Espaces complets. Exemples et applications.

---

206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

---

207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

---

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

---

209 Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

---

213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

---

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

---

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

---

217 Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Exemples.

---

218 Applications des formules de Taylor.

---

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

---

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

---

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

---

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

---

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

---

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

---

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applications.

---

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

---

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

---

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

---

232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

---

233 Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

---

234 Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

---

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

---

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

---

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

---

240 Produit de convolution, transformation de Fourier. Applications.

---

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

---

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

---

244 Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples.

---

245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

---

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

---

249 Suites de variables de Bernoulli indépendantes.

---

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

---

254 Espaces de Schwartz $S(\mathbf{R}^d)$ et distributions tempérées. Transformation de Fourier dans $S(\mathbf{R}^d)$ et $S'(\mathbf{R}^d)$.

---

255 Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions.

---

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

---

261 Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

---

262 Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

---

263 Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

---

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Chapitre 9

Annexe 2 : Leçons de mathématiques pour l'informatique et leçons d'informatique proposées en 2014

Leçons de mathématiques pour l'informatique

❁ ❁ ❁

104 Groupes finis. Exemples et applications.

---

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

---

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

---

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

---

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

---

121 Nombres premiers. Applications.

---

123 Corps finis. Applications.

---

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

---

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

---

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

---

152 Déterminant. Exemples et applications.

---

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Applications à la réduction d'un endomorphisme en dimension finie.

---

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

---

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

---

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

---

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

---

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

---

182 Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies.

---

183 Utilisation des groupes en géométrie.

---

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

---

203 Utilisation de la notion de compacité.

---

206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

---

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

---

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

---

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

---

218 Applications des formules de Taylor.

---

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

---

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

---

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

---

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

---

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

---

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applications.

---

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

---

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

---

232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

---

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

---

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

---

240 Produit de convolution, transformation de Fourier. Applications.

---

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

---

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

---

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

---

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Leçons d'informatique

901 Structures de données : exemples et applications.

---

902 Diviser pour régner : exemples et applications.

---

903 Exemples d'algorithmes de tri. Complexité.

---

906 Programmation dynamique : exemples et applications.

---

907 Algorithmique du texte : exemples et applications.

---

909 Langages rationnels. Exemples et applications.

---

910 Langages algébriques. Exemples et applications.

---

912 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.

---

913 Machines de Turing. Applications.

---

914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

---

915 Classes de complexité : exemples.

---

916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

---

917 Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.

---

918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre : exemples.

---

919 Unification : algorithmes et applications.

---

920 Réécriture et formes normales. Exemples.

---

921 Algorithmes de recherche et structures de données associées.

---

922 Ensembles récursifs, récursivement énumérables. Exemples.

---

923 Analyses lexicale et syntaxique : applications.

---

924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

---

925 Graphes : représentations et algorithmes.

---

926 Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.

---

927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

---

928 Problèmes NP-complets : exemples de réductions

Chapitre 10

Annexe 3 : Le programme 2015

Le programme des épreuves de l'agrégation n'est pas rédigé comme un plan de cours. Il décrit un ensemble de connaissances que le candidat doit maîtriser. Il comporte des répétitions lorsque des notions interviennent naturellement à plusieurs endroits.

D'une façon générale, les candidats doivent connaître des applications qui illustrent les notions générales. Le programme en propose ainsi un certain nombre. Il ne s'agit que de simples suggestions d'applications possibles, qui peuvent être complétées ou remplacées par d'autres.

Dans les titres 1 à 5 qui suivent, tous les corps (notés $\mathbf{K}$ en général) sont supposés commutatifs.

10.1 Algèbre linéaire

10.1.1 Espaces vectoriels

1. Espaces vectoriels, applications linéaires. Produit d'espaces vectoriels. Sous-espaces, image et noyau d'une application linéaire. Espaces quotients. Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Familles libres, génératrices ; bases. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E, groupe linéaire $GL(E)$.
2. Sous-espaces stables d'un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres.
3. Représentations linéaires d'un groupe et d'une algèbre. Irréductibilité. En dimension finie : exemples de décomposition d'une représentation linéaire en somme directe de sous-représentations, lemme de Schur.

10.1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

1. Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de bases : isomorphisme avec $\mathbf{K}^n$. Existence de supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire, rang d'un système de vecteurs. Espace dual. Rang d'un système d'équations linéaires. Transposée d'une application linéaire. Base duale. Bidualité. Orthogonalité.
2. Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme. Groupe spécial linéaire $SL(E)$. Orientation d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
3. Matrices à coefficients dans un corps. Opérations matricielles. Rang d'une matrice. Représentations matricielles d'une application linéaire. Changement de base.

   Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Méthode du pivot de Gauss. Notion de matrices échelonnées. Application à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées, à la détermination du rang d'une matrice, à la détermination d'équations définissant un sous-espace vectoriel.

Extension élémentaire de ces notions aux matrices à coefficients dans un anneau commutatif.

4. Sous-espaces stables d'un endomorphisme, lemme des noyaux. Polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'un endomorphisme, polynôme minimal. Théorème de Cayley-Hamilton. Diagonalisation, trigonalisation, applications. Sous-espaces caractéristiques, décomposition de Dunford. Exponentielle des matrices réelles ou complexes.

10.2 Groupes et géométrie

Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants seront illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

1. Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Opération d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison. Application à la détermination des groupes d'isométries d'un polyèdre régulier en dimension 3.
2. Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini. Groupe des racines complexes n-ièmes de l'unité, racines primitives.
3. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné. Application : déterminants.
4. Définition des groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire ; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal ; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.
5. Représentations d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.
   Cas d'un groupe abélien. Orthogonalité des caractères irréductibles. Groupe dual. Transformée de Fourier. Convolution. Application : transformée de Fourier rapide.
   Cas général. Théorème de Maschke. Caractères d'une représentation de dimension finie. Fonctions centrales sur le groupe, base orthonormée des caractères irréductibles. Exemples de représentations de groupes de petit cardinal.

10.3 Anneaux, corps, polynômes et fractions rationnelles

1. Anneaux (unitaires), morphisme d'anneaux, sous-anneaux. L'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs. Produit d'anneaux. Idéaux d'un anneau, anneaux quotients. Idéaux premiers, idéaux maximaux d'un anneau commutatif. Notion de module sur un anneau commutatif, d'algèbre (associative ou non) sur un anneau commutatif.
2. Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Polynômes homogènes. Polynômes symétriques.

   Décomposition en polynômes homogènes. Tout polynôme symétrique s'exprime en fonction des polynômes symétriques élémentaires.
3. Séries formelles à une indéterminée à coefficients dans un corps. Addition, multiplication, composition, éléments inversibles.
4. Corps, sous-corps. Caractéristique. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. Le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Théorème de d'Alembert-Gauss.

5. Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. Éléments irréductibles, éléments inversibles, éléments premiers entre eux. Anneaux factoriels. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun.

   Factorialité de $A[X]$ quand A est un anneau factoriel. Anneaux principaux. Théorème de Bézout. Anneaux euclidiens. Algorithme d'Euclide. Cas de l'anneau $\mathbf{Z}$ et de l'algèbre $\mathbf{K}[X]$ des polynômes sur le corps $\mathbf{K}$. Polynômes irréductibles. Exemples : polynômes cyclotomiques dans $\mathbf{Q}[X]$, critère d'Eisenstein.
6. Congruences dans $\mathbf{Z}$. Nombres premiers. Étude de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et de ses éléments inversibles. Théorème chinois et applications.
7. Racines d'un polynôme, multiplicité. Polynôme dérivé. Éléments algébriques et transcendants. Extensions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis.
8. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Sommes de Newton. Résultant. Discriminant. Application à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes.
9. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples. Cas réel et complexe. Dérivée logarithmique d'un polynôme et applications.

10.4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

1. Formes bilinéaires. Formes bilinéaires alternées. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques, forme polaire d'une forme quadratique (en caractéristique différente de 2). Éléments orthogonaux, interprétation géométrique. Formes non dégénérées. Adjoint d'un endomorphisme. Représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire.
2. Orthogonalité. Sous-espaces isotropes. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Théorème d'inertie de Sylvester. Classification dans le cas de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Procédés d'orthogonalisation.
3. Espaces vectoriels euclidiens, espaces vectoriels hermitiens. Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme. Bases orthonormales.
4. Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Exemple de générateurs du groupe orthogonal : décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphismes symétriques, endomorphismes normaux. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive. Décomposition polaire dans $GL(n, \mathbf{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 : groupe des rotations ; produit mixte ; produit vectoriel.
5. Angles en dimension 2 : angles de vecteurs, angles de droites. Théorème de l'angle inscrit. Cocyclicité.
6. Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décomposition polaire dans $GL(n, \mathbf{C})$.

10.5 Géométries affine, projective et euclidienne

Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous-espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel, points extrémaux.

Projection sur un convexe fermé.

2. Droite projective réelle ou complexe : groupe des homographies, birapport.
3. Isométries d'un espace affine euclidien. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Déplacements, antidéplacements. En dimension 2 : classification des isométries, similitudes directes et indirectes. En dimension 3 : rotations.
4. Groupe des isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers. Relations métriques dans le triangle. Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.
5. Coniques et quadriques

   Application des formes quadratiques à l'étude des coniques propres du plan affine euclidien et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3. Classification des coniques.

   Intersection de quadriques et résultant.

   Propriétés géométriques (affines et métriques) des coniques. Définition par foyer et directrice, définition bifocale.

10.6 Analyse à une variable réelle

1. Nombres réels

   Le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Topologie de $\mathbf{R}$. Sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$. Droite numérique achevée. Suites de nombres réels : convergence, valeur d'adhérence. Limites inférieure et supérieure. Suites de Cauchy. Complétude de $\mathbf{R}$. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Parties compactes de $\mathbf{R}$. Parties connexes de $\mathbf{R}$.

   Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, séries de Riemann. Séries à termes positifs. Sommation des relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées.

2. Fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles

   (a) Continuité

   Limite, continuité à droite, à gauche, continuité.

   Opérations algébriques sur les fonctions continues. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment. Étude de la continuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.

   (b) Dérivabilité

   Dérivée en un point, dérivée à droite, à gauche. Fonctions dérivables. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivabilité d'une fonction réciproque.

   Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Application au sens de variation d'une fonction.

   Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux. Formule de Leibniz. Formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.

   Calcul de développements limités et de développements asymptotiques.

3. Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux et calcul de primitives

   Propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, positivité. Sommes de Riemann. Primitives d'une fonction continue. Changement de variable. Intégration par parties. Méthodes usuelles de calcul d'intégrales.

4. Intégrales généralisées. Intégrales absolument convergentes. Intégration des relations de comparaison. Intégrales semi-convergentes.

5. Suites et séries de fonctions

   Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions : convergence normale.

   Théorèmes d'approximation de Weierstrass polynomial et de Weierstrass trigonométrique.

6. Fonctions usuelles

   Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonctions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.

7. Convexité

   Fonctions convexes d'une variable réelle. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. Caractérisations de la convexité.

8. Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Étude graphique. Points fixes attractifs. Points fixes répulsifs.

9. Polynôme d'interpolation de Lagrange.

10. Méthodes d'approximation

    Approximation quadratique : polynômes orthogonaux.

11. Méthodes de résolution approchée des équations $f(x) = 0$: dichotomie, méthode de Picard, méthode de Newton. Estimation de l'erreur pour la méthode de Newton.

12. Intégration numérique : méthode des trapèzes, de Simpson ; estimation de l'erreur.

10.7 Analyse à une variable complexe

1. Séries entières

   Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.

   Fonctions analytiques sur un ouvert. Principe des zéros isolés. Opérations algébriques sur les fonctions analytiques. Composition.

   Exponentielle complexe ; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe.

   Développement en série entière des fonctions usuelles.

2. Fonctions d'une variable complexe

   Fonctions holomorphes. Conditions de Cauchy-Riemann. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé. Déterminations du logarithme.

   Indice d'un chemin fermé $\mathscr{C}^1$ par morceaux par rapport à un point.

   Formules de Cauchy. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.

   Singularités isolées. Séries de Laurent. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus.

   Suites et séries de fonctions holomorphes.

10.8 Calcul différentiel

1. Topologie de $\mathbf{R}^n$

   Parties ouvertes, fermées. Voisinages. Parties compactes. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

   Parties connexes. Normes usuelles. Limites. Applications continues. Complétude de $\mathbf{R}^n$.

2. Fonctions différentiables

   Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur.

   Dérivées partielles. Opérations algébriques sur les applications différentiables. Composition d'applications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe $\mathscr{C}^1$.

   Matrice jacobienne. Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Dérivées partielles d'ordre k. Interversion de l'ordre des dérivations. Formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Young.

   Étude locale des applications à valeurs dans $\mathbf{R}$. Développements limités. Recherche des extremums locaux.

   Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.

3. Équations différentielles

   Équations différentielles sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$, de la forme $X' = f(t, X)$. Théorème de Cauchy-Lipschitz. Solutions maximales. Problème de l'existence globale. Dépendance par rapport aux conditions initiales.

   Portrait de phase, comportement qualitatif.

   Systèmes différentiels linéaires.

   Méthode de variation de la constante. Cas des coefficients constants. Équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à un.

10.9 Calcul intégral

1. Définition des espaces mesurables, tribu produit, cas particulier des tribus boréliennes. Définition d'une mesure, cas particuliers de la mesure de comptage, de la mesure de Lebesgue (construction admise) et des mesures de probabilité. Définition d'une fonction mesurable ; opérations élémentaires sur les fonctions mesurables.
2. Intégration

   Intégrale des fonctions mesurables positives, théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée. Fonctions intégrables à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Continuité, dérivabilité, holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Espaces L^p, où $1 \leqslant p \leqslant \infty$: inégalités de Minkowski, Hölder et Jensen. Théorème de Fubini.

   Changement de variables dans une intégrale multiple. Calculs d'aires de domaines plans et de volumes.

   Convolution. Régularisation et approximation par convolution.
3. Analyse de Fourier

   Séries de Fourier des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de Riemann-Lebesgue. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de Dirichlet et de Fejer. Théorie L^2 : convergence en moyenne quadratique, formule de Parseval.

10.10 Probabilités

1. Définition d'un espace probabilisé : événements, tribus, mesure de probabilité. Indépendance d'événements et de tribus. Loi du 0-1, lemmes de Borel-Cantelli.
2. Probabilités conditionnelles : définition, formule des probabilités totales et théorème de Bayes.
3. Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire : loi discrète et loi absolument continue. Fonction de répartition et densité.

4. Exemples de variables aléatoires : variable de Bernoulli, binomiale, de Poisson, uniforme, exponentielle, de Gauss.
5. Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles, théorème de transfert.
6. Indépendance de variables aléatoires. Loi conditionnelle d'une variable par rapport à une autre.
7. Transformations exponentielles de lois : fonction caractéristique, transformée de Laplace, fonction génératrice. Liens avec l'indépendance et la convolution, application aux sommes de variables aléatoires indépendantes.
8. Convergences de suites de variables aléatoires : en probabilité, dans L^p, presque sûrement, en loi.
9. Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres, applications en statistiques.
10. Théorème de Lévy, théorème central limite, applications en statistiques.

10.11 Analyse fonctionnelle

1. Topologie et espaces métriques

   Topologie d'un espace métrique. Topologie induite.

   Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues. Homéomorphismes.

   Produit fini d'espaces métriques.

   Compacité. Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.

   Propriétés métriques : applications lipschitziennes, applications uniformément continues.

   Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.
2. Espaces vectoriels normés sur **R** ou **C**.

   Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie. Espaces de Banach. Séries absolument convergentes dans un espace de Banach.

   Applications linéaires continues, norme.

   Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique, à valeurs dans un espace Banach.

   Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de Riesz ; théorème d'Ascoli.

   Complétude des espaces L^p, où $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
3. Espaces de Hilbert

   Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

   Dual d'un espace de Hilbert.

   Cas des espaces L^2.

   Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases : fonctions trigonométriques, polynômes orthogonaux.

   Exemples d'applications linéaires continues entre espaces de Hilbert.

   Théorème de Lax Milgram. Espace $H_0^1(]0,1[)$ et application au problème de Dirichlet en dimension 1 : $u - \frac{d}{dx}(a\frac{d}{dx}u) = f$ avec $f \in L^2(]0,1[)$, $a \in L^\infty(]0,1[)$ essentiellement positive et minorée par $m > 0$.
4. Espace de Schwartz $S(\mathbf{R}^d)$ des fonctions à décroissance rapides sur $\mathbf{R}^d$.

   Normes $N_p(f)$ (sup des normes uniformes des produits des dérivées partielles itérées d'ordre inférieur à p de f par les monômes de degré inférieur à p).

   Espace $S'(\mathbf{R}^d)$ des distributions tempérées.

   Dérivation des distributions tempérées.

Cas particulier des distributions à support compact dans $\mathbf{R}^d$. Solution fondamentale du Laplacien.
Convolution de distributions dans le cas où l'une d'entre elles est à support compact.
Transformation de Fourier dans S et dans S'.
Transformation de Fourier sur les espaces $L^1(\mathbf{R}^d)$ et $L^2(\mathbf{R}^d)$.

10.12 Géométrie différentielle

Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Définitions équivalentes : graphe local, paramétrisation locale, équation locale. Espace tangent. Notions métriques : longueur d'un arc, paramétrisation normale, courbure d'un arc en dimensions 2 et 3. Gradient.
Tracé de courbes usuelles.
Surfaces dans $\mathbf{R}^3$: position par rapport au plan tangent.
Définition de la divergence d'un champ de vecteurs.
Extremums locaux d'une fonction définie sur une sous-variété (extremums liés), multplicateurs de Lagrange.

ÉPREUVES ÉCRITES

Les épreuves écrites comportent deux épreuves :

A. Composition de mathématiques générales

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres 1 à 12 ci-dessus.

B. Composition d'analyse et probabilités

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres 1 à 12 ci-dessus.

ÉPREUVES ORALES

Les candidats ont le choix entre quatre options :

Option A : probabilité et statistiques

Option B : calcul scientifique

Option C : algèbre et calcul formel

Option D : informatique

Épreuves orales des options A, B, C

1re Épreuve : Épreuve d'Algèbre et Géométrie

2e Épreuve : Épreuve d'Analyse et Probabilités

Le programme de ces deux épreuves, communes aux options A, B et C, est constitué des titres 1 à 12 et du programme complémentaire ci-dessous.

Programme complémentaire pour les épreuves orales options, A, B, C et D

- Résolution de systèmes d'équations linéaires ;
  Normes subordonnées, notion de conditionnement, rayon spectral, décomposition LU, méthode de Jacobi. Exemple d'opérateurs aux différences finies. Lien avec l'optimisation de fonctionnelles convexes en dimension finie, méthode du gradient à pas constant pour les systèmes linéaires symétriques définis positifs, moindres carrés. Recherche d'éléments propres : méthode de la puissance, décomposition en valeurs singulières, théorème de Gershgörin-Hadamard.
- Méthode numérique pour la résolution de systèmes d'équations non linéaires. Méthode de Newton : définition, vitesse de convergence, estimation de l'erreur.
- Intégration numérique : méthode des rectangles, des trapèzes, de Simpson ; estimation de l'erreur.
- Équations différentielles ordinaires. Stabilité des points critiques. Aspects numériques du problème de Cauchy : méthodes d'Euler explicite et implicite, consistance, stabilité, convergence, ordre.

3e Épreuve : Épreuve de Modélisation

L'épreuve porte sur le programme constitué des titres 1 à 12, du programme complémentaire ci-dessus, d'un programme commun aux options A, B et C (explicité ci-dessous) et sur un programme spécifique à l'option choisie.

L'épreuve consiste en un exposé de modélisation mathématique construit en partant d'un texte proposé par le jury. Le programme définit un cadre de théories mathématiques et de techniques d'application adaptées pour l'épreuve. Ce programme comporte une partie commune aux options A, B et C et, pour chacune de ces options, une partie spécifique.

Modélisation : programme de la partie commune aux options A, B, C

À partir de la session 2015, seuls les logiciels libres seront disponibles. Le site de l'agrégation externe de mathématiques (agreg.org) et le rapport du Jury préciseront suffisamment à l'avance la liste des logiciels disponibles et la nature de leur environnement.

À l'aide d'un ou plusieurs de ces logiciels, les candidats devront montrer leur capacité à :

- mettre en œuvre avec précision et rigueur les concepts et outils mathématiques au programme,
- distinguer les représentations exactes ou approchées des objets mathématiques
- estimer le coût et les limitations d'algorithmes simples : complexité, précision
- analyser la pertinence des modèles.

Le programme de cette partie comprend les méthodes numériques, probabilistes, statistiques et symboliques citées dans les programmes des épreuves écrites, dans le programme complémentaire pour l'oral et celles citées dans les paragraphes suivants.

1. Calcul numérique et symbolique
   Utilisation des logiciels au programme : simulation, intégration, différentiation, calcul de sommes et d'intégrales, résolution d'équations algébriques et différentielles.
2. Probabilités discrètes : tirages uniformes ; échantillons.
3. Chaînes de Markov homogènes à espace d'états finis : définition, irréductibilité, apériodicité.
4. Validation et précision des résultats.
   Méthodes numériques : notion de conditionnement des systèmes linéaires.

Précision du schéma numérique d'Euler explicite à pas constant.

Moyenne et variance empirique.

Méthode de Monte Carlo : vitesse de convergence ; applications au calcul d'intégrales multiples (exemple : calcul de volumes).

5. Moindres carrés linéaires (sans contraintes).

Programme spécifique de l'option A

1. Utilisation de lois usuelles (voir section 10.4, loi géométrique) pour modéliser certains phénomènes aléatoires. Exemples : temps d'attente ou durée de vie, erreurs de mesure, sondages... Méthodes de simulation de variables aléatoires.
2. Chaînes de Markov à espace d'états finis. Classification des états. Convergence vers une loi stationnaire (théorème ergodique et théorème central limite admis).

   Chaînes de Markov homogènes à espace d'états dénombrable, transience, récurrence positive ou nulle, exemple de la marche aléatoire simple.
3. Lois de Poisson, exponentielle et Gamma, construction et propriétés du processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$.
4. Espérance conditionnelle, définition des martingales, temps d'arrêt. Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence presque sûre et L^2 des martingales à temps discret.
5. Échantillons, moments empiriques, loi et fonction de répartition empiriques.
6. Applications des théorèmes de convergences à l'estimation (lois des grands nombres, théorème central limite, utilisation du lemme de Slutsky). Définition et construction d'intervalles de confiance.
7. Estimation paramétrique. Estimation par maximum de vraisemblance : définition et exemples.
8. Vecteurs gaussiens : définition, simulation en dimension 2, théorème de Cochran. Théorème central limite dans $\mathbb{R}^n$.
9. Modèle linéaire gaussien : calculs par moindres carrés, régression linéaire simple ou multiple, exemples d'utilisation.
10. Tests paramétriques (test du rapport de vraisemblance). Tests d'ajustement (tests du χ^2, tests de Kolmogorov-Smirnov). Exemples d'utilisation.

Programme spécifique de l'option B.

1. Équations différentielles ordinaires. Espaces de phase. Étude qualitative. Stabilité des points critiques.

   Aspects numériques du problème de Cauchy : mise en œuvre des méthodes d'Euler, utilisation de la méthode de Runge-Kutta 4.
2. Notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles classiques en dimension un.

   Équation de transport (advection) linéaire : méthode des caractéristiques.

   Équations des ondes et de la chaleur : résolution par transformée de Fourier et séparation des variables. Aspects qualitatifs élémentaires.

   Équations elliptiques.

   Exemples de discrétisation de problèmes aux limites en dimension un par la méthode des différences finies : notions de consistance, stabilité, convergence, ordre.

3. Optimisation et approximation
   Interpolation de Lagrange.
   Extremums des fonctions réelles de n variables réelles : multiplicateurs de Lagrange. Mise en œuvre de l'algorithme de gradient à pas constant.
   Méthode des moindres carrés et applications.

Programme spécifique de l'option C.

1. Représentation et manipulation des entiers longs, flottants multiprécision, nombres complexes, polynômes, éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et des corps finis. Addition, multiplication, division, extraction de racine carrée.
2. Algorithmes algébriques élémentaires.
   Exponentiation ($n \mapsto a^n$, pour $n \in \mathbf{N}$), algorithme d'Euclide étendu.
   Test de primalité de Fermat.
3. Matrices à coefficients dans un corps.
   Méthode du pivot de Gauss, décomposition LU. Calcul du rang, du déterminant.
   Exemples de codes correcteurs linéaires : codes de répétition, codes de Hamming binaires.
4. Matrices à coefficients entiers.
   Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Application aux systèmes linéaires sur $\mathbf{Z}$ et aux groupes abéliens de type fini.
5. Polynômes à une indéterminée.
   Évaluation (schéma de Horner), interpolation (Lagrange, différences finies).
   Localisation des racines dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$: majoration en fonction des coefficients.
6. Polynômes à plusieurs indéterminées.
   Résultants, élimination ; intersection ensembliste de courbes et de surfaces algébriques usuelles.
7. Estimation de la complexité des algorithmes précités dans le pire des cas. Aucune formalisation d'un modèle de calcul n'est exigée.

Épreuves de l'option D : informatique

1re Épreuve : Mathématiques

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 1 à 12 et du programme complémentaire de l'oral. Les candidats se verront proposer deux sujets, dans un corpus d'algèbre, de géométrie, d'analyse et de probabilités.

2e Épreuve : Informatique Fondamentale

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 13 à 16 ci-après.

3e Épreuve : Analyse de système informatique

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 13 à 16 ci-après.

Deux textes décrivant une classe de systèmes informatiques sont proposés au candidat qui doit choisir l'un des deux. La compréhension de ces textes et leur exploitation dans cette épreuve requièrent les connaissances en informatique correspondant aux matières enseignées en L1-L2 de Maths-Info ou dans l'option informatique des classes préparatoires auxquelles s'ajoutent celles du programme.

L'objectif de l'épreuve est d'évaluer la capacité des candidats à mettre en place un processus d'analyse d'un système informatique dans un contexte applicatif. Ce processus s'appuie sur les notions au programme.

Les langages informatiques C, Caml, Python et Java seront disponibles pour cette épreuve et sa préparation. Le rapport du Jury précisera la nature de l'environnement logiciel.

Programme spécifique de l'option D.

L'ensemble du programme correspond à 250h de formation (cours et/ou TD et/ou TP) de niveau Licence et première année de Master, à partir des acquis des deux premières années de Licence ou de l'option informatique des classes préparatoires. L'objectif de cette option est de s'assurer que les candidats maîtrisent les fondements essentiels et structurants de la science informatique.

Le programme n'est pas rédigé comme un plan de cours, il décrit les notions que les candidats doivent maîtriser.

Le programme n'impose aucun langage de programmation particulier. Les candidats doivent maîtriser au moins un langage et son environnement de programmation parmi CAML, Java ou C.

10.13 Algorithmique fondamentale

Cette partie insiste sur les notions de preuve et de complexité des algorithmes. Elle est relativement indépendante de tout langage de programmation, mais le candidat doit être capable de mettre en oeuvre sur machine les structures de données et les algorithmes étudiés.

1. Structures de données. Types abstraits : définition des tableaux, listes, piles, files, arbres, graphes (orientés et non orientés), ensembles, dictionnaires, file de priorité. Interface abstraite et implantation (implémentation) concrète.
2. Schémas algorithmiques classiques : approche gloutonne, diviser pour régner, programmation dynamique. Exemples : algorithme de Dijkstra, tri-fusion, plus longue sous-séquence commune.
3. Complexité. Analyse des algorithmes : relations de comparaison O, Θ et Ω. Analyse dans le pire cas. Exemple d'analyse en moyenne : recherche d'un élément dans un tableau.
4. Preuve d'algorithmes : correction, terminaison. Méthodes de base : assertions, pré-post conditions, invariants et variants de boucles, logique de Hoare, induction structurelle.
5. Algorithmes de tri et de recherche. Méthodes de tri par comparaison (tri-fusion, tri-tas, tri rapide), arbre de décision et borne inférieure du tri par comparaisons. Méthodes de recherche séquentielle et dichotomique. Arbres binaires de recherche. Arbres équilibrés : définition, relation entre la taille et la hauteur, maintien de l'équilibre.
6. Algorithmes de graphes. Parcours de graphes : algorithmes de parcours en largeur, en profondeur, algorithme de Dijkstra. Arbres couvrants : algorithmes de Prim et de Kruskal. Fermeture transitive.

10.14 Automates et langages

1. Automates finis. Langages reconnaissables. Lemme d'itération. Existence de langages non reconnaissables. Automates complets. Automates déterministes. Algorithme de déterminisation. Propriétés de clôture des langages reconnaissables.
2. Expressions rationnelles. Langages rationnels. Théorème de Kleene.

3. Automate minimal. Résiduel d'un langage par un mot. Algorithme de minimisation.
4. Utilisation des automates finis : recherche de motifs, analyse lexicale.
5. Langages algébriques. Lemme d'Ogden. Existence de langages non algébriques. Grammaires algébriques. Propriétés de clôture des langages algébriques.
6. Automates à pile. Langages reconnaissables par automates à pile.
7. Utilisation des automates à pile : analyse syntaxique. Grammaires LL(1).

10.15 Calculabilité, décidabilité et complexité

1. Définition des fonctions primitives récursives ; schémas primitifs (minimisation bornée). Définition des fonctions récursives ; fonction d'Ackerman.
2. Définitions des machines de Turing. Équivalence entre classes de machines (exemples : nombre de rubans, alphabet). Équivalence avec les fonctions récursives.
3. Universalité. décidabilité, Indécidabilité. Théorème de l'arrêt. Théorème de Rice. Réduction de Turing. Définitions et caractérisations des ensembles récursifs, récursivement énumérables.
4. Complexité en temps et en espace : classe P. Machines de Turing non déterministes : classe NP. Acceptation par certificat. Réduction polynomiale. NP-complétude. Théorème de Cook.

10.16 Logique et démonstration

1. Calcul propositionnel : syntaxe et sémantique. Tables de vérité, tautologies, formes normales, forme clausale. Théorème de complétude du calcul propositionnel.
2. Logique du premier ordre : aspects syntaxiques. Langages, termes, formules. Variables libres et variables liées, substitutions, capture de variables.
3. Réécriture : filtrage syntaxique du premier ordre, définition de l'unification syntaxique. Confluence, confluence locale, formes normales, paires critiques, lemme de Newman, algorithme de complétion de Knuth-Bendix.
4. Logique du premier ordre : systèmes formels de preuve. Calcul des séquents, déduction naturelle. Algorithme d'unification des termes. Preuves par résolution.
5. Logique du premier ordre : aspects sémantiques. Interprétation d'une formule dans un modèle. Validité, satisfiabilité. Théories cohérentes, théories complètes. Théories décidables, indécidables. Exemples de théories : égalité, arithmétique de Peano. Théorème de complétude du calcul des prédicats du premier ordre.

Chapitre 11

Annexe 4 : La bibliothèque de l'agrégation

ABELSON H. **SUSSMAN G. J.** **SUSSMAN J.**	Structure and interpretation of computer programs	MIT Press
AEBISCHER B.	L2 Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique	Vuibert
AEBISCHER B.	L3 Géometrie	Vuibert
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices	Masson
ALBERT L. **Collectif**	Cours et exercices d'informatique	Vuibert
ALDON G.	Mathématiques dynamiques	Hachette
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	Dunod
ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations	Cambridge
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe	Cassini
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques – Tome 1A - Topologie – Tome 1B - Fonctions numériques – Tome 2 - Suites et séries numériques – Tome 3 - Analyse fonctionnelle – Tome 5 - Algèbre générale, polynômes – Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie – Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie	Ellipses

ANDREWS G.	Number Theory	DOVER
APPLE A.W.	Modern compiler implementation – in C – in Java – in ML	CAMBRIGDE
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG	ESKA
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie – Tome I – Tome II	ELLIPSES
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse	DUNOD
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4	DUNOD
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques – 1. Algèbre – 2. Analyse – 3. Compléments d'analyse – 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	DUNOD
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	lectures on partial differential equations	SPINGER
ARNOLD A. **GUESSARIAN I.**	Mathématiques pour l'informatique	EDISCIENCES
ARTIN E.	Algèbre géométrique	GAUTHIER-VILLARS
ARTIN E.	Algèbre géométrique	GABAY

ARTIN M.	Algebra	Prentice Hall
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée – Tome 1 – Tome 2	PUF
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité	Masson
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates	Masson
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	Belin
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel	Masson
BAASE S. **VAN GELDER A.**	Computer algorithms Introduction to design & analysis	Addison Wesley
BADOUEL E. **BOUCHERON S.** **DICKY A., PETIT A.** **SANTHA M., WEIL P., ZEITOUN M.**	Problèmes d'informatique fondamentale	Springer
BACAER N.	Histoires de mathématiques et de populations	Cassini
BAJARD J.C.	Exercices d'Algorithmique	ITP
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique	Hermann
BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation)	Belin
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	Dunod

BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre	Diderot, éditeur Arts et Sciences
BASS J.	Cours de Mathématiques – Tome 1 – Tome 2	Masson
BHATIA R.	Matrix Analysis	Springer
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology	Springer
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	Mc Graw Hill
BENIDIR M. **BARRET M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	Dunod
BENOIST J. et Alii	Math L2, Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés	Pearson Education
BERCU B. **CHAFAI D.**	Modélisation stochastique et simulation	Dunod
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle	Armand Colin
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie – Index – 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs – 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères – 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes – 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques – 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie tome 2	Nathan

BERGER M.	Géométrie vivante	Cassini
BERLINE N. **SABBAH C.**	Groupes finis, journées X-UPS 2000	Editions de l'X
BHATIA R.	Matrix analysis 1	Springer
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics	Prentice Hall
BIDEGARAY B. **MOISAN L.**	Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation	Springer
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics	Oxford Science Publications
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF
BILLINGSLEY P.	Probability and measure	Copyrighted Material
BOAS R.	A primer of real functions	Mathematical association of America
BOISSONAT J.D. **YVINEC M.**	Géométrie algébrique	Ediscience
BON J.L.	Fiabilité des systèmes	Masson
BONNANS J.F. **GILBERT J.C.** **LEMARECHAL C.** **SAGASTIZABAL C.** **PENNEQUIN D.**	Optimisation numérique	Springer
BOUALEM H. **BROUZET J.C.** **ELSNER B.** **KACZMAREK L.**	Mathématique L1	Pearson Education

BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique – Topologie générale, chapitres V à X – Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII – Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III – Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV	HERMANN
BOURGADE P.	Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005	CASSINI
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes	HERMANN
BREMAUD P.	Introduction aux probabilités	SPRINGER
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	MASSON
BRIANE M. **PAGES G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition	VUIBERT
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	ARMAND COLIN
BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics	CAMBRIDGE
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire – 1. Espaces vectoriels , Polynômes – 2. Matrices et réduction	ELLIPSES
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	DUNOD
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF
CANDELPERGHER B.	Calcul intégral	CASSINI
CARREGA J.C.	Théorie des corps	HERMANN

CARTAN H.	Calcul différentiel (1971)	Hermann
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1977)	Hermann
CARTAN H.	Formes différentielles	Hermann
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	Hermann
CARTON O.	Langages formels, calculabilité et complexité	Vuibert
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	Prentice Hall
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics I	Wiley Interscience
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics II	Wiley Interscience
CHABAT B.	Introduction à l'analyse complexe	Mir
CHAMBERT-LOIR A.	Algèbre corporelle	Editions de l'X
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	Masson
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation – Analyse 2 – Analyse 3	Masson
CHARPENTIER E. **NIKOLSKI N.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui – Vol 1 – Vol 2 – Vol 3 – Vol 4	Ellipses
CHARLES J. **MBEKHTA M.** **QUEFFELEC H.**	Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs	Ellipses

CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	Masson
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	Springer Verlag
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	Masson
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	Hermann
CHOIMET D. **QUEFFELEC H.**	Analyse mathématique	Cassini
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	– Algèbre 1 – Algèbre 2	Ellipses
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	Masson
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes	Vuibert
COHN P.M.	Algebra Volume 1	John Wiley
COLLECTIF	Calcul Mathématique avec SAGE	Sagebook
COLLET H. **GIRARD B.** **PERRIER C.**	Mathématique BTS industriel	Nathan
COLLET P.	Modeling binary data	Chapman and Hall
COLMEZ P.	Éléments d'algèbre et d'analyse	Editions de l'X
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique – 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats – 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles	Dunod

CORMEN T. H. **LEISERSON C. E.** **RIVEST R. L.** **STEIN C.**	Introduction à l'algorithmique	Dunod
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités	Cassini
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics – Volume 1 – Volume 2	John Wiley
COUSINEAU G. **MAUNY M.**	Approche fonctionnelle de la programmation	Ediscience
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	John Wiley
COX D.A.	Galois Theory	Wiley Interscience
CVITANOVIC P.	Universality in Chaos	Institute of Physics Publishing
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	– Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe – Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe	Masson
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	Masson
DAMPHOUSSE P.	Petite introduction à l'algorithmique	ELLIPSES
DANTZER J.F.	Mathématiques pour l'agrégation interne	Vuibert
DARTE A. **VAUDENAY S.**	Algorithmique et optimisation	Dunod
DAVID R. **NOUR K.** **RAFFALI C.**	Introduction à la logique Théorie de la démonstration	Dunod

DE KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	Modulo
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale	Que-sais-je ? PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	Dunod
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité	Springer
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments	Jacques Gabay
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU Grenoble
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	Ellipses
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	Cassini
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre	Cassini
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications	Springer
DESCHAMPS **WARUSFEL** **MOULIN, RUAUD** **MIQUEL, SIFRE**	Mathématiques, cours et exercices corrigés – 1ère année MPSI, PCSI, PTSI – 2ème année MP, PC, PSI	Dunod
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF
DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2	Ellipses

DI MENZA L.	Analyse numérique des équations aux dérivées partielles	Cassini
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. – Fondements de l'analyse moderne – Éléments d'Analyse Tome 2.	Gauthier-Villars
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle – Première année – Deuxième année	Gauthier-Villars
DOWEK G. **LEVYH J.-J**	Introduction à la théorie des langages de programmation	Editions de l'X
DRAPPER N. **SCHMITH H.**	Applied regression analysis	Wiley
DUBUC S.	Géométrie plane	PUF
DUCROCQ A. **WARUSFEL A.**	Les Mathématiques, plaisir et nécessité Un parcours guidé dans l'univers des mathématiques	Vuibert
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages	Vuibert
DUTERTRET G.	Initiation à la cryptographie	PUF
DYM H. **Mac KEAN H.P.**	Fouriers series and integrals	Academics Press
EBBINGHAUS, HERMES HIRZEBRUCH KOECHER LAMOTKE, MAINZER NEUKIRSCH, PRESTEL, REMMERT	Les Nombres	Vuibert

EIDEN J.D.	Géométrie analytique classique	Calvage et Mounet
EL HAJ LAAMRI	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions	Dunod
EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles	Ellipses
ENGEL A.	Solutions d'expert – Vol 1 – Vol 2	Cassini
EPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes – Analyse. Volume 1 – Algèbre.	Cédic/Nathan
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques – Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles – Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse – Analyse 2 : Éléments de topologie générale	Hatier
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X	Ellipses
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie	Calvage et Mounet
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	Ellipses
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications – Volume 1 – Volume 2	John Wiley
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	Masson

FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions – Tome 1 - Topologie – Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle – Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples – Tome 4 - Séries, équations différentielles	Vuibert
FONTANEZ F. **RANDÉ B.**	Les clefs pour les Mines	Calvage et Mounet
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales – Algèbre – Analyse 1 – Analyse 2	Ellipses
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 2	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 3	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 1	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 2	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 3	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1	Masson
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur	Hermann
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR Maths Bordeaux

FRESNEL J.	Géométrie	IREM de Bordeaux
FRESNEL J.	Groupes	Hermann
FRESNEL J. **MATIGNON M.**	Algèbre et géométrie	Hermann
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie	Hermann
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	Springer
FULTON W.	Algebraic Topology A first course	Springer
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	Cassini
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices – Tome 1 – Tome 2	Dunod
GAREY M. **JOHNSON D.**	Computers and intractability	Freeman
GARLING D.J.H.	Inequalities : a journey into linear analysis	Cambridge
GATHEN (von zur) J. **GERHARD .J**	Modern computer algebra	Cambridge University press
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	Vuibert
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	Springer
GINDIKIN S.	Histoires de mathématiciens et de physiciens	Cassini
GRANGON Y.	Informatique, algorithmes en Pascal et en langage C	Dunod
GRENIER J.P.	Débuter en algorithmique avec Matlab et Scilab	Ellipses

GOBLOT R.	Algèbre commutative	Masson
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	Masson
GODEMENT R.	Analyse – Tome 1 – Tome 2 – Tome 3	Springer
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	Hermann
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations	Wiley
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation – Topologie et Analyse fonctionnelle – Calcul différentiel	Ellipses
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales – Tome 1 - Algèbre – Tome 2 - Topologie et analyse réelle – Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel – Tome 4 - Géométrie affine et métrique – Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes	PUF
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' – Algèbre – Analyse	Ellipses
GRAHAM R. **KNUTH D.** **PATASHNIK O.**	Concrete mathematics	Adison-Wesley
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	Hermann
GRAMAIN A.	Intégration	Hermann
GRANJON Y.	Informatique, algorithmes en pascal et en C	Dunod
GRENIER J.P.	Debutér en algorithmique avec Matlab et Scilab	Ellipses

GREUB W.	Linear Algebra	Springer Verlag
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction)	Oxford
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	Wiley
GUSFIELD D.	Algorithms on strings, trees and sequences	Cambridge university press
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse	Ellipses
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands	Cassini
HAMMAD P.	Cours de probabilités	Cujas
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités	Cujas
HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing	Springer
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers	Oxford
HAREL D.	Computer LTD. What they really can't do	Oxford
HAREL D. **FELDMAN Y.**	Algorithmics. The spirit of computing	Addison Wesley
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications	Masson
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis – Volume 1 – Volume 2 – Volume 3	Wiley-Interscience
HERVE M.	Les fonctions analytiques	PUF

HINDRY M.	Arithmétique	Calvage et Mounet
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle	Masson
HOCHART **SCIUTO**	Algèbre Analyse Géométrie (MPSI/PCSI)	Vuibert
HOPCROFT J.E. **MOTWANI R.** **ULLMAN J. D.**	Introduction to automata theory, Languages and Computation	Addison Wesley
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	Belin
INGRAO B.	Coniques projectives, affines et métriques	Calvage et Mounet
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	Springer Verlag
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy)	Vuibert-Springer
ITARD J.	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra – Tome I – Tome II	Freeman and Co
JACOD J. **PROTTER P.**	L'essentiel en théorie des probabilit és	Cassini
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes	Cassini
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis	Dover
KERBRAT Y. **BRAEMER J-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces	Hermann
KERNIGHAN B. **RITCHIE D.**	Le langage C	Dunod

KNUTH D.E.	The art of computer programming – Volume 1 : Fundamental algorithms – Volume 2 : Seminumerical algorithms – Volume 3 : Sorting and Searching	Addison-Wesley
KOBLITZ N.	A course in number theory and cryptography quantite1	
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	Ellipses
de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	Modulo
KÖRNER T.W.	Fourier analysis	Cambridge
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis	Cambridge
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	Dunod
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens	Casssini
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
KRIVINE J.L.	Théorie des ensembles	Cassini
KUNG J.P.S. **ROTA G-C.** **YAN C.H.**	Combinatorics : the Rota way	Cambridge
LACOMME P. **PRINS C.** **SEVAUX M.**	Algorithmes de graphes	Eyrolles
LACROIX Y. **MAZLIAK L.**	Probbilités, variables aléatoires...Niveau M1	Ellipses
LADEGAILLERIE Y.	Géométrie affine, projective, euclidienne et analagmatique	PUF
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUF

LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution	Masson
LANG S.	Algèbre linéaire – Tome 1 – Tome 2	InterEditions
LANG S.	Algebra	Addison-Wesley
LANG S.	Linear Algebra	Addison-Wesley
LAROCHE F.	Escapades arithmétiques	Ellipses
LASCAR D.	La théorie des modèles en peu de maux	Cassini
LAVILLE G.	Courbes et surfaces	Ellipses
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses
LAX P. D.	Funnctional analysis	Wiley
LAX P. D.	Linear Algebra	Wiley
LE BRIS G.	Maple Sugar : une initiation progressive à Maple	Cassini
LEBOEUF C. **GUEGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités	Ellipses
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques	Jacques Gabay
LEHMANN D. **SACRÉ C.**	Géométrie et topologie des surfaces	PUF

LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation	MASSON
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales – Tome 1 : Topologie – Tome 3 : Intégration et sommation – Tome 4 : Analyse en dimension finie – Tome 5 : Analyse fonctionnelle	MASSON
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS – Tome I - Algèbre 1 – Tome 2 - Algèbre et géométrie – Tome 3 - Analyse 1 – Tome 4 - Analyse 2	ELLIPSES
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques – Tome 1 pour M-M' : Algèbre – Tome 1 pour A-A' : Algèbre – Tome 2 : Analyse – Tome 3 : Géométrie et cinématique – Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples	DUNOD
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	MASSON
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie	ARMAND COLIN
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition)	VUIBERT
LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus	VUIBERT
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words	CAMBRIDGE
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre – 1 : Structures fondamentales – 2 : Les grands théorèmes	GAUTHIER-VILLARS

MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory	Springer
MAKAROV B.M. **GOLUZINA M.G.** **LODKIN A.A.** **PODKORYTOV A.N.**	Problèmes d'analyse réelle	Cassini
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	Masson
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	Masson
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	Hermann
Manuels Matlab	– Using Matlab version 5 – Using Matlab version 6 – Statistics Toolbox – Using Matlab Graphics	
MANSUY R. **RANDÉ B.**	Les clefs pour l' X	Calvage et Mounet
MARCE S. **DEVAL-GUILLY E.**	Problèmes corrigés des ENSI	Ellipses
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle – Tome 2 : Exercices et corrigés – Tome 3 : Exercices et corrigés – Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	De Boeck Université
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses
MENEZES A.J. **van OORSCHOT P.C.** **VANSTONA S.A.**	Handbook of applied cryptography	CRC Press
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	Springer
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités	Dunod

MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique	Ellipses
MEUNIER P.	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés – Tome 2	PUF
MEUNIER P.	Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie	Ellipses
MIGNOTTE M.	Algèbre concrète, cours et exercices	Ellipses
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF
MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages	Cambridge
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes	Cassini
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes	Calvage et Mounet
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	Hermann
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions	Ellipses
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries	Ellipses
MONIER J.M.	Cours de mathématiques – Analyse 1 MPSI, PCSI, PTSI – Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI – Analyse 3 MP, PSI, PC, PT – Analyse 4 MP, PSI, PC, PT – Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI – Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT – Exercices d'analyse MPSI – Exercices d'analyse MP – Exercice d'algèbre et géométrie MP	Dunod

MUTAFIAN C.	Le défi algébrique – Tome 1 – Tome 2	Vuibert
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel	Seuil
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	Masson
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités	Masson
NIVEN I.	Irrational numbers	Mathematical Association of America
NORRIS J.R.	Markov chains	Cambridge
OŔOURKE J.	Computational géométrie in C (second édition)	Cambridge
OPREA J.	Differential geometry	Prentice hall
OUVRARD J.Y.	– Probabilités 1 (capes, agrégation) – Probabilités 2 (maîtrise, agrégation)	Cassini
PAPADIMITRIOU C.H.	Computational complexity	Pearson Education
PAGES G. **BOUZITAT C.**	En passant par hasard . . . Les probabilités de tous les jours	Vuibert
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs	Springer
PARDOUX E.	Processus de Markov et applications	Dunod
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course	Dover
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	Springer

PERRIN D.	Cours d'Algèbre	Ellipses
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ENSJF
PERRIN D.	Mathématiques d'école	Cassini
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	Cassini
PETAZZZONI B.	Seize problèmes d'informatique	Springer
PETROVŠEK **WILF** **ZEILBERGER**	A=B	A.K. Peters
PEVZNER P.	Computational molecular biology- an algorithmic approach	MIT press
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis – Volume I – Volume II	Springer Verlag
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	Ellipses
POUNDSTONE.	Le dilemme du prisonnier	Cassini
PRASOLOV V.	Polynomials	Springer
PRASOLOV V.	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaires	Cassini
PREPARATA F.P. **SHAMOS M.I.**	Computational géométrie - an introduction	Springer
PRESS W. **FLANNERY B.** **TEUKOLSKI S.** **VETTERLING W.**	Numerical recipes in Pascal	Cambridge
PUTZ J.F.	Maple animation	Chapman and Hall

QUEFFELEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse	Dunod
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first curse in numerical analysis	Internatinal Student Edition
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales – 1- Algèbre – 2- Algèbre et applications à la géométrie – 3- Topologie et éléments d'analyse – 4- Séries et équations différentielles – 5- Applications de l'analyse à la géométrie	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions – Algèbre – Analyse 1 – Analyse 2	Masson
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence	Dunod
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application	Wiley
RANDÉ B.	Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan	Cassini
RANDÉ B. **TAIEB F.**	Les clefs pour l'X	Calvage Mounet
RANDÉ B. **MANSUY R.**	Les clefs pour l'X (2)	Calvage Mounet
REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques	Livre de Poche
REMMERT R.	Classical topics in complex function theory	Springer
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	Hermann
RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle	Gauthier-Villars
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	Springer

ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple	Vuibert
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières	Cédic/Nathan
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP Sciences
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP Sciences
ROUDIER H.	Al èbre linéaire. Cours et exercices	Vuibert
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP Sciences
ROUSSEAU Y. **SAINT-AUBIN Y.**	Mathématiques et technologie	Springer (Sumat)
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation	Cassini
ROUX C.	Initiation à la théorie des graphes	Ellipses
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	Masson
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	Masson
RUDIN W.	Functional analysis	Mc Graw Hill
RUDIN W.	Real and complex analysis	Mc Graw Hill
SA EARP R. **TOUBIANA E.**	Introduction à la Géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann	Cassini
SAINT RAYMOND J.	Topologie, calcul différentiel et variable complexe	calvage et Mounet
SAKAROVITCH J.	Eléments de théorie des automates	Vuibert

SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques	Masson
SAMUEL P.	Géométrie projective	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	Hermann
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1	Ellipses
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre	Springer
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux	Ellipses
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices	Vuibert
SCHNEIER B.	Applied cryptography	Wiley
SCHWARTZ L.	Analyse – I Topologie générale et analyse fonctionnelle – II Calcul différentiel et équations différentielles	Hermann
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse – Tome 1 – Tome 2	Hermann
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques	Hermann
SEDGEWICK R.	Algorithms	Addison Wesley
SEDGEWICK R.	Algorithmes en Java	Pearson Education
SEDGEWICK R.	Algorithmes en langage C	Dunod
SEGUINS PAZZIS (de) C.	Invitation aux formes quadratiques	Calvage et Mounet

SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes	Springer
SERRE D.	Les matrices, théorie et pratique	Dunod
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SERVIEN Cl.	– Analyse 3 – Analyse 4	Ellipses
SHAPIRO H.N.	Introduction to the theory of numbers	Dover
SIDLER J.C.	Géométrie Projective	Dunod
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation	Thomson C. T.
SKANDALIS G.	Topologie et analyse	Dunod
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I	Waddworth and Brooks
STEWART I.	Galois theory	Chapman and Hall
STROUSTRUP B	Le langage C++	Pearson Education
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	Cassini
TAUVEL P.	Cours de Géométrie	Dunod
TAUVEL P.	Cours d'algè bre	Dunod
TAUVEL P.	Corps commutatifs et théorie de Galois	Calvage et Mounet
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	Masson

TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2	Masson
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	Institut Elie Cartan
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	Belin
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne	Hermann
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	Bréal
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	Oxford
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	Masson
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables	Vuibert
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires	IREM des Pays de Loire
TURING A **GIRARD J. Y.**	La Machine de Turing	Seuil
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique – I Théorie des fonctions – II Équations fonctionnelles - Applications	Masson
VAUQUOIS B.	Outils Mathématiques. Probabilités	Hermann
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	Masson

VAZIRANI V.V.	Algorithmes d'approximation	Springer
VINBERG E. B.	A course in algebra	AMS
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes - Équations différentielles	Hermann
WAGSCHAL C.	Distributions, analyse microlocale, équations aux dérivées partielles	Hermann
WARIN B.	L'algorithmique, votre passeport informatique pour la programmation	Ellipses
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	Classiques Hachette
WARUSFEL, ATTALI COLLET, GAUTIER NICOLAS	Mathématiques – Analyse – Arithmétique – Géométrie – Probabilités	Vuibert
WATERMAN M.S.	Introduction to computational biology	Chapman and hall / CRC
WEST D. B.	Introduction to graph theory	Prentice Hell
WHITTAKER E.T. WATSON G.N.	A course of modern analysis	Cambridge
WILF H.	Generatingfunctionology	Academic Press
WILF H.	Algorithms and complexity	A.K. Peters
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire	Cassini
WILLEM M.	Principes d'analyse fonctionnelle	Cassini
WINSKEL G.	The formal semantics of programming languages	MIT Press

YALE P.B.	Geometry and Symmetry	Dover
YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics	Dover
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie	Cassini
ZUILY Cl. **QUEFFELEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation	Masson
ZUILY Cl. **QUEFFELEC H.**	Problèmes de distributions	Cassini