MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Concours du second degré

Rapport de jury

Concours : Agrégation externe

Section : Mathématiques

Session 2016

Rapport de jury présenté par :

Jean-Yves Chemin

Président du jury, Professeur des universités

© www.education.gouv.fr

Table des matières

Chapitre 1

Déroulement du concours et statistiques

1.1 Déroulement du concours

Les épreuves écrites se sont déroulées selon le calendrier suivant :

- Épreuve de mathématiques générales : jeudi 17 mars 2016
- Épreuve d'analyse et probabilités : vendredi 18 mars 2016

La liste d'admissibilité a été publiée le mardi 24 mai 2016.

L'oral s'est déroulé du vendredi 18 juin au dimanche 3 juillet 2016. La liste d'admission a été publiée le lundi 4 juillet 2016.

L'oral était composé de 5 séries de trois jours. Dans chaque salle d'interrogation, les candidats disposaient soit d'un tableau blanc suffisamment large ainsi que de feutres à pompe soit d'un tableau noir et des craies. Les salles de modélisation étaient équipées d'un projecteur connecté à un ordinateur fixe pour l'épreuve de modélisation.

Les candidats admissibles ont reçu une convocation papier, indiquant leurs jours de passage. Pour connaître ses horaires précis, il fallait se connecter sur le site sécurisé de l'agrégation de mathématiques, en indiquant son numéro de candidat. L'application a été fermée, comme l'an passé, la veille du début des oraux (il en sera de même l'an prochain). Seuls quelques candidats hésitants n'ont pas réussi à éditer leurs horaires et ont dû se présenter à 6h30 le premier jour de convocation sur les lieux du concours, sous peine d'être déclarés non présents.

Le jury considère que le fait d'éditer sa convocation horaire, est un signal fort de présence à l'oral.

Le concours propose quatre options. Les options A, B, C ne diffèrent que par les épreuves de modélisation alors que les trois épreuves orales de l'option D (informatique) sont spécifiques.

En 2016 comme dans les sessions précédentes, on peut constater que dans les options A, B et C, le nombre d'inscrits est similaire ; il est toujours — et c'est bien compréhensible — nettement inférieur dans l'option D.

Dans les options A, B et C les rapports admis/présents sont quasiment identiques. Le choix de l'option n'a guère d'influence sur la réussite au concours, ni sur le classement, et ce choix ne doit pas être l'objet d'une hypothétique stratégie de la part des candidats. Le choix de l'option doit surtout être mis en cohérence avec la formation académique et probablement les goûts des candidats ; chaque option ouvre des champs applicatifs des mathématiques qui trouveront leur impact dans le futur métier du professeur agrégé.

Le concours externe de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés, selon leur statut, à l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou à l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs).

L'Inspection Générale collecte les textes réglementaires relatifs à ces différentes situations auxquelles les lauréats de l'agrégation externe peuvent être confrontés et édite une note indiquant les recommandations correspondantes `http://igmaths.org/spip/spip.php?rubrique17`.

Le programme, la nature des épreuves écrites et orales, font l'objet de publications sur le site officiel de ministère de l'Education nationale à l'adresse http://www.education.gouv.fr/. Le programme pour la session 2016 a été publié sur le site du Ministère. On notera que le programme comporte une partie complémentaire, commune à toutes les options et toutes les épreuves, motivée par les problématiques générales de l'approximation numérique. Ce programme a été reconduit pour la session 2017 ; il a été publié le 17 juin 2016 http://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid100820/les-programmes-des-concours-d-enseignants-du-second-degre-de-la-session-2017.html. Les candidats sont aussi invités à consulter le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques, à l'adresse www.agreg.org où se trouvent de nombreuses archives utiles et aussi tous les renseignements pratiques concernant les sessions à venir. Par ailleurs, pour l'épreuve de modélisation, seuls des logiciels libres sont proposés aux candidats. La liste précise et actualisée de ces logiciels est disponible sur le site de l'agrégation. À ce jour la liste est la suivante : `Python, Scilab, Octave, Sage, Maxima, Xcas, R` auxquels s'ajoutent `C, Caml` et `Java` pour l'option D.

Le concours ne comporte plus d'épreuve « agir en fonctionnaire de l'État de manière éthique et responsable ». Mais l'arrêté du 25 juillet 2014 modifiant l'arrêté du 28 décembre 2009 fixant les sections et les modalités d'organisation des concours de l'agrégation et publié au Journal Officiel du 12 août 2014, précise les coefficients des épreuves (4 pour les 5 épreuves) et indique dans son article 8 que les aspects professionnels pourront être évalués durant les épreuves orales elles-mêmes. Précisément, l'article 8 est rédigé comme suit : « Lors des épreuves d'admission du concours externe, outre les interrogations relatives aux sujets et à la discipline, le jury pose les questions qu'il juge utiles lui permettant d'apprécier la capacité du candidat, en qualité de futur agent du service public d'éducation, à prendre en compte dans le cadre de son enseignement la construction des apprentissages des élèves et leurs besoins, à se représenter la diversité des conditions d'exercice du métier, à en connaître de façon réfléchie le contexte, les différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) et les valeurs qui le portent, dont celles de la République. Le jury peut, à cet effet, prendre appui sur le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation fixé par l'arrêté du 1er juillet 2013 ».

1.2 Statistiques et commentaires généraux sur la session 2016

1.2.1 Commentaires généraux

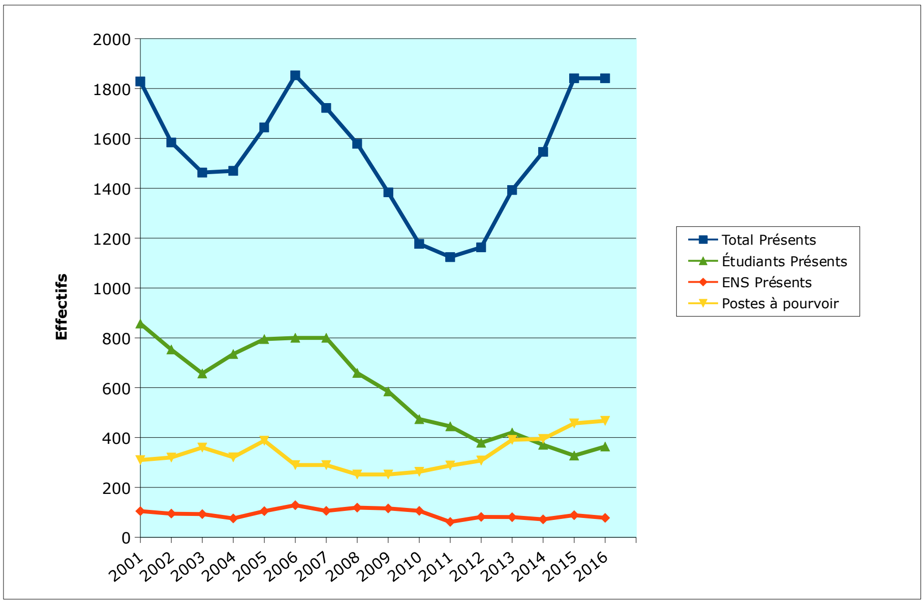
Après la diminution sensible du nombre de postes entre les concours 2005 (388 postes) et 2008 (252 postes), ce nombre a augmenté légèrement jusqu'en 2012.

Depuis la session 2013, une rupture nette a été constatée. En effet 391 postes ont été ouverts en 2013, 395 en 2014, 457 en 2015, 467 en 2016. Comme toujours l'agrégation externe de mathématiques représente à elle seule près de 25% des postes d'agrégés mis aux concours externes. L'importance de ce nombre nous ramène à la situation des années 1992–1996 où 480 postes étaient proposés. Remarquons dès à présent qu'il y avait à cette époque près de 1000 étudiants présents lors des épreuves écrites, alors qu'ils n'étaient que 364 (plus 78 normaliens) cette année, en légère augmentation par rapport à l'an dernier.

Le nombre d'inscrits poursuit la hausse constatée l'an passé, avec 3525 inscrits à la session 2016. Parmi eux 1841 ont été présents aux deux épreuves écrites. On constate encore une participation importante de professeurs en exercice (1519 certifiés inscrits) qui tentent ce concours. De fait, à l'heure actuelle, les concours de l'agrégation interne et externe se recouvrent.

On rappelle que le concours fait l'objet de conventions internationales qui lient la France, le Maroc et la Tunisie : les sujets d'écrit servent aussi pour l'admissibilité pour les agrégations de mathématiques en Tunisie et au Maroc ; les barres d'admissibilité pour les étudiants de ces deux pays est au moins égale à celle de la barre fixée par le jury français.

On compte près de 4 présents par poste. Au-delà de ces chiffres sur le nombre de présents, il faut s'attarder sur la faiblesse du nombre d'étudiants, source d'inquiétude non seulement pour le jury mais aussi pour toute la communauté éducative. Le nombre d'étudiants, qui devraient constituer le principal vivier naturel de ce concours, est — très largement — moindre que le nombre de postes ouverts au concours. Le graphe ci-dessous résume cette situation préoccupante.



Évolution du nombre de présents aux deux épreuves écrites

Comme l'indique ce graphique, bien qu'on ait retrouvé le niveau des présents des années 2000, le nombre d'étudiants est passé de 800 à 350 et une proportion importante de candidats sont des professeurs en exercice.

Admissibilité : À l'issue de la délibération d'écrit portant sur deux épreuves (Mathématiques générales et Analyse-Probabilités), 816 candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une moyenne de 20/20 et le dernier une moyenne de 5/20. En déclarant admissibles des candidats dont les notes d'écrit peuvent être considérés comme faibles, le jury souhaite se donner tous les moyens de pourvoir les postes ouverts au concours, en donnant l'occasion aux candidats de réaliser des prestations d'oral convaincantes. Bien sûr, le niveau des résultats des épreuves d'admissibilité, lorsqu'il est corroboré par les notes des épreuves d'admission, intervient dans la réflexion qui forge la décision de, finalement, pourvoir tous les postes ou seulement une partie d'entre eux. Néanmoins le jury, d'une part, rappelle que les commissions d'interrogation ne disposent d'aucune information sur les prestations d'écrit lors du passage des candidats à l'oral et, d'autre part, souligne que des candidats dont les notes d'écrit sont très modestes parviennent à être admis.

Les deux épreuves ont donné des résultats très homogènes ; moyennes et écarts-types des présents sur les épreuves écrites sont résumés dans le tableau ci-dessous :

	Moy. admissibles	Ecart-type admissibles
MG	8,68	3,54
AP	8,65	3,35

Avec plus de 250 enseignants certifiés admissibles, on observe donc bien une intersection importante entre les viviers de l'agrégation interne et externe. Comme les admis à l'agrégation interne sont en général admissibles à l'agrégation externe mais ne se présentent pas aux oraux, ce sont près de 80 places qui sont perdues de manière mécanique chaque année à l'admissibilité.

Il n'est peut être pas anodin de signaler que depuis cette année la correction des copies est **dématérialisée** : les correcteurs ne travaillent pas directement sur les copies-papier, mais sur une version numérisée de celles-ci. Les candidats doivent tenir compte du fait que leur copie va être consultée sur un écran et les qualités de la présentation en seront d'autant plus appréciées.

Admission : Lors des passages des candidats, le jury ne dispose d'aucune information particulière (notes d'écrit, notes aux autres oraux, qualité, etc.). Il note selon les mêmes critères, avec une grille stricte commune à toutes les commissions, toutes les personnes à partir de leur seule prestation. Des tests statistiques (de type Kolmogorov–Smirnov) sont faits très régulièrement pour veiller à l'harmonisation des commissions et la présidence du concours veille sur les indicateurs, à la fin de chaque série, lors de réunions avec les secrétaires de commission. Il est important de rappeler que le jury a la volonté de noter les candidats de manière positive et bienveillante, et cherche à valoriser les aspects positifs des prestations des candidats.

De fait, comme les années passées, le jury n'a pas attribué l'ensemble des postes ouverts au concours. Finalement, à l'issue des épreuves orales, 304 candidats ont été déclarés admis ; le premier admis a eu une moyenne de 20/20, le dernier admis une moyenne de 8,1/20. La barre d'admission correspond donc exactement à celle de l'an dernier, mais elle a permis de recevoir davantage de candidats, ce qui est assurément un indice de satisfaction. Notons toutefois que la moyenne générale des admis se situe à 11,63/20 (écart-type 2,68) tandis que celle des candidats présents à l'ensemble des épreuves orales était de 7,34/20 (écart-type 3,95).

Le jury rappelle qu'un concours n'est pas un examen : le but n'est pas de valider des connaissances. Le jury insiste aussi sur le fait qu'il convient de passer toutes les épreuves. **Tous les ans, on déplore l'abandon de candidats qui étaient en position d'être reçus.** Quels que soient leurs sentiments à l'issue d'une interrogation, les candidats sont donc fortement encouragés à se présenter aux épreuves suivantes. Par ailleurs les notes attribuées ne sont pas des jugements de valeur sur les candidats, mais permettent de classer des prestations de manière efficace en minimisant le risque d'erreur. C'est pourquoi toute la plage de 0 à 20 est utilisée. Le président du jury reçoit de nombreuses réclamations concernant l'existence de notes très basses et répond systématiquement dans ce sens.

Les moyennes et écarts-types des présents **à l'oral** sur les épreuves écrites sont résumés dans le tableau ci-dessous :

	Moy. présents	Ecart-type présents	Moy. admis	Ecart-type admis
Ecrit MG	8,68	3,54	11,44	3,48
Ecrit AP	8,65	3,35	11,09	3,53
Oral Algèbre-géométrie	6,67	5,62	12,31	3,78
Oral Analyse-probabilités	6,33	5,62	12,05	4,01
Oral Modélisation	6,36	5,23	11,27	3,86

On résume dans le tableau ci-dessous les barres d'admission depuis 2008 :

Année	Nombre de postes attribués	Barre d'admission
2016	304	8,1/20
2015	274	8,1/20
2014	275	8,48/20
2013	323	7,95/20
2012	308	8,1/20
2011	288	9,33/20
2010	263	9,8/20
2009	252	10,15/20
2008	252	10,1/20

Seuls 304 postes sur les 467 proposés ont été attribués. Le recrutement de professeurs agrégés de mathématiques ne peut se faire que sur des critères de qualités scientifiques et pédagogiques répondant à un minimum, eu égard aux missions actuellement fixées aux agrégés telles qu'elles sont définies sur le site du ministère ; *les professeurs agrégés participent aux actions d'éducation, principalement en assurant un service d'enseignement et assurent le suivi individuel et l'évaluation des élèves. Ils contribuent à conseiller les élèves dans le choix de leur projet d'orientation. Ils enseignent dans les classes préparatoires aux grandes écoles, dans les classes des lycées, dans les établissements de formation et exceptionnellement dans les classes des collèges.*

Ce minimum a été placé cette année, comme l'année passée, à 162/400. Le jury est bien conscient du malaise profond qui touche l'ensemble de la filière menant aux métiers de l'enseignement des mathématiques et cette session démontre encore les difficultés dans lesquelles sont placées nos universités où la population étudiante souhaitant s'orienter vers l'enseignement des mathématiques est insuffisante. Le jury est tout aussi conscient des efforts des enseignants en poste dans le secondaire qui passent ce concours et il n'a aucun doute que l'immense majorité d'entre eux constitue d'excellents enseignants de mathématiques, même si les résultats obtenus à ce concours peuvent leur paraître parfois frustrants. Toutefois, le constat est sans appel, on ne peut pas réussir le concours de l'agrégation externe sans un minimum de préparation. Le jury est particulièrement frappé cette année encore par le trop faible nombre d'étudiants préparant ce concours, c'est-à-dire dans des préparations universitaires (en gros moins de 200 personnes), et de l'autre côté par le défaut de préparation d'une forte proportion de candidats issus du corps professoral (certifiés en général) qui dévoile des moyens trop faibles consacrés à la formation continue ou l'absence de congés formation. Il est regrettable que la volonté courageuse de progression de plus de 1500 personnes inscrites au concours issues de ces corps ne soit pas davantage soutenue.

1.2.2 Données statistiques diverses

On trouvera dans les pages qui suivent différents tableaux et graphiques constituant le bilan statistique du concours selon différents critères (géographie, sexe, catégorie professionnelle, âge). Toutes ces statistiques portent sur les candidats Français et de l'Union européenne, en particulier ces chiffres n'incluent pas les étudiants marocains et tunisiens.

Effectifs détaillés

Année	Total Inscrits	Total Présents	Etudiants Présents	ENS Présents	Postes à pourvoir	Présents par poste
2001	**2663**	**1828**	857	105	310	**5.9**
2002	**2343**	**1584**	753	95	320	**5.0**
2003	**2217**	**1463**	657	93	360	**4.1**
2004	**2333**	**1470**	735	76	321	**4.6**
2005	**2560**	**1644**	795	105	388	**4.2**
2006	**2849**	**1853**	800	129	290	**6.4**
2007	**2801**	**1722**	800	106	290	**5.9**
2008	**2491**	**1579**	659	119	252	**6.3**
2009	**2351**	**1384**	585	116	252	**5.5**
2010	**2332**	**1177**	474	106	263	**4.5**
2011	**2500**	**1124**	445	62	288	**3.9**
2012	**2673**	**1163**	379	82	308	**3.8**
2013	**2673**	**1393**	420	81	391	**3.6**
2014	**3001**	**1546**	371	72	395	**3.9**
2015	**3252**	**1841**	328	89	457	**4.0**
2016	**3525**	**1841**	364	78	467	**3.9**

Évolution du nombre de présents aux deux épreuves d'écrit

Professions et Diplômes

Profession	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
CERTIFIE	1519	867	845	255	147	18
ETUDIANT HORS ESPE	460	369	364	271	253	160
SANS EMPLOI	286	120	110	53	39	19
ENS.STAGIAIRE 2E DEG. COL/LYC	255	131	123	47	35	4
CADRES SECT PRIVE CONV COLLECT	200	62	52	18	17	7
CONTRACTUEL 2ND DEGRE	105	42	37	6	6	2
ELEVE D'UNE ENS	93	79	78	76	75	72
ETUDIANT EN ESPE	77	52	49	23	20	12
PLP	49	19	18	4	1	
PERS ENSEIG TIT FONCT PUBLIQUE	49	20	19	8	6	
ENSEIGNANT DU SUPERIEUR	37	10	10	4	4	
SALARIES SECTEUR TERTIAIRE	35	12	11	1	1	
SALARIES SECTEUR INDUSTRIEL	34	4	4	3	2	
PROFESSEUR ECOLES	31	3	3	2	1	
MAITRE CONTR.ET AGREE REM TIT	27	19	18	6	3	
PROFESSIONS LIBERALES	25	9	9	5	4	1
MAITRE AUXILIAIRE	22	12	12	1	1	
PERS FONCTION PUBLIQUE	21	9	8	2	1	1
FORMATEURS DANS SECTEUR PRIVE	20	7	7	2	2	
VACATAIRE ENSEIGNANT DU SUP.	16	5	5	4	3	1
AGREGE	15	9	8	4	3	
CONTRACT ENSEIGNANT SUPERIEUR	15	5	5	4	3	2
PERS ENSEIG NON TIT FONCT PUB	15	4	4	1	1	
VACATAIRE DU 2ND DEGRE	14	5	5	1	1	
PROFESSEUR ASSOCIE 2ND DEGRE	13	6	6	3	2	1
AG NON TITULAIRE FONCT PUBLIQ	12	4	4	3	1	1
FONCT STAGIAIRE FONCT PUBLIQUE	11	5	5	3	2	1
ASSISTANT D'EDUCATION	10	1	1			
INSTITUTEUR	7					
ARTISANS / COMMERCANTS	7	2	2	1	1	
PEGC	6	4	4			
ENSEIG NON TIT ETAB SCOL.ETR	4	1	1			
MILITAIRE	4	2	2	1	1	1
EMPLOI AVENIR PROF.2ND D.PUBLI	3	2	2			
PEPS	3	1	1			
AG NON TIT FONCT TERRITORIALE	2	1	1			
CONTRACTUEL FORMATION CONTINUE	2	1	1	1	1	1
PROF DES ECOLES STAGIAIRE	2					
AGENT ADMI.MEMBRE UE(HORS FRA)	2					
ADJOINT D'ENSEIGNEMENT	2					
PERS ADM ET TECH MEN	2					
PERSONNEL DE DIRECTION	2	1	1			
AGRICULTEURS	1	1	1	1	1	
CONTRACTUEL INSERTION (MGI)	1					
CONT ET AGREE REM INSTITUTEUR	1	1	1	1	1	
COP STAGIAIRE EN CENTRE DE FOR	1					
PERSONNEL D'INSPECTION	1					
CONTRACTUEL APPRENTISSAGE(CFA)	1	1	1			
MAITRE DELEGUE	1					
CONTRACT MEN ADM OU TECHNIQUE	1	1	1			
SURVEILLANT D'EXTERNAT	1	1	1			
PERS FONCT HOSPITAL	1					
MAITRE D'INTERNAT	1	1	1	1	1	1

Résultat du concours par catégories professionnelles[1]

1. Les catégories professionnelles et les catégories par diplômes listées correspondent aux déclarations des candidats lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

Diplôme	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
MASTER	1419	877	847	437	383	242
ENSEIGNANT TITUL-ANCIEN TITUL CAT A	704	402	393	131	68	7
DIPLOME D'INGENIEUR (BAC+5)	516	233	217	90	72	22
DOCTORAT	338	152	147	60	51	18
DIP POSTSECONDAIRE 5 ANS OU +	173	68	65	18	12	
DIPLOME GRANDE ECOLE (BAC+5)	137	76	73	45	30	12
GRADE MASTER	87	35	33	15	12	4
DISP.TITRE 3 ENFANTS	85	38	37	13	7	
ADMIS ECH.REM.CERTIFIE PLP PEPS	42	26	26	7	5	
DIPLOME CLASSE NIVEAU I	21	3	2			
CPE TITULAIRE - ANCIEN TITULAIRE	2	1	1			
ADMIS ECH.REM PROFESSEUR ECOLE	1					

Diplômes des candidats hors étudiants tunisiens et marocains

Ces résultats par grandes catégories confirment que le concours de l'agrégation externe de mathématiques est un concours de recrutement de nouveaux enseignants ; c'est d'ailleurs bien sa fonction première.

La catégorie cumulée des étudiants en mathématiques (ENS et hors ENS) constitue en effet près de 76% de l'effectif des admis. La catégorie des étudiants inscrits en ESPE, désigne des titulaires d'un Master 2 et inscrits en 1ère année d'ESPE ; cette nouvelle catégorie regroupe un ensemble assez varié de personnes dont il n'est pas clair qu'il s'agisse d'étudiants ayant suivi des filières en mathématiques, nous avons donc dissocié cette catégorie de la catégorie "étudiants" proprement dite, comme en 2015.

La catégorie *sans emploi* recoupe souvent les titulaires d'un doctorat. Cela reflète les difficultés actuelles de l'emploi académique des docteurs de l'université et la disparition des postes d'enseignants-chercheurs au niveau maître de conférences.

L'impact du diplôme sur la performance à l'écrit est nette. Notons le nombre important de docteurs, pas tous diplômés en mathématiques, inscrits au concours, mais aussi le peu d'admis dans cette catégorie, souvent faute d'une préparation spécifique pour l'oral ou de révisions suffisantes sur les fondamentaux en algèbre linéaire, en analyse ou probabilités. Ainsi, depuis 2009, le nombre de candidats à l'agrégation externe de mathématiques qui se déclarent docteurs a plus que doublé : 131 en 2009, 338 en 2016. Dans le même temps, le nombre total d'inscrits est passé de 2300 à 3300. Le nombre d'admissibles dans cette population est passé de 22 à 60, mais avec une barre d'admissibilité qui a fortement décru ces dernières années. Le nombre d'admis docteurs est globalement de l'ordre de la quinzaine depuis 2011. L'ouverture en 2017 d'un concours spécifique pour les titulaires d'un doctorat amène à réitérer le conseil de se consacrer à une indispensable préparation, préparation qui pourrait d'ailleurs se faire dans le cadre de la formation doctorale.

Répartition selon le sexe Les tableaux suivants donnent les répartitions en fonction du sexe. Il y a un fort déséquilibre hommes-femmes puisque l'on compte 23% d'admis femmes. Ce déséquilibre est réduit si on ne prend pas en compte la population des candidats élèves d'une ENS (12 femmes parmi les 72 normaliens admis).

Age	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
Homme	2394	1291	1237	614	477	235
Femme	1131	620	604	202	163	70

Cette proportion est relativement proche de la répartition hommes-femmes admissibles (24,75 %), mais en deçà de la proportion des présentes aux épreuves écrites (33 %). Les rapports admis/présents à l'oral sont respectivement de 49% pour les hommes et 43% pour les femmes. Le jury, composé de plus de 42% de femmes, a mis en place des processus de veille sur les enjeux de parité et s'est interrogé en permanence sur ses pratiques afin de chercher à éliminer les biais susceptibles de s'introduire dans l'évaluation.

Répartition selon l'âge : Le tableau ci-dessous décrit les répartitions des lauréats en fonction de leur âge. Ce tableau confirme que l'agrégation externe permet de recruter des jeunes enseignants. Les jeunes (moins de 27 ans) constituent l'essentiel des admis au concours. Cependant des candidats plus avancés en âge, jusqu'à 57 ans, se sont aussi présentés avec succès lorsqu'ils ont pu bénéficier d'une bonne préparation.

Age	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
20	1	1	1	1	1	1
21	4	2	2	2	2	2
22	34	31	31	26	24	20
23	179	158	158	130	124	97
24	173	147	143	97	92	65
25	175	122	119	68	60	33
26	143	78	75	35	32	14
27	152	81	76	26	22	8
28	134	73	68	25	22	7
29	171	79	76	32	26	8
30	165	94	90	29	20	6
31	142	56	54	19	13	8
32	114	54	51	20	11	2
33	122	53	51	15	12	2
34	117	61	60	19	14	5
35	124	51	50	20	15	4
36	104	50	47	16	10	
37	107	56	52	18	8	3
38	119	60	59	15	10	1
39	126	61	58	25	14	4
40	115	56	53	17	10	
41	92	41	39	21	11	2
42	97	48	45	16	7	2
43	96	46	46	16	9	1
44	79	41	39	14	9	1
45	77	41	41	9	6	
46	76	41	39	10	8	3
47	63	31	30	7	5	2
48	60	30	28	11	4	
49	55	33	30	9	7	
50	39	15	14	6	5	1
51	41	16	15	8	8	
52	49	24	23	9	6	2
53	33	20	19	8	5	
54	26	12	11	2		
55	28	7	7	4	2	
56	20	8	8	1	1	
57	21	12	12	5	2	1
58	13	5	5	3	2	
59	9	5	5	1		
60	3	2	2	1	1	
61	6	1	1			
62	8	2	2			
63	5	2	2			
64	6	4	4			
65	1					
67	1					

Tableau de répartition des candidats en fonction de l'âge

Répartition selon l'académie La répartition des lauréats par académie se concentre clairement sur quelques centres (PCV, Rennes, Lyon, Grenoble, Toulouse, Bordeaux, Strasbourg, et Besançon qui présente un taux de réussite exceptionnel) qui totalisent près de 90% des lauréats.

Cette concentration des admis sur quelques grandes métropoles françaises a diverses conséquences qu'il est difficile de prévoir.

On constate ces dernières années que de nombreuses académies ne reçoivent que quelques stagiaires agrégés alors que l'Ile-de-France est beaucoup plus abondamment fournie. Il est donc conseillé aux lauréats de demander à effectuer leur stage dans des académies déficitaires dans lesquelles ils trouveront de bonnes conditions. Les lauréats d'Ile-de-France n'auront pas la garantie de pouvoir effectuer leur stage en lycée.

La deuxième conséquence est la tension qu'induit une baisse de performance au concours de l'agrégation dans certaines académies où bien souvent Master 2 rime avec préparation à l'agrégation, compte tenu de la faiblesse des effectifs d'étudiants. Bien que la préparation à l'agrégation ne soit pas un objectif prioritaire des Universités de province, il convient de réfléchir à l'égalité territoriale dans ce contexte de pénurie des étudiants. La situation des DOM est particulièrement préoccupante de ce point de vue.

Academies	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	945	526	506	253	204	106
LYON	209	135	131	79	59	36
NICE	207	74	70	24	14	5
AIX-MARSEILLE	163	85	80	24	18	6
RENNES	154	97	97	58	54	38
TOULOUSE	154	72	70	38	28	14
LILLE	145	81	79	24	16	5
NANTES	144	73	71	31	27	11
MONTPELLIER	136	69	68	21	14	5
BORDEAUX	123	75	70	36	25	12
GRENOBLE	123	61	58	28	24	12
STRASBOURG	109	64	62	28	24	13
POITIERS	106	29	27	9	6	1
ORLEANS-TOURS	100	53	50	19	14	1
NANCY-METZ	85	50	49	19	15	8
LA REUNION	80	39	36	10	7	1
ROUEN	70	48	48	17	13	4
AMIENS	68	37	36	18	14	1
BESANCON	53	39	36	13	12	10
DIJON	53	29	26	14	9	4
REIMS	49	31	31	11	10	2
CAEN	48	25	25	12	10	4
CLERMONT-FERRAND	46	33	32	14	13	4
GUADELOUPE	32	20	19			
MARTINIQUE	29	17	17	4	3	
LIMOGES	23	13	12	1	1	
POLYNESIE FRANCAISE	21	8	8			
MAYOTTE	18	9	9	3	1	
NOUVELLE CALEDONIE	15	7	7			
GUYANE	10	7	6	4	3	1
CORSE	7	5	5	4	2	1

Répartition par académie

Les préparations doivent étudier l'évolution sur plusieurs années de leurs taux de réussite au concours. Les sociétés savantes collectent des informations sur les volumes horaires consacrés aux préparations selon les Universités, données qui révèlent de très grandes disparités. Le jury rappelle aussi aux candidats comme aux préparateurs que les épreuves orales sont publiques et que venir assister à des interrogations permet certainement de bien appréhender les attendus et les difficultés des épreuves.

Chapitre 2

Épreuve écrite de mathématiques générales

Le sujet est disponible à l'URL http://www.devenirenseignant.gouv.fr./cid98775/les-sujets-des-epreuves-d-admissibilite-et-rapports-des-jury-des-concours-de-l-agregation-de-la-session-2016.html

2.1 Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques générales

Une majorité de candidats n'a traité que les parties I et II du problème. Les premières questions du III et IV ont souvent été abordées, mais rarement correctement par les candidats moyens. Les meilleurs candidats ont eux souvent bien avancé dans le III, voire dans le IV.

Partie I

Seuls quelques candidats, manifestement pas au niveau de l'agrégation, n'ont pas répondu correctement à la question I1, qui demande simplement d'utiliser la bilinéarité et d'effectuer un produit matriciel.

La question I2 s'est avérée plus discriminante. Quelques candidats utilisent correctement la dualité pour traiter cette question. Beaucoup choisissent plutôt une approche matricielle pour l'aborder, avec plus ou moins de succès, selon les cas.

Attention, la matrice de l'application de E dans E^* (dans des bases e et e^*) qui à x associe $y \mapsto \omega(x, y)$ a pour matrice ${}^tM$ et non pas M.

De manière très surprenante, certains candidats pensent que comme ω est non-dégénérée, $\omega(x, x) = 0$ implique $x = 0_E$, ou matriciellement ${}^tXMX = 0$ implique $X = 0$. Les correcteurs ont lu dans le I d'autres arguments révélant une mauvaise assimilation par certains candidats des notions élémentaires d'algèbre bilinéaire : dans le I6 notamment, certains utilisent que, comme le produit scalaire est non dégénérée, $\langle x|y\rangle = 0$ implique $x = 0_E$ ou $y = 0_E$. Et on retrouve ce même argument avec la forme bilinéaire ω à la place du produit scalaire.

De même, pour une forme bilinéaire ω quelconque, même non dégénérée (ici il s'agit d'une forme antisymétrique), il n'existe pas nécessairement de base orthonormée pour ω.

La question I3 est plus largement traitée, mais pour démontrer l'inversibilité de J, les correcteurs ont souvent trouvé dans les copies un argument de "déterminant par blocs" fantaisiste. On peut démontrer l'inversibilité de J en vérifiant que $J^2 = -I_{2n}$ ou ${}^tJJ = I_{2n}$, ou bien en expliquant que les colonnes de la matrice forment une famille libre. Pour ceux qui choisissent de calculer le déterminant de J une permutation bien choisie des colonnes permet par exemple de conclure.

La question I4 s'est également révélée discriminante. Un certain nombre de candidats ont choisi d'utiliser l'isomorphisme entre E et E^* défini au I2. Certains ont rédigé convenablement l'argument. D'autres n'ont pas su le mettre en forme rigoureusement. En effet, pour F sous-espace vectoriel de E, il n'y a pas à proprement parler "d'inclusion" de F^* dans E^*. On ne peut donc pas directement compléter une base de F^* en base de E^* : il faut dans un premier temps prolonger les applications de F^* sur E entier. Et une phrase du type "soit $f \in E^*$ qui n'est pas dans F^*" n'a pas de sens.

D'autres candidats rédigent des démonstrations complètement erronées, certaines commençant par exemple par : pour un sous-espace vectoriel F quelconque, soit $f \in E^*$ tel que $F = \ker f$.

Certains ont voulu prendre "le" supplémentaire de F (on rappelle que généralement on n'a pas unicité du supplémentaire) et démontrer qu'il s'agit de l'orthogonal. On a même trouvé quelques "complémentaires" mais on espère que cela relève du lapsus.

Pour la deuxième partie de la question I4, la question I5 suivante laisse penser, à juste titre, que la réponse est : non, on n'a pas toujours $E = F \oplus F^\circ$; mais il faut le démontrer en donnant un contre-exemple.

Malgré la question suivante, certains candidats ont répondu "oui" et ont "montré" l'égalité ; et ils ne se sont semble-t-il pas interrogés au moment d'établir ensuite l'équivalence du I5 (un sens se démontrant alors par l'argument : on a toujours $E = F \oplus F^\circ$).

Dans le I6 beaucoup de candidats privilégient un point de vue matriciel, mais ils oublient souvent de préciser qu'ils utilisent une base orthonormée. On rappelle que pour un espace vectoriel quelconque, il n'existe pas de "base canonique" ; cette terminologie n'est pas un synonyme de "base orthonormée".

Dans le I6a, la plupart des candidats ont oublié de vérifier que ω est bien un forme bilinéaire.

Dans le I6b, comme dans toute question où l'on demande de montrer l'existence et l'unicité d'un objet, il ne faut pas se contenter de démontrer l'unicité.

De manière générale dans le I6, on attendait des candidats une rédaction soignée. On ne pouvait par exemple pas passer de $\langle x|y\rangle = 0$ à $x = 0$ sans avoir mis de quantificateurs.

Par ailleurs, les réponses de certains candidats révèlent des soucis de logique et de raisonnement. Pour montrer l'existence de u, certains considèrent par exemple une application $f : x \mapsto \langle x|u(y)\rangle$ et appliquent ensuite le résultat du I2 ; mais qui est u dans la définition de f ?

Au delà d'erreurs graves de logique, les candidats doivent faire attention à la nature des objets qu'ils manipulent. Cela leur éviterait notamment d'écrire : comme w est non dégénérée, pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \omega(x, y)$ est injective de E dans E.

De manière plus générale, le fait de parler de l'injectivité d'une forme linéaire (sur un espace E de dimension quelconque) est toujours un peu surprenant.

Dans le I6c, on rencontre beaucoup de confusions entre $J\,F^\circ$ et $(JF)^\circ$. Comme la matrice J est orthogonale, les deux ensembles coïncident en fait ; mais cela demande à être justifié.

Le I7 a posé des problèmes à de nombreux candidats. Parmi ceux qui ont pensé à démontrer le résultat par récurrence, peu ont su la mettre en place. Certains écrivent : “on considère un sous-espace F tel que $F \oplus F^\circ = E$” sans voir que la difficulté réside dans le fait d'établir l'existence d'un tel sous-espace.

Partie II

La question II1 n'est pas difficile mais demande une rédaction rigoureuse. Certains candidats omettent d'utiliser des quantificateurs ou les utilisent mal. D'autres traitent la question en mélangeant les notations matricielles et vectorielles ($x \in E$ et $X \in \mathbf{R}^n$, ou $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$). Il aurait été préférable de s'interdire des notations du type : $u(X)$ ou $J \circ u$ ou Mx (sachant qu'ici E n'est a priori pas $\mathbf{R}^n$).

Dans la question II2, quelques candidats (assez rares heureusement) se trompent sur la loi de groupe de $GL_n(\mathbf{R})$. De même en II6, pour vérifier que i_r est un morphisme de groupes, on lit des $i_r(M - N)$.

Dans la question II3, certains candidats confondent la multiplicité des valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres.

La question II4 a été bien traitée par l'ensemble des candidats, qui manipulent convenablement les produits par blocs.

Dans le II, un certain nombre de candidats ont une connaissance très floue des groupes $O(n)$ et $U(n)$, pensant que le premier est constitué des matrices de déterminant ± 1, et que le second est constitué des matrices de déterminant de module 1.

Dans le II6a de nouveau, une grande majorité de candidats invoquent des formules de déterminant par blocs, toutes aussi fausses les unes que les autres.

Dans le II7, la notion de racine carrée de matrice n'est définie que pour les matrices définies positives ; et écrire $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$ est complètement faux.
Un petit nombre de candidats ont écrit des jolies démonstrations du II7a : ils démontrent que si A est la racine de M, alors $JA^{-1t}J$ est aussi symétrique définie positive, et racine de M et ils concluent par unicité. Le seul inconvénient de cette démonstration est qu'elle n'aide ensuite pas les candidats pour la question II.7.b.

Dans le II8a, il ne faut pas se contenter de réciter mécaniquement “bilinéaire, symétrique, définie positive”, mais justifier que ces propriétés sont bien vérifiées. Dans cette question, presque aucun candidant ne pense à justifier que l'intégrale est bien définie.

Seuls quelques candidats sont parvenus à traiter convenablement le reste du II8, un peu délicat.

Le II9a est bien traité par beaucoup de candidats. Le II9c se rédige aisément dès lors que l'on a répondu aux questions précédentes et que l'on connaît la caractérisation par submersion des sous-variétés. Cette question a assez peu été abordée.

Partie III

La question III1 a été largement abordée. Mais beaucoup de candidats n'ont semble-t-il pas vraiment compris ce que signifient “isotrope au sens maximal de l'inclusion” ; ils se contentent souvent d'écrire : on a toujours $F \subset F^\circ$, si F est lagrangien, $F = F^\circ$ donc F est maximal. Et on ne parvient pas vraiment à savoir si le candidat a compris l'argument rigoureux qui se cache derrière. Une rédaction avec une suite d'inclusion $F \subset G \subset G^\circ \subset F^\circ = F$ aurait été plus convaincante.

Par ailleurs, l'implication délicate (si F est isotrope mais pas lagrangien alors il n'est pas isotrope maximal) n'a été démontrée que par les meilleures copies.

Dans le III2, la majorité des copies se sont contentées d'aborder la première partie, qui découle immédiatement de la question précédente.

Le III3 a été bien traité dans beaucoup de bonnes copies.

Dans la question III4, les candidats se sont souvent contentés de rappeler la définition d'une action de groupe en omettant de vérifier que ML est encore un espace lagrangien.

Partie IV

La question IV.1 a souvent été abordée mais dans une majorité des cas par des “grapilleurs” qui n'ont pas suffisamment compris le contexte et ne voient pas les points délicats qui doivent être justifiés.

La fin du III et le reste du IV n'ont été abordés que par les toutes meilleures copies.

2.2 Corrigé de l'épreuve de mathématiques générales

I. Espace vectoriel symplectique

On considère une forme bilinéaire $\omega : E \times E \to \mathbf{R}$.

Soit $e = (e_1, \ldots, e_m)$ une base de E. On définit la matrice de la forme bilinéaire ω dans la base e comme étant la matrice $M = (\omega(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \in \mathcal{M}_m(\mathbf{R})$.

1. Soit $(x, y) \in E^2$. On les décompose dans la base e : $x = \sum_{j=1}^m x_j e_j$ et $y = \sum_{j=1}^m y_j e_j$ et on note respectivement $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ les vecteurs de x et y dans la base e.

   Par bilinéarité de ω,
   $$\omega(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i y_j \omega(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i m_{i,j} y_j,$$
   ce qui est égal au produit matriciel ${}^tXMY$.

On dit que la forme bilinéaire ω est ***non dégénérée*** si $N_E = \{x \in E,\ \forall y \in E, \omega(x, y) = 0\}$ est réduit à $\{0_E\}$.

2. On note M la matrice d'une forme bilinéaire ω dans une base e.
   On introduit $\theta : \begin{cases} E & \to E^* \\ x & \mapsto \begin{cases} E & \to \mathbf{R} \\ y & \mapsto \omega(x, y) \end{cases} \end{cases}$. Ainsi $N_E = \ker \theta$. Par définition, ω est non dégénérée si et seulement si θ est injective de E dans E^*.
   Or θ est linéaire (par bilinéarité de ω) et E et E^* sont des espaces vectoriels de même dimension. On en déduit donc θ est injective de E dans E^*, si et seulement si θ est un isomorphisme, ce qui se réécrit :
   $$\forall f \in E^*,\ \exists ! x \in E,\ \forall y \in E,\ \omega(x, y) = f(y).$$
   Par ailleurs ${}^tM$ est la matrice de θ dans les bases e et e^* (base duale de e) ; donc θ est un isomorphisme de E vers E^* si et seulement si ${}^tM$ est inversible, si et seulement si M est inversible.
   On a donc bien l'équivalence entre :
   - la forme ω est non dégénérée
   - θ est un isomorphisme de E vers E^*
   - la matrice M est inversible.
   - $\forall f \in E^*,\ \exists ! x \in E,\ \forall y \in E,\ \omega(x, y) = f(y)$.

Une ***forme symplectique*** sur E est une forme bilinéaire ω vérifiant les deux conditions suivantes :

- ω est antisymétrique : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$,
- ω est non dégénérée.

3. *Modèle de* $\mathbf{R}^{2n}$ *:*
   On se place dans cette question sur l'espace vectoriel $E_0 = \mathbf{R}^{2n}$. On considère ω_0 la forme bilinéaire sur $E_0 \times E_0$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^{2n}$ est J.
   On constate que $J^2 = -I_{2n}$; la matrice J est donc inversible (d'inverse $-J$) et la forme ω_0 est donc non dégénérée.
   Par ailleurs, ${}^tJ = -J$. Donc pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}^{2n})^2$,
   $$\omega_0(x, y) = {}^tXJY = {}^t\left({}^tXJY\right) = {}^tY{}^tJX = -{}^tYJX = -\omega_0(y, x).$$
   La forme bilinéaire ω_0 est donc également antisymétrique ; c'est donc une forme symplectique.

Désormais, ω est une forme symplectique sur un espace vectoriel E de dimension finie.

Pour tout F sous-espace vectoriel de E, on définit l'orthogonal de F (pour la forme bilinéaire ω) : $F^\circ = \{x \in E,\ \forall y \in F,\ \omega(x, y) = 0\}$.

4. Soit F sous-espace vectoriel de E et soit $(z_1, \ldots, z_p)$ une base de F.
   $$\begin{aligned} F^\circ &= \{x \in E,\ \forall y \in F,\ \omega(x, y) = 0\} = \{x \in E,\ \forall j \in [\![1, p]\!],\ \omega(x, z_j) = 0\} \\ &= \{x \in E,\ \forall j \in [\![1, p]\!],\ \omega(z_j, x) = 0\} = \bigcap_{j=1}^{p} \ker\left(\theta(z_j)\right) \end{aligned}$$

Ainsi, avec les notations du 2, $F^\circ = \bigcap_{j=1}^{p} \ker \theta(z_j)$. Or $(z_1, \dots z_p)$ est une famille libre de E et θ est un isomorphisme de de E vers E^* ; donc rang $(\theta(z_1), \dots, \theta(z_p)) = p$. On en déduit donc, par dualité, que $\dim F^\circ = \dim E - p = \dim E - \dim F$.

Mais on n'a pas nécessairement $F \oplus F^\circ = E$; par exemple dans le cas de $F = \mathrm{Vect}(x)$ avec x vecteur non nul de E, $x \in F \cap F^\circ$ (puisque $\omega(x, x) = 0$ par antisymétrie de ω).

5. Soit F un sous-espace vectoriel de E. La restriction de ω à $F \times F$ est encore une forme bilinéaire antisymétrique. Il s'agit donc d'une forme symplectique si et seulement si elle est non dégénérée, c'est-à-dire si et seulement si $\{x \in F,\ \forall y \in F,\ \omega(x, y) = 0\}$ est réduit au vecteur nul, ce qui se traduit par $F \cap F^\circ = \{0_E\}$.
   Ainsi, si $F \oplus F^\circ = E$, alors $F \cap F^\circ = \{0_E\}$ et la restriction de ω à $F \times F$ est bien une forme symplectique.
   Réciproquement, si la restriction de ω à $F \times F$ est une forme symplectique, alors $F \cap F^\circ = \{0_E\}$. Et comme $\dim E = \dim F + \dim F^\circ$, on peut conclure que $F \oplus F^\circ = E$.

6. *Lien entre structure symplectique et produit scalaire :*
   On se place sur un espace vectoriel réel E, de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle .|. \rangle$.

   (a) Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$, un automorphisme de E vérifiant $u^* = -u$. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on pose $\omega(x, y) = \langle x|u(y) \rangle$.
   On vérifie que ω est bilinéaire car $\langle | \rangle$ est bilinéaire et u est linéaire.
   De plus, pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :
   $$\omega(x, y) = \langle x|u(y)\rangle = \langle u^*(x)|y\rangle = -\langle u(x)|y\rangle = -\omega(y, x).$$
   Enfin, soit $x \in E$ tel que pour tout $y \in E$, $0 = \omega(x, y) = \langle x|u(y)\rangle = -\langle u(x)|y\rangle$. On en déduit que $u(x)$ est orthogonal à tout vecteur de E, et donc $u(x) = 0_E$ (puisque le produit scalaire est non dégénéré). Finalement, u étant un automorphisme, $x = 0_E$. On peut ainsi conclure que ω est non-dégénérée et donc une forme symplectique.

   (b) Réciproquement, soit ω une forme symplectique sur E. Pour tout $y \in E$, $x \mapsto \omega(x, y)$ est une forme linéaire ; il existe donc un unique vecteur $z = u(y) \in E$ tel que : $\forall x \in E, \quad \omega(x, y) = \langle x|u(y)\rangle$. On doit vérifier que l'application u est linéaire de E dans E. On écrit :
   $$\begin{aligned} &\forall x_1, x_2 \in E,\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R},\ \forall y \in E,\\ &\qquad \langle y|u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\rangle = \omega(y, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\\ &\qquad\qquad = \lambda_1 \omega(y, x_1) + \lambda_2 \omega(y, x_2)\\ &\qquad\qquad = \langle y|\lambda_1 u(x_1)\rangle + \langle y|\lambda_2 u(x_2)\rangle\\ &\qquad\qquad = \langle y|\lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2)\rangle \end{aligned}$$
   Ceci étant vrai pour tout $y \in E$, on en déduit que $u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2)$ et u est linéaire.
   Comme ω est antisymétrique, on a on a pour tous $x, y \in E$: $\langle x|u(y)\rangle = -\langle y|u(x)\rangle$ et donc $u^* = -u$.
   Soit $x \in \ker u$. Alors pour tout $y \in E$, $\omega(x, y) = -\langle u(x)|y\rangle = 0$ et donc $x = 0_E$ car ω est non dégénérée. Par conséquent u est un endomorphisme injectif et donc un automorphisme (la dimension de E étant finie).

On pouvait également démontrer cela par argument de dualité : comme ω est une forme biliéaire non dégénérée, comme expliqué ci-dessus, $\theta : \begin{cases} E & \to E^* \\ x & \mapsto \begin{cases} E & \to \mathbf{R} \\ y & \mapsto \omega(x,y) \end{cases} \end{cases}$ est un isomorphisme.

De même $\theta_0 : \begin{cases} E & \to E^* \\ x & \mapsto \begin{cases} E & \to \mathbf{R} \\ y & \mapsto \langle x, y\rangle \end{cases} \end{cases}$ est un isomorphisme.

Pour tout $y \in E$, la propriété ($\forall x \in E, \quad \omega(x,y) = \langle x|u(y)\rangle$) se réécrit : $-\theta(y) = \theta_0 \circ u(y)$. Ainsi, $u = -\theta_0^{-1} \circ \theta$; on a donc directement la linéarité de u et son caractère bijectif (comme composée d'isomorphismes).

Par ailleurs $\det(u) = \det(u^*) = \det(-u) = (-1)^m \det(u)$ (dans une base orthonormée la matrice de u^* est la transposée de celle de u, ce qui justifie la première égalité). Comme $\det(u) \neq 0$, nécessairement la dimension m est paire.

(c) On reprend l'exemple de la question 3 et on munit E_0 du produit scalaire canonique.
Soient x et $y \in E_0^2$, représentés dans la base canonique par les vecteurs X et Y. Par définition,

$$\omega_0(x,y) = {}^tXJY = {}^tX\,(JY) = \langle x|Jy\rangle.$$

De même $\omega_0(Jx,y) = {}^t(JX)JY = {}^tX{}^tJJY = -{}^tXJ^2Y = {}^tXY = \langle x|y\rangle$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E_0.

$$\begin{aligned} JF^\perp &= \{Jx,\ x \in E_0 \mid \forall y \in F,\ \langle x|y\rangle = 0\} \\ &= \{Jx,\ x \in E_0 \mid \forall y \in F,\ \omega_0(Jx,y) = 0\} \\ &= \{z \in E_0 \mid \forall y \in F,\ \omega_0(z,y) = 0\} \\ &= F^\circ \end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité est vérifiée puisque J est un automorphisme de E_0.

On considère désormais une forme symplectique ω fixée sur un espace E de dimension $m = 2n$.

7. On montre le résultat par récurrence sur la dimension de E (qui est un entier pair non nul).
Soit $e_1 \in E$ non nul. Comme ω est non dégénérée, il existe un vecteur $v \in E$ tel que $\omega(e_1, v) \neq 0$; on pose alors $f_1 = \frac{1}{\omega(e_1,v)}v$ (avec v un tel vecteur) et on a bien $\omega(e_1, f_1) = 1$.
Comme $\omega(e_1, e_1) = 0$, la famille (e_1, f_1) est libre et $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, f_1)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2.
Si $\dim E = 2$ alors $E_1 = E$ et on a bien la propriété demandée.
On suppose le résultat pour les espaces symplectiques de dimension strictement inférieure à $2n$, où $n \geqslant 2$ est fixé. Soit E de dimension $2n$.
On remarque tout d'abord que par construction la restriction de ω à E_1 est non dégénérée ($E_1 \cap E_1^\circ = \{0_E\}$) ; ainsi $E_1 \oplus E_1^\circ = E$.
On remarque que $E_1 \subset (E_1^\circ)^\circ$ et par égalité des dimensions $E_1 = (E_1^\circ)^\circ$. On en déduit que la restriction de ω à E_1° est encore une forme symplectique (d'après la question 5). Par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}_1 = (e_2, \dots e_n, f_2, \dots f_n)$ de E_1° telle que pour tout $(i,j) \in [\![2,n]\!]^2$
$\begin{cases} \omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0, \\ \omega(e_i, f_j) = \delta_{i,j}. \end{cases}$

Or $\omega(e_1, f_1) = 1$ et pour tout $j \in [\![2, n]\!]$, $\omega(e_1, f_j) = \omega(e_1, e_j) = \omega(f_1, f_j) = \omega(f_1, e_j) = 0$ (car $\mathcal{B}_1$ est une base de E_1°). Comme $E_1 \oplus E_1^\circ = E$, on a donc finalement bien une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_n, f_1, \dots f_n)$ de E telle que pour tout $(i,j) \in \mathbf{N}_n^2$ $\begin{cases} \omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0 \\ \omega(e_i, f_j) = \delta_{i,j} \end{cases}$.

Par définition, la matrice de la forme bilinéaire ω dans cette base est alors J.

Ainsi tout espace vectoriel symplectique peut se ramener (via un choix de base appropriée) au modèle (E_0, ω_0) défini à la question 3.

II. Groupe symplectique réel

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est un ***endomorphisme symplectique*** s'il préserve ω, c'est-à-dire si pour tout $(x,y) \in E^2$, $\omega(u(x), u(y)) = \omega(x, y)$.

1. On considère une base adaptée $\mathcal{B}$ vérifiant les propriétés de la question **2.2**.7 et note $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$.
   La matrice de ω dans la base $\mathcal{B}$ est J, et donc, d'après la question **2.2**.1, pour tout $(x,y) \in E^2$, $\omega(x,y) = {}^tXJY$, avec X et Y les vecteurs de x et y dans cette base, et de même, $\omega(u(x), u(y)) = {}^t(MX)J(MY)$.
   Ainsi, l'endomorphisme u est symplectique se traduit par :
   $$\begin{aligned} \forall (X,Y) \in (\mathbf{R}^{2n})^2,\ {}^tXJY = {}^t(MX)J(MY) &\iff \forall (X,Y) \in (\mathbf{R}^{2n})^2,\ {}^tXJY = {}^tX{}^tMJMY \\ &\iff J = {}^tMJM \end{aligned}$$
   Le sens direct de la dernière équivalence est justifié car si une matrice B vérifie : pour tout $(X,Y) \in (\mathbf{R}^n)^2$ ${}^tXBY = 0$, alors pour tout $Y \in \mathbf{R}^n$, $BY = 0_{\mathbf{R}^n}$ (car orthogonal à tout vecteur X pour le produit scalaire usuel) ; et donc $B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{R})}$.

On note $\mathrm{Sp}(2n)$ l'ensemble des ***matrices symplectiques réelles*** :
$$\mathrm{Sp}(2n) = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R}) \mid {}^tMJM = J\}.$$

2. L'ensemble $\mathrm{Sp}(2n)$ est bien une partie de $GL_{2n}(\mathbf{R})$: en effet, comme la matrice J est inversible, si ${}^tMJM = J$ alors M est inversible ($\mathrm{rang}(M) \geqslant \mathrm{rang}\left({}^tMJM\right)$).
   Il est non-vide car il contient la matrice identité.
   De plus, pour toutes matrices $M, N \in \mathrm{Sp}(2n)$, on a ${}^tMJM = J = {}^tNJN$ et donc :
   $$\begin{aligned} {}^tN^{-1}JN^{-1} &= J \ \text{ et} \\ {}^t(MN)JMN &= {}^tN{}^tMJMN = {}^tNJN = J. \end{aligned}$$
   En conclusion, $\mathrm{Sp}(2n)$ est un sous-groupe de $GL_{2n}(\mathbf{R})$.
   On a $J^2 = -I_{2n}$ donc ${}^tJJ^2 = -{}^tJ = J$, d'où $J \in \mathrm{Sp}(2n)$.
   Si $M \in \mathrm{Sp}(2n)$, alors $M^{-1} \in \mathrm{Sp}(2n)$ et ${}^tM^{-1}JM^{-1} = J$. En prenant l'inverse des deux membres de l'égalité, on obtient : $MJ^{-1}\,{}^tM = J^{-1}$, soit (comme $J^{-1} = -J$) : $MJ^tM = J$, donc ${}^tM \in \mathrm{Sp}(2n)$.

3. Soit $M \in \mathrm{Sp}(2n)$. On note P_M son polynôme caractéristique. Comme M est une matrice réelle, il s'agit d'un polynôme à coefficients réels ; on en déduit donc que pour toute racine complexe $\lambda \in \mathbf{C}$ de P_M, $\overline{\lambda}$ est également racine de P_M, avec la même multiplicité.

On peut justifier ceci en remarquant, par exemple, que comme P_M et tous ses polynômes dérivés sont à coefficients réels, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\overline{P_M^{(k)}(\lambda)} = P_M^{(k)}\left(\overline{\lambda}\right)$ et on a donc équivalence entre $P_M^{(k)}(\lambda) = 0$ et $P_M^{(k)}\left(\overline{\lambda}\right) = 0$ (et on utilise ensuite la caractérisation de la mutiplicité avec les polynômes dérivés).
Par ailleurs, la définition de M symplectique se réécrit $\left(J^{-1}\right) {}^tMJ = M^{-1}$ donc les matrices ${}^tM$ et M^{-1} sont semblables et ont même polynôme caractéristique. Or $P_{{}^tM} = P_M$ d'où $P_M = P_{M^{-1}}$. Or $P_{M^{-1}}(X) = \det\left(M^{-1} - XI_{2n}\right) = \frac{1}{\det(M)}\det\left(I_{2n} - XM\right) = \frac{X^{2n}}{\det(M)}P_M\left(\frac{1}{X}\right)$.
Finalement pour tout λ valeur propre complexe de M, $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre complexe de M^{-1}, et donc de M, avec même multiplicité.

4. Par définition,

$$\mathrm{Sp}(2n) = \left\{M \in Gl_{2n}(\mathbf{R}),\ {}^tM^{-1} = JMJ^{-1}\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{O}(2n) = \left\{M \in Gl_{2n}(\mathbf{R}),\ {}^tM^{-1} = M\right\}.$$

Or les deux égalités ${}^tM^{-1} = JMJ^{-1}$ et ${}^tM^{-1} = M$ sont équivalentes sous la condition de commutation $JMJ^{-1} = M$. On a ainsi l'équivalence :

$$\begin{aligned}\begin{cases} JM = MJ \\ M \in \mathrm{Sp}(2n)\end{cases} &\iff \begin{cases} JM = MJ \\ M \in \mathrm{O}(2n)\end{cases} \\ &\iff JMJ^{-1} = {}^tM^{-1} = M \\ &\iff M \in \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n).\end{aligned}$$

On note $G = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n)$.

5. Le groupe G est un sous-groupe de $GL_{2n}(\mathbf{R})$ comme intersection de sous-groupes. Le sous-groupe $\mathrm{O}(2n)$ est compact.
Si on note $f : \begin{cases} \mathrm{O}(2n) & \to \mathrm{M}_{2n}(\mathbf{R}) \\ M & \mapsto {}^tMJM \end{cases}$, $G = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n) = f^{-1}\left(\{J\}\right)$ est fermé dans $\mathrm{O}(2n)$ comme pré-image d'un fermé par une application continue.
Ainsi G est fermé et est inclus dans le compact $\mathrm{O}(2n)$, donc compact.

6. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on écrit $M = A + iB$ avec $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$. On lui associe alors $i_r(M) = M_r = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$.

   (a) Soit $M = A+iB \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, avec $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on réalise les opérations élémentaires sur les colonnes $C_j \leftarrow C_j + iC_{n+j}$; ainsi

$$\det(M_r) = \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - iB & -B \\ B + iA & A \end{vmatrix}.$$

   Puis en réalisant les opérations élémentaires sur les lignes $L_{j+n} \leftarrow L_{j+n} - iL_j$:

$$\det(M_r) = \begin{vmatrix} A - iB & -B \\ 0 & A + iB \end{vmatrix}.$$

   Comme la matrice obtenue est triangulaire par blocs : $\det(M_r) = \det(A-iB)\det(A+iB) = \det(\overline{M})\det(M) = \overline{\det(M)}\det(M) = |\det(M)|^2$.

Cet argument pouvait également s'écrire sous forme de produits par blocs avec des matrices $P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ iI_n & I_n \end{pmatrix}$, toutes deux de déterminant 1 :

$$\det(M) = \det(P)\det(M)\det(Q) = \det(PQM) = \begin{vmatrix} A - iB & -B \\ 0 & A + iB \end{vmatrix}.$$

(b) Soit $N \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$. On la décompose en blocs : $N = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$.

D'après la question 4, $N \in G = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n)$ si et seulement si $JN = NJ$ et ${}^tNN = I_{2n}$. La première condition se réécrit par blocs : $C = -B$ et $A = D$. Ainsi, $N \in G$ si et seulement si $N = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ avec ${}^tAA + {}^tBB = I_n$ et $-{}^tAB + {}^tBA = 0$. Finalement $N \in G$ si et seulement si $N = i_r(M)$ avec $M = A + iB$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$, et ${}^t(A - iB)(A + iB) = I_n$, soit $M \in \mathrm{U}(n)$.

(c) D'après la question précédente, la restriction $\widetilde{i_r}$ de i_r à $\mathrm{U}(n)$ est surjective de $\mathrm{U}(n)$ sur G. L'injectivité de i_r (et donc de $\widetilde{i_r}$) est immédiate.

On vérifie que $\widetilde{i_r}$ est un morphisme de groupes en écrivant :

$$\begin{aligned} \widetilde{i_r}\left((A + iB)(C + iD)\right) &= \begin{pmatrix} AC - BD & -AD - BC \\ AD + BC & AC - BD \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix} \\ &= \widetilde{i_r}(A + iB)\widetilde{i_r}(C + iD). \end{aligned}$$

C'est donc un isomorphisme de groupes de $\mathrm{U}(n)$ sur G.

L'application i_r est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, et $\widetilde{i_r}$ l'est donc également.

L'application $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{C}) \mapsto A + iB$ est continue ; la réciproque i_c de i_r est donc continue. (On pouvait également utiliser que $\widetilde{i_r}$ est continue de $\mathrm{U}(n)$ vers G et $\mathrm{U}(n)$ est compact). Finalement $\widetilde{i_r}$ est un homéomorphisme.

Ainsi, en identifiant les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et leurs images par i_r, on écrit :

$$\mathrm{U}(n) == G = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n).$$

7. (a) Soit $M \in \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbf{R}) \cap \mathrm{Sp}(2n)$ une matrice symplectique, symétrique, définie positive. Soit $\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_{2n})$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^{2n}$ formée de vecteurs propres : pour tout $1 \leqslant j \leqslant 2n$: $MX_j = \lambda_j X_j$, avec $\lambda_j \in \mathbf{R}_+^*$ (une telle base existe par le théorème spectral).

Soit N la racine carrée de M ; il s'agit de l'unique matrice vérifiant : pour tout $1 \leqslant j \leqslant 2n$ $NX_j = \sqrt{\lambda_j} X_j$ (en effet, cette matrice est bien symétrique définie positive, et elle vérifie $N^2 = M$). On souhaite vérifier que N est une matrice symplectique ; on va vérifier que l'endomorphisme de $\mathbf{R}^{2n}$ qui lui est canoniquement associé est symplectique pour la forme symplectique ω_0 canoniquement associée à J) c'est-à-dire que pour tout $(X, Y) \in \mathbf{R}^{2n}$, $\omega_0(NX, NY) = \omega_0(X, Y)$. Il suffit de le vérifier sur la base $\mathcal{B}$.

Or M est une matrice symplectique et on a donc pour tout $(i, j) \in (\mathbf{N}_{2n})^2$, $\omega_0(MX_i, MX_j) = \omega_0(X_i, X_j)$, soit $\lambda_i\lambda_j\omega_0(X_i, X_j) = \omega_0(X_i, X_j)$.

On en déduit donc que si $\lambda_i\lambda_j \neq 1$ alors $\omega_0(X_i, X_j) = 0$. Cela va nous permettre de conclure. En effet, soit $(i, j) \in (\mathbf{N}_{2n})^2$.

— Si $\lambda_i\lambda_j \neq 1$ alors $\omega_0(NX_i, NX_j) = \sqrt{\lambda_i\lambda_j}\omega_0(X_i, X_j) = 0 = \omega_0(X_i, X_j)$.
— Si $\lambda_i\lambda_j = 1$ alors $\omega_0(NX_i, NX_j) = \sqrt{\lambda_i\lambda_j}\omega_0(X_i, X_j) = \omega_0(X_i, X_j)$.
Finalement pour tout $(i, j) \in (\mathbf{N}_{2n})^2$, $\omega_0(NX_i, NX_j) = \omega_0(X_i, X_j)$ et N est bien une matrice symplectique.

Soit $M \in \mathrm{Sp}(2n)$. Comme $\mathrm{Sp}(2n)$ est un groupe stable par transposée, M^tM est une matrice symplectique, symétrique, définie positive ; sa racine carrée S est donc encore symplectique. Et comme $\mathrm{Sp}(2n)$ est un groupe, $W = S^{-1}M$ est encore symplectique.

(b) Soit $M \in \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbf{R})$. On utilise le même argument qu'à la question précédente pour relier M à la matrice identité I_{2n}. En reprenant les notations ci-dessus, pour tout $s \in [0, 1]$, on note M_s l'unique matrice symétrique définie positive telle que pour tout $1 \leqslant j \leqslant 2n$, $M_sX_j = \lambda_j^s\, X_j$: si on note O la matrice orthogonale de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$,

$$M = O\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \lambda_{2n} \end{pmatrix} {}^tO,$$

alors pour tout $t \in [0, 1]$,

$$M_s = O\begin{pmatrix} \lambda_1^s & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \lambda_{2n}^s \end{pmatrix} {}^tO.$$

Comme ci-dessus, on vérifie que pour tout $s \in [0, 1]$ M_s est une matrice symplectique. $M_0 = I_{2n}$, et $M_1 = M$; on a ainsi construit un chemin continu dans $\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbf{R})$ de I_{2n} à M. On peut conclure que $\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.

Pour montrer que $\mathrm{Sp}(2n)$ est connexe par arcs, on utilise la décomposition polaire.

Soit $(M, M') \in \mathrm{Sp}(2n)^2$; $M = SW$ et $M' = S'W'$, avec $(S, S') \in \left(\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbf{R})\right)^2$ et $(W, W') \in G^2$. Comme G est homéomorphe à $\mathrm{U}(n)$ qui est connexe par arcs, G est également commexe par arcs. On vient de voir que $\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbf{R})$ est connexe par arcs. On peut donc choisir deux chemins continus : $t \in [0, 1] \mapsto S_t \in \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbf{R})$ qui relie S à S', et $t \in [0, 1] \mapsto W_t \in G$ qui relie W à W'. On pose alors pour tout $t \in [0, 1]$, $M_t = S_tW_t$, qui est une matrice symplectique, comme produit de deux matrices symplectiques. On a ainsi défini un chemin continu de M à M' dans $\mathrm{Sp}(2n)$.

On peut finalement conclure que $\mathrm{Sp}(2n)$ est connexe par arcs.

8. On souhaite décrire les sous-groupes compacts maximaux de $\mathrm{Sp}(2n)$. Pour cela, on considère H un sous-groupe compact de $\mathrm{Sp}(2n)$. On va démontrer qu'il est conjugué à un sous-groupe de G.

On admet, dans cette question, l'existence sur le sous-groupe H d'une mesure borélienne finie non nulle, que l'on notera μ, invariante par translation, c'est-à-dire elle vérifie que pour tout borélien $B \subset H$, pour tout $g \in H$, $\mu(Bg) = \mu(B)$.

(a) Pour tout $(x, y) \in (E_0)^2$, on pose

$$\langle x|y\rangle_H := \frac{1}{\mu(H)}\int_H \langle gx|gy\rangle \,\mathrm{d}\mu(g).$$

Comme $g \mapsto \langle gx|gy\rangle$ est continue sur le compact H, elle est mesurable pour la mesure borélienne μ. Elle est de plus bornée sur le compact H. Et comme la mesure μ est finie, on peut conclure que la fonction est intégrable. Ainsi pour tout $(x, y) \in (E_0)^2$, $\langle x|y\rangle_H$ est bien défini.

La symétrie et la bilinéarité de $\langle\cdot|\cdot\rangle_H$ découlent de celles de $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et de la linéarité de l'intégrale.

La positivité découle de celle de $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et de la positivité de l'intégrale.

Enfin, pour tout $x \in E_0$ non nul, $g \mapsto \langle gx|gx\rangle$ est continue, positive, non identiquement nulle ; l'intégrale est donc strictement positive.

La forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle_H$ définit donc bien un produit scalaire sur E_0.

Soit $h \in H$. On a

$$\langle hx|hy\rangle_H = \frac{1}{\mu(H)} \int_H \langle ghx|ghy\rangle \, \mathrm{d}\mu(g).$$

On réalise le changement de variable : $g' = gh$, c'est-à-dire $g = g'h^{-1}$.

L'application $\phi : g \mapsto gh$ est bien mesurable. Et par invariance de la mesure par translation, $\mu \circ \phi^{-1} = \mu$; et on obtient donc finalement par formule de transfert $\langle hx|hy\rangle_H = \langle x|y\rangle_H$.

Le produit scalaire est donc invariant par tous les éléments de H.

(b) On note S la matrice dans la base canonique de ce produit scalaire ; il s'agit donc d'une matrice symétrique définie positive. Pour tout $M \in H$, ${}^tMSM$ est la matrice du produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle Mx|My\rangle_H$, qui est égal à $\langle\cdot|\cdot\rangle_H$ d'après la question précédente. On a donc ${}^tMSM = S$.

(c) On souhaite démontrer que pour tout $(x, y) \in (E_0)^2$, $\langle Tx|y\rangle_H = -\langle x|Ty\rangle_H$, ce qui revient à vérifier que ${}^tTS = -ST$, soit ${}^tJS^{-1}S = -SS^{-1}J$ car S est une matrice symétrique. Or J est une matrice antisymétrique ; on a donc bien la propriété souhaitée.

Soit $M \in H \subset \mathrm{Sp}(2n)$. On sait que ${}^tMSM = S$ et ${}^tMJM = J$. Ainsi,

$$TM = S^{-1}JM = S^{-1t}M^{-1}J = MS^{-1}J = MT.$$

Ainsi, T commute avec tous les éléments de H.

(d) Comme l'endomorphisme associé à T est antisymétrique pour $\langle.|.\rangle_H$, celui associé à T^2 est symétrique (pour tout $(x, y) \in (E_0)^2$, $\langle T^2x|y\rangle_H = -\langle Tx|Ty\rangle_H = \langle x|T^2y\rangle_H$), et de même pour $-T^2$.

De plus, pour tout $x \in E_0$, $\langle x| - T^2x\rangle_H = \langle Tx|Tx\rangle_H \geqslant 0$, par positivité du produit scalaire. L'endomorphisme associé à $-T^2$ est donc symétrique positif pour le produit scalaire $\langle.|.\rangle_H$; et comme T est inversible, il est symétrique défini positif.

Il admet donc une unique racine carrée ; ainsi il existe une unique matrice R telle que $R^2 = -T^2$ et telle que l'endomorphisme canoniquement associé à R est symétrique défini positif pour $\langle.|.\rangle_H$. La symétrie se traduit par : ${}^tRS = SR$.

On sait déjà que $R^2 = -T^2$ commute avec tous les éléments de H et avec T. On en déduit la même propriété sur R en montrant que R est un polynôme en R^2.

En effet, dans un base orthonormée pour le produit scalaire $\langle.|.\rangle_H$, l'endomorphisme canoniquement associé à R^2 a une matrice diagonale. Ainsi $R^2 = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n})P^{-1}$ (avec P matrice de changement de base). Et on a vu que alors $R = P\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_{2n}})P^{-1}$ qui peut s'écrire comme polynôme en R^2 avec un polynôme de Lagrange approprié.

(e) Comme l'endomorphisme associé à R est symétrique défini positif pour $\langle.|.\rangle_H$, la matrice SR est symétrique définie positive : la symétrie se traduit par ${}^tRS = SR$ et donc par la symétrie de SR ; par ailleurs pour tout $x \in E_0$ ${}^txSRx = \langle x|Rx\rangle_H \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si x est nul, c'est-à-dire SR est définie positive.

On pose donc $S_0 = SR$. Comme $T = S^{-1}J$, $S = JT^{-1}$; de plus R et T commutent. Ainsi,

$$\begin{aligned} {}^tS_0JS_0 &= S_0JS_0 = SRJSR \\ &= SRJ^2T^{-1}R = -SRT^{-1}R \\ &= -SR^2T^{-1} \\ &= ST^2T^{-1} = ST \\ &= J. \end{aligned}$$

Ainsi $S_0 \in \mathrm{Sp}(2n)$.
Par ailleurs, pour tout $M \in H$, ${}^tMSM = S$ et $MR = RM$; on a donc :

$$\begin{aligned} {}^tMS_0M &= {}^tMSRM \\ &= SM^{-1}RM \\ &= SM^{-1}MR \\ &= SR = S_0. \end{aligned}$$

(f) On vérifie alors que $H' = S_0^{\frac{1}{2}}HS_0^{-\frac{1}{2}} \subset G$. En effet $H' \subset \mathrm{Sp}(2n)$ car $H \subset \mathrm{Sp}(2n)$ et $S_0 \in \mathcal{S}_{2n}^{++} \cap \mathrm{Sp}(2n)$ (donc $S_0^{\frac{1}{2}}$ aussi).
Par ailleurs pour tout $M \in H$, comme ${}^tMS_0M = S_0$, on a

$$\begin{aligned} {}^t\left(S_0^{\frac{1}{2}}MS_0^{-\frac{1}{2}}\right)S_0^{\frac{1}{2}}MS_0^{-\frac{1}{2}} &= \left(S_0^{-\frac{1}{2}}\right){}^tMS_0^{\frac{1}{2}}S_0^{\frac{1}{2}}MS_0^{-\frac{1}{2}} \\ &= S_0^{-\frac{1}{2}}S_0S_0^{-\frac{1}{2}} = I_{2n} \end{aligned}$$

D'où $H' \subset \mathrm{O}(2n)$. Et finalement $H' \subset G$.
Or G est lui-même un sous-groupe compact de $\mathrm{Sp}(2n)$. Ainsi, si on considère H, un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{Sp}(2n)$, on vérifie immédiatement que $H' = S_0^{\frac{1}{2}}HS_0^{-\frac{1}{2}}$ est encore un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{Sp}(2n)$ (car $S_0 \in \mathrm{Sp}(2n)$). L'inclusion $H' \subset G$ implique donc $H' = G$ et $H = S_0^{-\frac{1}{2}}HS_0^{\frac{1}{2}}$. On conclut finalement que tous les sous-groupes compacts maximaux de $\mathrm{Sp}(2n)$ sont conjugués à G.

9. *Structure de sous-variété de* $\mathrm{Sp}(2n)$ *:*

On considère l'application $\xi : \begin{cases} \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R}) & \longrightarrow \mathcal{A}_{2n}(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto {}^tMJM \end{cases}$.

(a) Chacune des coordonnées de ${}^tMJM$ est polynomiale en les coefficients de M ; l'application ξ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Par ailleurs $(M, N) \mapsto {}^tMJN$ est bilinéaire ; la différentielle de ξ au point M est donc

$$\mathrm{d}\xi_{|M} : \begin{cases} \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R}) \\ H & \longmapsto {}^tHJM + {}^tMJH \end{cases}.$$

(b) En particulier, on a $\mathrm{d}\xi_{|I_{2n}} : \begin{cases} \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R}) \\ H & \longmapsto {}^tHJ + JH \end{cases}$.

Son noyau est donc composé des matrices $H \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$ telles que ${}^tHJ = -JH$, c'est-à-dire ${}^t(JH) = JH$. On conclut donc que

$$\ker\ \mathrm{d}\xi_{|I_{2n}} = \{H \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R}),\ JH \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbf{R})\} = \{-JK,\ K \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbf{R})\} = -J\mathcal{S}_{2n}(\mathbf{R}).$$

La dimension du noyau est donc celle de $\mathcal{S}_{2n}(\mathbf{R})$ (puisque $K \mapsto -JK$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$), c'est-à-dire $\dfrac{2n(2n+1)}{2}$.
Par le théorème du rang, la dimension de l'image de $\mathrm{d}\xi_{|I_{2n}}$ est donc

$$\dim \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R}) - \dim \mathcal{S}_{2n}(\mathbf{R}) = \frac{2n(2n-1)}{2} = \dim \mathcal{A}_{2n}(\mathbf{R}).$$

Or l'image de $\mathrm{d}\xi_{|I_{2n}}$ est incluse dans $\mathcal{A}_{2n}(\mathbf{R})$: comme ${}^tJ = -J$, pour tout $H \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$, ${}^t({}^tHJ + JH) = -JH - {}^tHJ$. Par égalité des dimensions, on peut donc en déduire que l'image de $\mathrm{d}\xi_{|I_{2n}}$ est égale à $\mathcal{A}_{2n}(\mathbf{R})$. L'application est donc surjective de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$ sur $\mathcal{A}_{2n}(\mathbf{R})$.

(c) On constate que l'image de l'application ξ est elle-aussi incluse dans $\mathcal{A}_{2n}(\mathbf{R})$ (puisque ${}^tJ = -J$). On note

$$\widetilde{\xi} : \begin{cases} \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R}) & \longrightarrow \mathcal{A}_{2n}(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^{\frac{2n(2n-1)}{2}} \\ M & \longmapsto \xi(M) = {}^tMJM, \end{cases}$$

qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Par définition, $\mathrm{Sp}(2n) = \widetilde{\xi}^{-1}(\{J\})$. Il suffit donc de vérifier que $\widetilde{\xi}$ est une submersion en tout point de $\mathrm{Sp}(2n)$. On l'a d'ores et déjà montré au point I_{2n}.
De même pour tout $M \in \mathrm{Sp}(2n)$,

$$\begin{aligned} \ker\ \mathrm{d}\xi_{|M} &= \left\{H \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R}),\ {}^tHJM - {}^tMJH\right\} \\ &= \left\{H \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R}),\ {}^tMJH \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbf{R})\right\} \\ &= \left\{-J{}^tM^{-1}K,\ K \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbf{R})\right\} \\ &= -J{}^tM^{-1}\mathcal{S}_{2n}(\mathbf{R}). \end{aligned}$$

Et on montre comme ci-dessus que $\mathrm{d}\xi_{|M}$ est surjective de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$ sur $\mathcal{A}_{2n}(\mathbf{R})$.
Comme $\widetilde{\xi}$ est une submersion en tout point de $\mathrm{Sp}(2n)$, $\mathrm{Sp}(2n)$ est bien une sous-variété de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$ de dimension $\dim(\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})) - \dim(\mathcal{A}_{2n}(\mathbf{R})) = \dfrac{2n(2n+1)}{2}$.
Par ailleurs, on sait que l'espace tangent en I_{2n} est

$$\mathrm{T}_{I_{2n}}\mathrm{Sp}(2n) = \left\{H \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R}),\ \ \mathrm{d}\xi_{|I_{2n}}(H) = 0\right\} = -J\mathcal{S}_{2n}(\mathbf{R}).$$

Et de même, en tout point $M \in \mathrm{Sp}(2n)$, l'espace tangent est

$$\ker\ \mathrm{d}\xi_{|M} = -J{}^tM^{-1}\mathcal{S}_{2n}(\mathbf{R}) = -MJ\mathcal{S}_{2n}(\mathbf{R}) = M\mathrm{T}_{I_{2n}}\mathrm{Sp}(2n),$$

ce qui est naturel puisque $\mathrm{Sp}(2n)$ est un groupe.

III. Espaces lagrangiens

Soit ω une forme symplectique fixée sur E.

On dit qu'un sous-espace vectoriel F est ***isotrope*** (*resp.* **lagrangien**) si $F \subset F^\circ$ (*resp.* $F = F^\circ$).

1. Soit F un sous-espace vectoriel isotrope. On remarque tout d'abord que nécessairement $\dim F \leqslant n$, où $\dim E = 2n$. En effet, comme $F \subset F^\circ$, $\dim F \leqslant 2n - \dim F$.
   On suppose dans un premier temps F lagrangien ; alors $F = F^\circ$. Soit H isotrope tel que $F \subset H$. Alors $F \subset H \subset H^\circ \subset F^\circ = F$. Ces inclusions sont donc des égalités et en particulier $F = H$. Ainsi F est isotrope maximal au sens de l'inclusion.

On suppose maintenant $\dim E \neq 2\dim F$; nécessairement $\dim E > 2\dim F$. Dans ce cas, $\dim F < 2n - \dim F$ et donc $F \subsetneq F^\circ$. Soit $x \in F^\circ \backslash F$. On pose $H = F \oplus \mathrm{Vect}(x)$ et on va vérifier qu'il s'agit bien d'un espace isotrope. Soient $y = a + \alpha x \in H$ et $z = b + \beta x \in H$ avec $(a, b) \in F^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$; on a alors

$$\omega(y, z) = \omega(a, b) + \beta\omega(a, x) + \alpha\omega(x, b) + \alpha\beta\omega(x, x) = 0$$

car $F \subset F^\circ$ et $x \in F^\circ$. Le sous-espace F n'est donc pas isotrope maximal.

On suppose $\dim E = 2\dim F$, ainsi $\dim F = \dim F^\circ$. Comme par ailleurs $F \subset F^\circ$, on a donc l'égalité et F est lagrangien.

On a donc bien l'équivalence entre :

- F est lagrangien
- F est isotrope maximal au sens de l'inclusion.
- $\dim E = 2\dim F$.

2. On dit que deux espaces lagrangiens L et L' sont transverses si $L \cap L' = \{0_E\}$. Comme par ailleurs $\dim L + \dim L' = \dim E$, on peut dans ce cas conclure que $L \oplus L' = E$.

   Soit L un sous-espace lagrangien. On note $n = \dim L$ (ainsi $\dim E = 2n$). On considère

   $$\mathcal{H} = \{H \text{ sous-espace vectoriel de } E,\ H \cap L = \{0_E\} \text{ et } H \text{ isotrope}\}$$

   et soit

   $$\mathcal{D} = \{\dim(H),\ H \in \mathcal{H}\}.$$

   L'ensemble $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbf{N}$ ($0 \in \mathcal{D}$). Soit n_0 son plus grand élément et soit $H_0 \in \mathcal{H}$ tel que $n_0 = \dim H_0$. On suppose par l'absurde $n_0 < n$ c'est-à-dire H_0 non lagrangien.

   On a $H_0 \subset H_0^\circ$. Par ailleurs $L \cap H_0^\circ = L^\circ \cap H_0^\circ = (L \oplus H_0)^\circ$ a pour dimension $2n-(n+n_0) = n-n_0$. Ainsi $H' = H_0 \oplus (L \cap H_0^\circ) \subset H_0^\circ$ avec $\dim H' = n_0 + (n - n_0) = n < 2n - n_0 = \dim H_0^\circ$. On peut donc choisir $y \in H_0^\circ \backslash H'$. Ainsi, en reprenant l'argument de la question précédente $H = H_0 \oplus \mathrm{Vect}(y)$ est encore isotrope.

   Par ailleurs, par construction on a encore $H \cap L = \{0_E\}$. En effet soit $z \in H \cap L$. Or $H_0 \subset H \subset H^\circ \subset H_0^\circ$. Ainsi $z \in H_0^\circ \cap L \subset H'$. Comme $z \in H$, $z = z_1 + y_1$ avec $z_1 \in H_0$ et $y_1 \in \mathrm{Vect}(y)$. Or $z \in H'$ et $z_1 \in H'$; d'où $y_1 \in H' \cap \mathrm{Vect}(y)$. Par choix de y, nécessairement $y_1 = 0_E$. Finalement $z = z_1$; ainsi $z \in H_0 \cap L$ et donc $z = 0_E$.

   On aboutit donc à une contradiction.

   Finalement on peut conclure que $L' = H_0$ est lagrangien et il est bien transverse à L.

3. Soient L et L' deux sous-espaces lagrangiens transverses (on notera $2n = \dim E$).

   (a) La linéarité de $\sigma_{L,L'}$ découle de la bilinéarité de ω. Par égalité des dimensions $\dim L = n = \dim L'^*$, il suffit de montrer que l'application $\sigma_{L,L'}$ est injective. Soit $x \in \ker \sigma_{L,L'}$; ainsi $\sigma_{L,L'}(x) = 0_{L'^*}$ c'est-à-dire pour tout $y \in L'$, $\omega(x, y) = 0$. Ainsi $x \in L'^\circ = L'$. Or $L \cap L' = \{0_E\}$. D'où $x = 0_E$. Ainsi $\sigma_{L,L'}$ est injective et donc un isomorphisme de L vers L'^*.

   (b) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ base de L.

   Comme $\sigma_{L,L'}$ est un isomorphisme, $(\phi_1, \ldots, \phi_n) = (\sigma_{L,L'}(e_1), \ldots, \sigma_{L,L'}(e_n))$ est une base de L'^*. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ la base de L' dont $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ est la base duale. Alors par construction, pour tout $(i, j) \in \mathbf{N}_n^2$, $\omega(e_i, f_j) = \sigma_{L,L'}(e_i)(f_j) = \phi_i(f_j) = \delta_{i,j}$. Ainsi, en notant $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$ ($\mathcal{B}$ est bien une base de E car $L \oplus L' = E$), $Mat_{\mathcal{B}}(\omega) = J$ (on utilise également que L et L' sont lagrangiens).

On se place sur $E_0 = \mathbf{R}^{2n}$ muni de la structure symplectique ω_0. On note $\mathcal{L}(n)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels lagrangiens de E_0.

4. Pour tout $M \in \mathrm{Sp}(2n)$, l'endomorphisme associé à M est un automorphisme de E_0. Ainsi pour tout $L \in \mathcal{L}(n)$, ML est un sous-espace vectoriel de même dimension que L c'est-à-dire de dimension n. Par ailleurs, comme M préserve la forme symplectique, on vérifie immédiatement que ML est encore isotrope, et donc par dimension lagrangien.
   Ainsi
   $$\begin{cases} \mathrm{Sp}(2n) \times \mathcal{L}(n) & \longrightarrow \mathcal{L}(n) \\ (M, L) & \longmapsto ML = \{Mx,\ x \in L\} \end{cases}$$
   définit une action du groupe $\mathrm{Sp}(2n)$ sur $\mathcal{L}(n)$.
   On pose $L_0 = \mathbf{R}^n \times \{0_{\mathbf{R}^n}\}$ et $L'_0 = \{0_{\mathbf{R}^n}\} \times \mathbf{R}^n$. On vérifie immédiatement qu'il s'agit de sous-espaces vectoriels lagrangiens (les blocs en haut à gauche et en bas à droite de J sont nuls).
   On considère un couple (L, L') de lagrangiens transverses et on souhaite établir l'existence de $M \in \mathrm{Sp}(2n)$ telle que $ML_0 = L$ et $ML'_0 = L'$.
   D'après la question 3b, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$ de E formée en concaténant une base de L et une base de L' telle que $Mat_{\mathcal{B}}(\omega_0) = J$. Soit M la matrice de passage de la base canonique de $E_0 = \mathbf{R}^{2n}$ à cette base $\mathcal{B}$. Alors, comme J est la matrice de ω_0 dans la base canonique, ${}^tMJM = Mat_{\mathcal{B}}(\omega_0) = J$. La matrice M est donc symplectique et par construction $ML_0 = L$ et $ML'_0 = L'$.
   On peut donc conclure que $\mathrm{Sp}(2n)$ agit transitivement sur les couples de lagrangiens transverses.

5. Soient L_1, L_2 et L_3 trois sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses.

   (a) On vérifie tout d'abord que l'application linéaire $g_{L_1,L_2,L_3} = \sigma_{L_1,L_2} \circ \sigma^{-1}_{L_1,L_3} \circ \sigma_{L_2,L_3}$ est bien définie ; et il s'agit d'une composée d'isomorphismes, donc un isomorphisme de L_2 vers L_2^*.

   (b) Pour tout $(x, y) \in L_2^2$, on pose $g(x, y) = g_{L_1,L_2,L_3}(x)(y)$. Pour tout $x \in L_2$, $g_{L_1,L_2,L_3}(x) \in L_2^*$, et donc g est linéaire par rapport à la deuxième variable. Et par linéarité de g_{L_1,L_2,L_3}, elle est également linéaire par rapport à la première variable.
   Comme g_{L_1,L_2,L_3} est un isomorphisme, et donc injectif, la forme bilinéaire g est bien non dégénérée.
   Il reste à vérifier la symétrie. Pour cela, pour $(x, y) \in L_2^2$, on décompose $x = x_1 + x_3$ et $y = y_1 + y_3$ avec $(x_1, y_1) \in L_1^2$ et $(x_3, y_3) \in L_3^2$ (comme L_1 et L_3 sont transverses, ils sont supplémentaires dans E_0).
   Pour tout $z \in L_3$, $\sigma_{L_2,L_3}(x)(z) = \omega(x, z) = \omega(x_1, z)$ (car L_3 est lagrangien) ; ainsi $\sigma_{L_2,L_3}(x) = \sigma_{L_1,L_3}(x_1)$. Et donc $\sigma^{-1}_{L_1,L_3} \circ \sigma_{L_2,L_3}(x) = x_1$.
   Finalement, $g_{L_1,L_2,L_3}(x)(y) = \omega(x_1, y) = \omega(x_1, y_3)$ (car L_1 est lagrangien).
   De même $g_{L_1,L_2,L_3}(y)(x) = \omega(y_1, x_3)$.
   Or, L_2 est lagrangien, donc $\omega(x_1, y_3) + \omega(x_3, y_1) = \omega(x, y) = 0$. On peut donc conclure que $g_{L_1,L_2,L_3}(x)(y) = g_{L_1,L_2,L_3}(y)(x)$ et donc g est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

   (c) On note (r, s) la signature de cette forme g et on pose
   $$\mathrm{sgn}(L_1, L_2, L_3) = r - s.$$
   Comme g est une forme non dégénérée sur L_2 (de dimension n), $r + s = n$ avec r et s des entiers compris entre 0 et n. On peut donc conclure que $\mathrm{sgn}(L_1, L_2, L_3)$ est un entier compris entre $-n$ et n, de même parité que n.

On se fixe un entier r compris entre 0 et n. On choisit $L_1 = \mathbf{R}^n \times \{0_{\mathbf{R}^n}\}$, $L_3 = \{0_{\mathbf{R}^n}\} \times \mathbf{R}^n$. On note $(e_1, \ldots e_n, f_1, \ldots f_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^{2n}$.
Et on considère $L_2 = \mathrm{Vect}(z_1, \ldots z_n)$ avec $z_j = e_j + f_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$ et $z_j = e_j - f_j$ pour $r+1 \leqslant j \leqslant n$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension n (car la famille est libre) ; et on vérifie immédiatement qu'il est isotrope. Il s'agit donc d'un espace lagrangien. Et il est bien transverse à L_1 et à L_3.
Par ailleurs, d'après 5b, en notant $g = g_{L_1, L_2, L_3}$, pour tout $(i,j) \in \mathbf{N}_n^2$, $g(z_i, z_j) = \omega(e_i, \epsilon_j f_j)$ (avec $\epsilon_j = 1$ si $j \leqslant r$, -1 sinon). Ainsi $g(z_i, z_j) = \delta_{i,j}\epsilon_j$.
La matrice de g dans la base $(z_1, \ldots z_n)$ est donc diagonale : $\mathrm{diag}(1, \ldots 1, -1, \ldots -1)$ avec r éléments diagonaux valant 1 et $(n-r)$ valant -1.
Finalement $\mathrm{sgn}(L_1, L_2, L_3) = r - (n-r) = 2r - n$. Quand r varie de 0 à n, on obtient bien toutes les valeurs comprises entre $-n$ et n qui ont même parité que n.

6. L'action de groupe définie à la question 4 permet de faire agir $\mathrm{Sp}(2n)$ sur les triplets de sous-espaces lagrangiens (L_1, L_2, L_3) deux à deux transverses (en posant pour tout $M \in \mathrm{Sp}(2n)$, $M \cdot (L_1, L_2, L_3) = (ML_1, ML_2, ML_3)$).
On considère un tel triplet (L_1, L_2, L_3). Soit $M \in \mathrm{Sp}(2n)$. On note
$$(L'_1, L'_2, L'_3) = (ML_1, ML_2, ML_3).$$
Et on note g' la forme bilinéaire sur L'_2 associée à ce triplet et g celle sur L_2 associée au triplet (L_1, L_2, L_3).
Soit $(x', y') \in (L'_2)^2$: $x' = Mx$, $y' = My$ avec $(x, y) \in (L_2)^2$.
On décompose comme dans la question 5b : $x = x_1 + x_3$, $y = y_1 + y_3$, avec $(x_1, y_1) \in (L_1)^2$ et $(x_3, y_3) \in (L_3)^2$. Ainsi $x' = Mx = Mx_1 + Mx_3$ et $y' = My = My_1 + My'_3$ avec $(Mx_1, My_1) \in (L'_1)^2$ et $(Mx_3, My_3) \in (L'_3)^2$.
On a alors $g'(x', y') = \omega_0(Mx_1, My_3)$; or M est symplectique, donc
$$g(x', y') = \omega_0(x_1, y_3) = g(x, y).$$
On vérifie ainsi que g et g' ont même signature. Et donc $\mathrm{sgn}(L'_1, L'_2, L'_3) = \mathrm{sgn}(L_1, L_2, L_3)$.

On considère maintenant un triplet de lagrangiens transverses (L'_1, L'_2, L'_3) tel que
$$\mathrm{sgn}(L'_1, L'_2, L'_3) = 2n - r \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r \leqslant n.$$
On va montrer que ce triplet appartient à l'orbite du triplet (L_1, L_2, L_3) construit à la question 5c tel que $\mathrm{sgn}(L_1, L_2, L_3) = 2n - r = \mathrm{sgn}(L'_1, L'_2, L'_3)$.
Pour cela, on choisit dans un premier temps une base $(z'_1, \ldots, z'_n)$ de L'_2 telle que la matrice de la forme bilinéaire g' dans cette base soit $\mathrm{diag}(1, \ldots 1, -1, \ldots -1)$ (avec r éléments diagonaux valant 1 et $n - r$ valant -1). Et pour tout $j \in \mathbf{N}_n$, on décompose $z'_j = u_j + v_j$ avec $u_j \in L'_1$ et $v_j \in L'_3$.
En notant $\epsilon_j = 1$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$, $\epsilon_j = -1$ pour $r+1 \leqslant j \leqslant n$, on a pour tout $(i,j) \in \mathbf{N}_n^2$:
$$\omega_0(u_i, v_j) = g'(z'_i, z'_j) = \delta_{i,j}\epsilon_j. \tag{2.1}$$
On vérifie dans un premier temps que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de L'_1 et $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de L'_3. Comme L'_1 et L'_3 sont de dimension n, il suffit pour cela de vérifier que les familles sont libres.
On considère donc des scalaires $(\alpha_k)_{k \in \mathbf{N}_n} \in \mathbf{R}^n$ tels que $\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k = 0_{E_0}$. D'après (2.1), pour tout $j \in \mathbf{N}_n$, $\epsilon_j \alpha_j = \omega_0\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k, v_j\right) = 0$; et donc $\alpha_j = 0$. La famille est donc libre. On montre de même le résultat pour la famille $(v_1, \ldots, v_n)$.

Comme $L'_1 \oplus L'_3 = E_0$, on considère la base

$$\mathcal{B}' = (e'_1, \dots e'_n, f'_1, \dots f'_r, f'_{r+1}, \dots, f'_n) = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_r, -v_{r+1}, \dots, -v_n)$$

de E_0 et M la matrice de changement de base de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n, f_1, \dots f_n)$ de E_0 à la base $\mathcal{B}'$.
D'après (2.1), pour tout $(i,j) \in \mathbf{N}_n^2$,

$$\omega_0(e'_i, f'_j) = \delta_{i,j} = \omega_0(e_i, f_j) \quad \text{et} \quad \omega_0(e'_i, e'_j) = \omega_0(f'_i, f'_j) = 0 = \omega_0(e_i, e_j) = \omega_0(f_i, f_j)\,;$$

on en déduit donc que l'endomorphisme associé à M est symplectique et M est donc bien une matrice symplectique. Et par construction $ML_1 = L'_1$ et $ML_3 = L'_3$.
Reste à vérifier que $ML_2 = L'_2$. Or pour tout $j \in \mathbf{N}_n$, $M(e_j + \epsilon_j f_j) = e'_j + \epsilon f'_j$. On a donc le résultat et on peut donc conclure.

Une autre manière d'aborder cette question : Pour le couple $L_1 = \mathbf{R}^n \times \{0\}$, $L_3 = \{0\} \times \mathbf{R}^n$, la donnée d'un espace L_2 transverse peut être vue comme un graphe associé à une matrice inversible $F \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ FX \end{pmatrix},\ X \in \mathbf{R}^n \right\}.$$

On peut le voir en considérant une base $(Z_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ de L_2, avec pour tout $j \in \mathbf{N}_n$, $Z_j = \begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix}$.
Comme L_2 est transverse à L_3, la famille $(X_j)_j$ est une base de $\mathbf{R}^n$. On considère alors l'unique matrice F telle que pour tout j, $Y_j = FX_j$; elle est bien inversible car L_2 est transverse à L_1.
Le fait que L_2 soit lagrangien se traduit alors par la symétrie de la matrice F : pour tous vecteurs X et Y de $\mathbf{R}^n$, se traduit par ${}^tXFY = {}^tX{}^tFY$.
La forme symétrique associée au triplet (L_1, L_2, L_3) est alors donnée par cette matrice F et donc $\mathrm{sgn}(L1, L2, L3) = \mathrm{sgn}(F)$.
Pour prouver que $\mathrm{Sp}(2n)$ agit transitivement sur les triplets de même signature, il suffit de voir que le stabilisateur du couple standard (L_1, L_3) agit transitivement sur les triplets correspondants. Or ce stabilisateur est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbf{R})$. Et une telle matrice envoie $\begin{pmatrix} X \\ FX \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} AX \\ {}^tA^{-1}FX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ {}^tA^{-1}FA^{-1}AX \end{pmatrix}$. Ainsi le triplet (L_1, L_2, L_3) associé à la matrice F est envoyé sur le triplet associé à la matrice ${}^tA^{-1}FA^{-1}$. Or pour cette action de $\mathrm{Gl}_n(\mathbf{R})$ sur l'ensemble des matrices symétriques, les orbites sont bien les matrices de même signature.

IV. Indices de Maslov

Pour tout $M \in \mathrm{Sp}(2n)$, on pose $\rho(M) = \det\left(i_c((M^tM)^{-\frac{1}{2}}M)\right)$ (avec les notations de la partie **2.2**).

1. Soit $\Gamma : [0,1] \to \mathrm{Sp}(2n)$ chemin continu et fermé. On pose $\gamma = \rho \circ \Gamma$; il s'agit bien d'un chemin continu, comme composée d'applications continues (l'application qui à une matrice M associe sa décomposition polaire est continue), et fermé car Γ est fermé.

On peut donc considérer θ un relèvement de γ et on définit l'**indice de Maslov** de Γ : $\mu(\Gamma) = \theta(1) - \theta(0)$.

2. Par hypothèse, $e^{2i\pi\theta(1)} = \gamma(1) = \gamma(0) = e^{2i\pi\theta(0)}$. On en déduit que $\mu(\Gamma) = \theta(1) - \theta(0) \in \mathbf{Z}$. Par ailleurs si θ' est un autre relèvement de γ, il existe une constante $k \in \mathbf{Z}$ telle que $\theta' = \theta + k$. Et alors $\theta'(1) - \theta'(0) = \theta(1) - \theta(0)$. La quantité $\mu(\Gamma)$ est indépendante du relèvement choisi.

3. Soit $k \in \mathbf{Z}$. Pour tout $t \in [0,1]$, $\mathrm{diag}(e^{2i\pi kt}, 1, \dots, 1) \in \mathrm{U}(n)$; et donc $i_r\left(\mathrm{diag}(e^{2i\pi kt}, 1 \dots, 1)\right) \in G = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n)$.
On pose donc $\Gamma_k : \begin{cases} [0,1] & \to \mathrm{Sp}(2n) \\ t & \mapsto \begin{pmatrix} A(t) & -B(t) \\ B(t) & A(t) \end{pmatrix} \end{cases}$ avec $A(t) = \mathrm{diag}(\cos(2\pi kt), 1, \dots, 1)$ et $B(t) = \mathrm{diag}(\sin(2\pi kt), 0, \dots, 0)$.
Ainsi pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t) = \det\left(i_c(\Gamma_k(t))\right) = e^{2i\pi kt}$.
On peut donc choisir comme relèvement $\theta : t \mapsto kt$ et $\mu(\Gamma_k) = k$.

4. Soit $L \in \mathcal{L}(n)$. On reprend la construction de la question **2.2**.4. On choisit dans un premier temps une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de L (pour le produit scalaire canonique de $E_0 = \mathbf{R}^{2n}$) ; et on pose pour tout $j \in \mathbf{N}_n$, $f_j = -Je_j$. Ainsi, pour tout $(i,j) \in \mathbf{N}_n^2$, $\omega_0(e_i, f_j) = \omega_0(e_i, -Je_j) = \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{i,j}$; et $\omega_0(f_i, f_j) = \omega_0(Je_i, Je_j) = \omega_0(e_i, e_j) = 0$ car L est lagrangien.
On en déduit que la famille $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ est une base orthonormée de E_0 (d'après ci-dessus et les liens entre ω_0 et le produit scalaire explicité à la question **2.2**.6c). De plus, $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\omega_0) = J$.
Soit M la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$. Comme dans **2.2**.4., la matrice M est symplectique et $ML_0 = L$. Mais, la base $\mathcal{B}$ est orthonormée et donc M est une matrice orthogonale. Finalement $M \in G = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n)$. On a donc bien montré le résultat souhaité.

5. (a) On a déjà expliqué (et utilisé) au **2.2**.4. que L_0 était un sous-espace lagrangien.
Soit $M \in G$; on a vu à la question 6b que M s'écrit sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ avec ${}^tAA + {}^tBB = I_n$ et $-{}^tAB + {}^tBA = 0$.
La condition M appartient au stabilisateur S_0 de L_0 s'écrit :
$$\begin{aligned} ML_0 = L_0 &\iff \forall X = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2n},\ MX = \begin{pmatrix} AX_1 \\ BX_1 \end{pmatrix} \in L_0 \\ &\iff \forall X_1 \in \mathbf{R}^n,\ BX_1 = 0 \\ &\iff B = 0 \\ &\iff M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Le stabilisateur de L_0 est donc :
$$S_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},\ {}^tAA = I_n \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},\ A \in \mathrm{O}(n) \right\},$$
qui est donc, via i_c isomorphe à $\mathrm{O}(n)$:
$$\forall M \in G,\ M \in S_0 \iff i_c(M) = A \in \mathrm{O}(n)$$
(ce qui se traduit également par : $\forall U \in \mathrm{U}(n),\ i_r(U) \in S_0 \Leftrightarrow U = A \in \mathrm{O}(n)$).

(b) On remarque que pour tout $U \in \mathrm{U}(n)$, la condition $U \in \mathrm{O}(n)$ est équivalente à $U = \overline{U}$.
Pour tout $(U_1, U_2) \in \mathrm{U}(n)^2$, en notant $M_1 = i_r(U_1)$ et $M_2 = i_r(U_2)$, on a donc les équivalences,

$$\begin{aligned}
i_r(U_1)L_0 = i_r(U_2)L_0 &\iff M_2^{-1}M_1L_0 = L_0\\
&\iff M_2^{-1}M_1 \in S_0\\
&\iff i_c\left(M_2^{-1}M_1\right) = U_2^{-1}U_1 \in \mathrm{O}(n)\\
&\iff \overline{U_2^{-1}U_1} = U_2^{-1}U_1\\
&\iff {}^tU_2{}^tU_1^{-1} = U_2^{-1}U_1\\
&\iff U_1{}^tU_1 = U_2{}^tU_2.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout sous-espace lagrangien L, la quantité $\Lambda_L = U^tU$, où $L = i_r(U)L_0$, ne dépend que de L et pas du choix de U.

6. Soit $L \in \mathcal{L}(n)$, on pose $\xi(L) = \det(\Lambda_L)$. Soit $U \in \mathrm{U}(n)$ tel que $L = i_r(U)L_0$. Par définition, $\xi(L) = \det(U^tU) = \det(U)\det({}^tU) = \det(U^2)$.
   Par ailleurs, comme $U \in \mathrm{U}(n)$, $\det(U) \in \mathbf{U}$ et donc $\xi(L) \in \mathbf{U}$.

D'après la question 5a on dispose d'un isomorphisme naturel entre $\mathcal{L}(n)$ et $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$. Cela nous permet de munir $\mathcal{L}(n)$ d'une topologie et de définir ce qu'est un chemin continu Γ dans l'espace $\mathcal{L}(n)$: c'est la donnée d'une application continue V de $[0,1]$ dans $\mathrm{U}(n)$, telle que pour tout $t \in [0,1]$, $\Gamma(t) = i_r(V(t))L_0$.

7. Soient Γ un chemin fermé dans l'espace $\mathcal{L}(n)$ et γ un chemin fermé dans G.
   On considère une application continue V de $[0,1]$ dans $\mathrm{U}(n)$, telle que pour tout $t \in [0,1]$, $\Gamma(t) = i_r(V(t))L_0$. Et soit θ un relèvement de l'application continue $\xi \circ \Gamma$. Ainsi pour tout $t \in [0,1]$, $\mathrm{e}^{2i\pi\theta(t)} = \xi(\Gamma(t)) = \det\left(V(t)^2\right)$.
   Par ailleurs, pour toute matrice $M \in G = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n)$, la décomposition polaire de M s'écrit simplement $M = I_{2n}M$, et donc $\rho(M) = \det\left(i_c(M)\right)$. On en déduit (comme γ est à valeurs dans G) que si l'on considère θ_1 un relèvement de $\rho \circ \gamma$, celui-ci vérifie : pour tout $t \in [0,1]$, $\mathrm{e}^{2i\pi\theta_1(t)} = \det\left(i_c(\gamma(t))\right)$.
   Le chemin $\gamma\Gamma$ est bien un chemin continu fermé de $[0,1]$ dans $\mathcal{L}(n)$. Comme γ est à valeurs dans G, pour tout $t \in [0,1]$ $\gamma(t)\Gamma(t) = \gamma(t)i_r(V(t))L_0 = i_r\left(i_c(\gamma(t))V(t)\right)L_0$; et donc

$$\begin{aligned}
\xi(\gamma(t)\Gamma(t)) &= \det\left(i_c(\gamma(t))V(t)\right)^2 && (2.2)\\
&= \det\left(i_c(\gamma(t))^2\det\left(V(t)^2\right)\right. && (2.3)\\
&= \mathrm{e}^{2i\pi(2\theta_1(t)+\theta(t))}
\end{aligned}$$

   Ainsi $\theta + 2\theta_1$ est bien un relèvement associé au chemin $\gamma\Gamma$ et donc

$$\mu_{\mathcal{L}}(\gamma\Gamma) = (\theta + 2\theta_1)(1) - (\theta + 2\theta_1)(0) = \mu_{\mathcal{L}}(\Gamma) + 2\mu(\gamma).$$

8. Soit $k \in \mathbf{Z}$. L'application $V : t \mapsto V(t) = \mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{i\pi kt}, 1\dots1\right)$ est continue de $[0,1]$ dans $\mathrm{U}(n)$.
   On remarque que $i_r(V(0)) = I_{2n}$ et $i_r(V(1)) = \begin{pmatrix} A_1 & 0\\ 0 & A_1\end{pmatrix}$ avec $A_1 = \mathrm{diag}\left((-1)^k, 1\dots1\right)$.
   On considère le chemin continu Γ dans l'espace $\mathcal{L}(n)$ défini par : pour tout $t \in [0,1]$, $\Gamma(t) = i_r(V(t))L_0$. Ainsi $\Gamma(0) = L_0 = \Gamma(1)$.
   Pour tout $t \in [0,1]$, $\xi \circ \Gamma(t) = \mathrm{e}^{2i\pi kt}$; $\theta : t \mapsto kt$ est donc bien un relèvement et $\mu_{\mathcal{L}}(\Gamma) = k$.
   Ainsi $\mu_{\mathcal{L}}$ est surjectif de l'ensemble des chemins fermés de $\mathcal{L}(n)$ dans $\mathbf{Z}$.

9. Soit L sous-espace vectoriel lagrangien ; $L = i_r(U)L_0$ avec

$$U = A + iB \in \mathrm{U}(n) \quad \text{et} \quad i_r(U) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

On traduit la transversalité de L et L_0 :

$$\begin{aligned}
L \cap L_0 = \{0\} &\Longleftrightarrow i_r(U)L_0 \cap L_0 = \{0\} \\
&\Longleftrightarrow \forall X = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in L_0\backslash\{0\},\ i_r(U)X \notin L_0 \\
&\Longleftrightarrow \forall X_1 \in \mathbf{R}^n\backslash\{0\},\ BX_1 \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow B \in Gl_n(\mathbf{R}) \\
&\Longleftrightarrow \det(B) \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \det\left(U - \overline{U}\right) \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \det\left(U - {}^tU^{-1}\right) \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \det\left(U{}^tU - I_n\right) \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \Lambda_L - I_n \in Gl_n(\mathbf{C}).
\end{aligned}$$

(L'avant-dernière équivalence est justifiée car $\det {}^tU \neq 0$).
De même si on considère deux lagrangiens L et L' avec $L = i_r(U)L_0$ et $L' = i_r(U')L_0$ avec $(U, U') \in \mathrm{U}(n)^2$, on a :

$$\begin{aligned}
L \cap L' = \{0\} &\Longleftrightarrow i_r(U)L_0 \cap i_r(U')L_0 = \{0\} \\
&\Longleftrightarrow i_r(U')^{-1} i_r(U)L_0 \cap L_0 = \{0\} \\
&\Longleftrightarrow i_r\left(U'^{-1}U\right) L_0 \cap L_0 = \{0\}
\end{aligned}$$

En reprenant l'équivalence ci-dessus, on en déduit que

$$\begin{aligned}
L \cap L' = \{0\} &\Longleftrightarrow \det\left(\overline{U'^{-1}U} - U'^{-1}U\right) \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \det\left({}^tU'\overline{U} - U'^{-1}U\right) \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \det\left({}^tU'{}^tU^{-1} - U'^{-1}U\right) \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \det\left(U'{}^tU' - U{}^tU\right) \neq 0.
\end{aligned}$$

(La dernière équivalence s'obtient en multipliant par $\det(U')\det({}^tU) \neq 0$.)
Finalement L et L' sont transverses si et seulement si $\Lambda_L - \Lambda_{L'}$ est inversible.

On note $\widehat{\mathcal{L}(n)}$ l'ensemble des couples (L, θ) avec $L \in \mathcal{L}(n)$ sous-espace lagrangien, et $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $\xi(L) = \mathrm{e}^{i\theta}$. (On le munit de la topologie produit).

Pour tous couples (L, θ) et (L', θ') de $\widehat{\mathcal{L}(n)}$, avec L et L' sous-espaces lagrangiens transverses, on définit l'indice de Maslov par :

$$m\left((L, \theta), (L', \theta')\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\theta' - \theta\right) + \frac{i}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} \log(\lambda_j),$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les n valeurs propres avec multiplicité de la matrice $-\Lambda_{L'}\Lambda_L^{-1}$, et où log désigne la détermination principale du logarithme sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$.

10. On considère (L, θ) et (L', θ') dans $\widehat{\mathcal{L}(n)}$, avec L et L' des sous-espaces lagrangiens transverses. Pour montrer que $m((L,\theta),(L',\theta'))$ est bien défini, il (faut et il) suffit de vérifier que $\mathrm{Sp}\left(-\Lambda_{L'}\Lambda_L^{-1}\right) \cap \mathbf{R}_- = \varnothing$.

    Avec les notations de la question précédente, comme les matrices U et U' associées à L et L' sont unitaires, $-\Lambda_{L'}\Lambda_L^{-1}$ est unitaire et donc $\mathrm{Sp}\left(-\Lambda_{L'}\Lambda_L^{-1}\right) \subset \mathbf{U}$. Il suffit donc de vérifier que $-1 \notin \mathrm{Sp}\left(-\Lambda_{L'}\Lambda_L^{-1}\right)$.
    Or $\det(\Lambda_L - \Lambda_{L'}) \neq 0$; d'où $\det\left(I_n - \Lambda_{L'}\Lambda_L^{-1}\right) \neq 0$ c'est-à-dire exactement $-1 \notin \mathrm{Sp}\left(-\Lambda_{L'}\Lambda_L^{-1}\right)$.
    On peut donc conclure que $m((L,\theta),(L',\theta'))$ est bien défini.
    Par définition,

$$\begin{aligned}
e^{2i\pi m((L,\theta),(L',\theta'))} &= e^{i\theta'}e^{-i\theta}\prod_{j=1}^{n} e^{-\log(\lambda_j)} \\
&= \frac{\xi(L')}{\xi(L)}\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}\lambda_j} \\
&= \frac{\xi(L')}{\xi(L)}\frac{1}{\det\left(-\Lambda_{L'}\Lambda_L^{-1}\right)} \\
&= \frac{\xi(L')}{\xi(L)}(-1)^n\frac{\det\Lambda_L}{\det\Lambda_{L'}}.
\end{aligned}$$

    Or $\xi(L) = \det\Lambda_L$, et de même pour L'. Finalement, $e^{2i\pi m((L,\theta),(L',\theta'))} = (-1)^n = e^{in\pi}$.
    On en déduit que $m((L,\theta),(L',\theta')) \in \mathbf{Z}$ si n est pair, et $\mathbf{Z} + \frac{1}{2}$ si n est impair.

11. Pour tout $M \in G$, et pour $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\det(i_c(M)) = e^{i\alpha}$, on pose $M_\alpha = (M, \alpha)$. Pour tout $(L,\theta) \in \widehat{\mathcal{L}(n)}$, on définit $M_\alpha.(L,\theta) = (ML, \theta + 2\alpha)$.

    Soient (L,θ) et (L',θ') dans $\widehat{\mathcal{L}(n)}$, avec L et L' sous-espaces lagrangiens transverses. Pour tout M dans G, les lagrangiens ML et ML' sont encore transverses.
    Par ailleurs, $L = i_r(U)L_0$ avec $U \in \mathrm{U}(n)$ et $i_r(U) \in G$. Ainsi pour tout

$$M \in G\,,\ ML = i_r(i_c(M))i_r(U)L_0 = i_r(i_c(M)U)L_0 \quad \text{avec} \quad i_c(M)U \in \mathrm{U}(n).$$

    On en déduit que

$$\Lambda_{ML} = i_c(M)U{}^tU{}^t(i_c(M)) = i_c(M)\Lambda_L{}^t(i_c(M)).$$

    De même

$$\Lambda_{ML'} = i_c(M)U'{}^tU'{}^t(i_c(M)) = i_c(M)\Lambda_{L'}{}^t(i_c(M)).$$

    Ainsi $\xi(ML) = \xi(L)\det(i_c(M))^2 = e^{i(\theta+2\alpha)}$. La définition de $M_\alpha.(L,\theta) = (ML, \theta+2\alpha)$ est donc licite.
    De même, $\xi(ML') = \xi(L')\det(i_c(M))^2 = e^{i(\theta'+2\alpha')}$.
    Finalement, on peut donc bien définir $m\left(M_\alpha.(L,\theta), M_{\alpha'}.(L',\theta')\right)$.
    Et d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}
-\Lambda_{ML'}\Lambda_{ML}^{-1} &= -i_c(M)\Lambda_{L'}{}^t(i_c(M)){}^t(i_c(M))^{-1}\Lambda_L^{-1}i_c(M)^{-1} \\
&= -i_c(M)\Lambda_{L'}\Lambda_L^{-1}i_c(M)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

    est conjuguée à $-\Lambda_{L'}\Lambda_L^{-1}$ et a donc les mêmes valeurs propres (avec multiplicités).
    Finalement

$$m\left(M_\alpha.(L,\theta), M_\alpha.(L',\theta')\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\theta' + 2\alpha - (\theta + 2\alpha)\right) + \frac{i}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\log(\lambda_j) = m\left((L,\theta),(L',\theta')\right).$$

12. On considère un triplet (L_1, L_2, L_3) de sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses. Comme
$$\frac{1}{2\pi}(\theta_2-\theta_1)+\frac{1}{2\pi}(\theta_3-\theta_2)+\frac{1}{2\pi}(\theta_1-\theta_3)=0,$$
on constate que la quantité $m((L_1,\theta_1),(L_2,\theta_2))+m((L_2,\theta_2),(L_3,\theta_3))+m((L_3,\theta_3),(L_1,\theta_1))$ est indépendante des angles $(\theta_j)_{1\leqslant j\leqslant 3}$ choisis. On la note $C(L_1,L_2,L_3)$.

   On considère $M\in G$ et on considère $\alpha\in\mathbf{R}$ tel que $\det(i_c(M))=\mathrm{e}^{i\alpha}$.
   D'après les questions précédentes, on a alors :
$$\begin{aligned}C(ML_1,ML_2,ML_3)&=m(M_\alpha.(L_1,\theta_1),M_\alpha.(L_2,\theta_2))+m(M_\alpha.(L_2,\theta_2),M_\alpha.(L_3,\theta_3))\\&\quad+m(M_\alpha.(L_3,\theta_3),M_\alpha.(L_1,\theta_1))\\&=m((L_1,\theta_1),(L_2,\theta_2))+m((L_2,\theta_2),(L_3,\theta_3))+m((L_3,\theta_3),(L_1,\theta_1))\\&=C(L_1,L_2,L_3).\end{aligned}$$
   Ainsi, cette quantité est invariante par l'action de G sur les triplets de sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses.

13. On admet la continuité de C. On se fixe (L_1,L_2,L_3) un triplet de sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses. L'application qui à $M\in\mathrm{Sp}(2n)$ associe $C(ML_1,ML_2,ML_3)$ est alors continue et à valeurs dans $\mathbf{Z}\cup\mathbf{Z}+\frac{1}{2}$, qui est discret. Or $\mathrm{Sp}(2n)$ est connexe par arcs d'aprés **2.2**.7b. On peut donc conclure que l'application est constante sur $\mathrm{Sp}(2n)$. Ainsi pour tout $M\in\mathrm{Sp}(2n)$, $C(ML_1,ML_2,ML_3)=C(L_1,L_2,L_3)$.

14. D'après la question précédente et la question **2.2**.6, il suffit de démontrer le résultat pour un triplet particulier de chaque signature. Plus particulièrement, on va le montrer pour les triplets de la question **2.2**.5c.
   On se fixe donc un entier r compris entre 0 et n. Et on pose $L_1=\mathbf{R}^n\times\{0_{\mathbf{R}^n}\}$, $L_3=\{0_{\mathbf{R}^n}\}\times\mathbf{R}^n$ et $L_2=\mathrm{Vect}(z_1,\dots z_n)$ avec $z_j=e_j+f_j$ pour $1\leqslant j\leqslant r$ et $z_j=e_j-f_j$ pour $r+1\leqslant j\leqslant n$, avec $(e_1,\dots e_n,f_1,\dots f_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^{2n}$.
   On a vu à la question **2.2**.5c que $\mathrm{sgn}(L_1,L_2,L_3)=2r-n$. On va calculer $C(L_1,L_2,L_3)$.
   On a $L_1=I_{2n}L_0$ avec $I_{2n}\in G$ et donc $U_1=i_c(I_{2n})=I_n$, $\Lambda_{L_1}=\Lambda_1=I_n$.
   De plus, $L_3=-JL_0=i_r(iI_n)L_0$, avec $U_3=iI_n\in\mathrm{U}(n)$. Ainsi $\Lambda_{L_3}=\Lambda_3=-I_n$.
   Par ailleurs, $L_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}I_n & -D_r\\ D_r & I_n\end{pmatrix}L_0$, avec $D_r=\mathrm{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$ avec r éléments diagonaux valant 1. Ainsi $L_2=i_r\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(I_n+iD_r)\right)L_0$, avec $U_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(I_n+iD_r)\in\mathrm{U}(n)$ (on vérifie par calcul que la matrice est unitaire). Ainsi $\Lambda_{L_2}=\Lambda_2=\frac{1}{2}{}^t(I_n+iD_r)(I_n+iD_r)=iD_r$.
   Ainsi $-\Lambda_2\Lambda_1^{-1}=-iD_r$: r valeurs propres valent $-i$ et ont comme logarithme $-i\frac{\pi}{2}$ et $n-r$ valeurs propres valent i et ont comme logarithme $i\frac{\pi}{2}$.
   De même $-\Lambda_3\Lambda_2^{-1}=-(-I_n)(-iD_r)=-iD_r$.
   Enfin, $-\Lambda_1\Lambda_3^{-1}=-(-I_n)=I_n$: toutes les valeurs propres valent 1 et ont comme logarithme 0.
   Finalement, on calcule (en tenant compte que la somme des termes en θ_j est nulle) :

$$\begin{aligned}
C(L_1, L_2, L_3) &= m\left((L_1, \theta_1), (L_2, \theta_2)\right) + m\left((L_2, \theta_2), (L_3, \theta_3)\right) + m\left((L_3, \theta_3), (L_1, \theta_1)\right) \\
&= \frac{i}{2\pi}\left(-ir\frac{\pi}{2} + (n-r)i\frac{\pi}{2} - ir\frac{\pi}{2} + (n-r)i\frac{\pi}{2} + n0\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}(2r - 2(n-r))\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{2}(2r-n) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(L_1, L_2, L_3)
\end{aligned}$$

On a donc finalement pour tout triplet de lagrangiens deux à deux transverses :

$$C(L_1, L_2, L_3) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(L_1, L_2, L_3).$$

Chapitre 3

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

Le sujet est disponible à l'URL http://www.devenirenseignant.gouv.fr./cid98775/les-sujets-des-epreuves-d-admissibilite-et-rapports-des-jury-des-concours-de-l-agregation-de-la-session-2016.html

3.1 Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

Objectifs et organisation du sujet

Le sujet d'Analyse et Probabilités de la session 2016 avait pour objectif d'établir le théorème ergodique ponctuel de Birkhoff, et de l'appliquer au développement en fractions continuées des réels irrationnels.

Dans la partie **I**, on établit les propriétés élémentaires du développement en fractions continuées d'un réel irrationnel de l'intervalle $[0, 1]$, qui est une généralisation de l'algorithme d'Euclide calculant le pgcd de deux entiers.

L'objectif de la partie **II** est d'établir le théorème ergodique ponctuel de Birkhoff, généralisation de la loi forte des grands nombres qui affirme que si $U : \Omega \to \Omega$ est une transformation préservant la mesure et ergodique d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, alors, pour toute fonction $f : \Omega \to \mathbf{C}$ μ-intégrable, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ U^k(x) \to \int_\Omega f d\mu \text{ quand } n \to +\infty, \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \in \Omega.$$

La preuve ici proposée est celle de F. Riesz (1944), qui repose sur un lemme très élémentaire établi à la question **II.3**, que Riesz lui-même exprime en des termes évocateurs [1] :

> « étant donné n quantités réelles $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et un entier $m < n$, considérons toutes les sommes $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_l$ de valeur positive, formées d'éléments successifs dont le nombre de termes ne dépasse pas l'entier m. Alors les a_k figurant comme premiers termes dans l'une au moins de ces expressions, ont leur somme positive. »

La partie **III** est consacrée à l'étude de la transformation de Gauss

$$T : [0, 1] \to [0, 1],\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \text{ si } x \in]0, 1] \\ 0 \text{ si } x = 0, \end{cases}$$

1. Voir F. Riesz, *Sur la théorie ergodique*, Comment. Math. Helv. (1944-45), 221-239.

qui préserve la mesure $d\mu = \dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{dx}{1+x}$ (partie **III.1**) et est ergodique (partie **III.2**).

Dans la dernière partie, on applique le théorème ergodique au système dynamique de la partie **III**, ce qui fournit deux résultats spectaculaires :

- le théorème de Khintchine (1935), qui affirme que les moyennes géométriques des *quotients partiels* du développement en fractions continuées convergent vers une constante absolue et explicite, pour presque tout irrationnel x de $[0,1]$ (question **IV.2**) ;
- le théorème de Lévy (1936), selon lequel pour presque tout irrationnel x de $[0,1]$, on a
$$\left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| = e^{-Cn(1+o(1))} \text{ quand } n \to +\infty,$$
avec $C = \frac{\pi^2}{6\ln 2}$, les fractions $\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ étant les *réduites* du développement en fractions continuées de x (question **IV.3**).

Remarques générales

De façon générale, le jury a été très défavorablement impressionné par le grand nombre des copies très mal présentées, voire pratiquement illisibles. Celles-ci ont évidemment été fortement pénalisées, et le jury attire l'attention des candidats à venir, futurs professeurs ou enseignants en exercice, sur la nécessité impérieuse de produire des textes où arguments, disjonctions de cas et résultats soient très clairement mis en évidence.

Une qualité essentielle pour réussir une telle épreuve est *l'efficacité* : c'est l'art d'aller à l'essentiel et de faire ressortir l'argument crucial, tout en donnant suffisamment de détails pour emporter l'adhésion du correcteur. Il y a là un équilibre subtil, que l'on ne peut trouver que grâce à un entraînement régulier. Le fait d'avoir suivi une préparation est à cet égard une chance inestimable. Trop de candidats perdent un temps précieux, et engrangent peu de points, dans des rédactions délayées et sans ligne directrice.

La rédaction des récurrences a été particulièrement maltraitée par de nombreux candidats. Le jury rappelle donc solennellement :

- que le prédicat $\mathcal{P}(n)$ que l'on souhaite établir pour tout entier n doit être explicité au début du raisonnement, l'énoncé $\mathcal{P}(n)$ ne commençant *évidemment pas* par « $\forall n \in \mathbf{N}$ » ;
- que la récurrence doit être correctement initialisée ; lorsque la récurrence est double, il faut l'initialiser sur deux rangs (cf. la question **I.4**) ;
- qu'il faut ensuite montrer qu'en supposant $\mathcal{P}(n)$ vraie pour *un* (et non : pour *tout* !) entier n supérieur ou égal au rang d'initialisation, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

En ce qui concerne l'intégration, on est en droit d'attendre des candidats, au niveau de l'agrégation, une connaissance précise des propriétés les plus usuelles de l'intégrale de Lebesgue, et une bonne compréhension du caractère central de la *positivité* dans cette théorie, qui intervenait dans plusieurs questions : **I.7.** (permutation d'une intégrale et d'une somme infinie), questions **I.9.** et **I.10.** (où la seule positivité de l'intégrande suffisait à justifier l'existence de l'intégrale) ou encore **III.1.3.** (ou intervenait la définition d'une fonction μ-intégrable : $\int_\Omega |f| d\mu < +\infty$). Beaucoup de candidats nous ont semblé ne pas avoir les idées parfaitement claires sur ce sujet.

Enfin, plusieurs questions, notamment les questions **7.** et **8.** de la partie **I**, significativement valorisées par le barème, permettaient d'évaluer la solidité des connaissances des candidats sur le programme de première et deuxième année de licence. Chaque candidat devrait sentir qu'il est *attendu* sur ce type de questions. Or, le jury a regretté que nombre d'entre eux ne leur consacrent pas suffisamment de soin, et que des théorèmes fondamentaux (intégration terme à terme, convergence des séries de Fourier) soient trop souvent énoncés avec une grande imprécision, voire ignorés.

Commentaires détaillés

Partie I

1. Cette première question n'a pas posé de difficulté. Le jury s'est toutefois ému de voir certains candidats tenter d'établir l'égalité pour $x = 0$.

2. Cette question consistait essentiellement à itérer la question **1.**, ce qui revenait à établir que l'ensemble Ω' des irrationnels de l'intervalle $[0, 1]$ est stable par la transformation T. L'unicité de la suite $(a_n(x))_{n\geqslant 1}$ a été très rarement correctement établie par les candidats. En réalité, il fallait montrer l'existence d'une unique suite $(a_n(x))_{n\geqslant 1}$ d'entiers $\geqslant 1$ vérifiant

$$x = \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n(x) + T^n(x)}}}} \quad \text{pour tout } n \geqslant 1,$$

cette suite vérifiant *de plus*

$$a_j(x) = \left\lfloor \frac{1}{T^{j-1}(x)} \right\rfloor \text{ pour } j \geqslant 1.$$

3. Si la première identité a été correctement établie par la majorité des candidats, il n'en a pas été de même de la seconde. Il suffisait pourtant d'appliquer à la première la propriété « de morphisme » rappelée dans le préambule de l'énoncé :

$$\text{si } f(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(t) \text{ et } g(t) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}(t),$$

alors

$$(f \circ g)(t) = M(t), \text{ où } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}(t).$$

4. L'utilisation du déterminant permet d'obtenir immédiatement la première identité, ce que la grande majorité des candidats a bien vu. La minoration de $q_n(x)$ par $2^{\frac{n-1}{2}}$ se montre quant à elle par une récurrence qui a été rédigée avec une grande désinvolture par une écrasante majorité de candidats, ce que les correcteurs ont sévèrement sanctionné. Notamment, il convenait de raisonner par récurrence double donc, en ce qui concerne l'initialisation, de vérifier que $\mathcal{P}(1)$ *et* $\mathcal{P}(2)$ (ou même : $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$!) étaient vraies.

5. Si l'inégalité $\frac{p_{2n}(x)}{q_{2n}(x)} < \frac{p_{2n+1}(x)}{q_{2n+1}(x)}$ est souvent établie, il n'en va pas de même de l'encadrement de x entre $\frac{p_{2n}(x)}{q_{2n}(x)}$ et $\frac{p_{2n+1}(x)}{q_{2n+1}(x)}$. Ce dernier s'obtenait très simplement en observant la monotonie de l'homographie $\psi_{a_1(x),\ldots,a_n(x)}$, qui dépend de la parité de n. Parmi les candidats ayant vu cet argument, peu le rédigent de façon efficace.

6. La majoration est souvent établie dans le cas où n est pair, mais beaucoup de candidats ne voient pas comment l'obtenir lorsque n est impair. Il suffisait pourtant d'observer qu'on a alors $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < x < \frac{p_n}{q_n}$.

7. Les candidats ont en général repéré l'intérêt de développer $\frac{1}{1+x}$ en série entière. Encore fallait-il donner le bon développement, ainsi que sa validité (c'est ainsi qu'on a observé avec effarement des développements de $\ln x$ au voisinage de 0). Beaucoup de candidats intègrent ensuite ce développement terme à terme sans même se préoccuper de le justifier. D'autres affirment que la série $\sum(-1)^n x^n \ln x$ converge uniformément sur $[0,1]$ (ce qui est vrai, mais demande une justification), voire normalement (ce qui est faux). Le plus simple était probablement de remarquer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \left|(-1)^{n-1} x^{n-1} \ln x\right| dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 x^{n-1} \ln x \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

ce qui permettait d'appliquer un théorème usuel de Lebesgue.

8. Un peu de flou a régné sur la normalisation des coefficients de Fourier :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \text{ ou } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt\,?$$

Peu importe, bien entendu, à condition que la forme de la série de Fourier soit cohérente avec le choix fait ! On déplore ici de nombreuses erreurs de calcul dans les intégrations par parties. Quant à la convergence *vers* f de la série de Fourier de f, elle est rarement bien justifiée (rappelons que la continuité est insuffisante).

Partie II

1. Cette question est très simple si on ne s'embarque pas dans une disjonction d'un nombre incalculable de cas. Par ailleurs, le cas $j = n - 1$ était à examiner à part.

2. Il suffisait de distinguer les cas $v_j = 0$ et $v_j > 0$ pour conclure très simplement.

3. Cette question, où il suffisait de sommer l'inégalité établie à la question précédente, n'a pas posé de difficulté.

4. Dans cette question, il fallait clairement indiquer à quelle suite réelle on appliquait le lemme de Riesz, et ensuite vérifier que cette application était légitime.

5. Beaucoup de candidats ont eu l'idée de « télescoper » les $f_{j+1} - f_j$, mais l'indicatrice $\mathbf{1}_{\{v_j^n > 0\}}$ disparaît le plus souvent mystérieusement au cours des majorations ! En réalité, pour majorer $(f_{j+1} - f_j)\mathbf{1}_{\{v_j^n > 0\}}$ par $f_{j+1} - f_j$, ce qui rendait possible le télescopage, il fallait invoquer la *positivité* de $f_{j+1} - f_j$, qui découle de celle de f.

6. Cette question, qui consistait essentiellement en une réindexation, a été le plus souvent bien traitée.

7. Cette question était délicate. Elle contenait trois ingrédients :
- l'intégration de l'inégalité obtenue à la question précédente, et l'exploitation de l'invariance de μ par U ;
- un passage à la limite quand $n \to +\infty$ utilisant le théorème de convergence dominée ;
- l'utilisation du théorème de Cesàro pour conclure.

Elle a été très rarement abordée de façon concluante.

Les questions **8.** à **10.** nécessitaient une aisance minimale dans le maniement des limites inférieure et supérieure. Un nombre non négligeable de candidats ne fait pas de différence entre $\sup_{n\geqslant 0} f_n$ et $\limsup_{n\to+\infty} f_n$.

10.(c) Cette question consistait en un passage à la limite quand $N \to +\infty$, rarement correctement justifié.

Partie III.1

1. Presque tous les candidats ont vérifié que $\mu(\Omega) = 1$, mais peu ont pensé à justifier (succinctement) que μ était une mesure. Parmi ces derniers, un grand nombre a seulement montré que μ était *finiment* additive.

2. Cette question n'a pas posé de difficulté.

3. Cette question a été souvent rédigée de manière très imprécise. Il fallait absolument écrire des inégalités du type

$$\frac{1}{2\ln 2}\int_\Omega |f|d\lambda \leqslant \int_\Omega |f|d\mu \leqslant \frac{1}{\ln 2}\int_\Omega |f|d\lambda,$$

les valeurs absolues (à l'intérieur de l'intégrale !) étant évidemment essentielles.

4. Beaucoup de candidats n'ont montré qu'une inclusion (même s'ils ont écrit des équivalences !).

5. La première partie de la question consistait en un calcul de somme de série télescopique qui a rencontré un succès mitigé. Peu de candidats ont réussi à passer sans sortir de la légalité de $\mu\left(T^{-1}(]\alpha,\beta])\right) = \mu\left(]\alpha,\beta]\right)$ à $\mu\left(T^{-1}(]\alpha,\beta[)\right) = \mu\left(]\alpha,\beta[\right)$. On pouvait noter que $T^{-1}(\{\beta\})$ est dénombrable et μ ne charge pas les points, ou invoquer un argument de limite croissante.

6. Il s'agissait d'une question de cours, malheureusement traitée par très peu de candidats. Il suffisait de considérer les composantes connexes de l'ouvert.

7. Cette question, conséquence directe de la précédente, a souvent été bien traitée.

Les questions **8.** à **10.** n'ont pas posé de difficultés aux candidats qui les ont abordées.

La suite du sujet n'a été abordée significativement que par un nombre restreint de candidats. On renvoie au corrigé pour les détails.

3.2 Corrigé de l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

Avertissement. Ce qui suit ne constitue en rien un modèle de corrigé mais fournit simplement des éléments de correction. En particulier, nous ne donnons pas tous les détails qui seraient attendus le jour de l'épreuve.

I. Résultats préliminaires

1. C'est la définition de T.

2. Comme $T(x) \in \Omega'$, on peut lui appliquer le résultat de la question précédente, ce qui donne

$$x = \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_1(T(x)) + T^2(x)}} = \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + T^2(x)}}$$

avec $a_2(x) = a_1(T(x))$. En itérant, on obtient

$$x = \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n(x) + T^n(x)}}}}$$

avec $a_j(x) = a_1(T^{j-1}(x))$. La suite $(a_n(x))_{n \geqslant 1}$ est unique, car on peut la récupérer à partir de x par les formules

$$a_1(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor,\ a_2(x) = \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor, \text{ et plus généralement } a_n(x) = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor \text{ pour } n \geqslant 1.$$

3. La première identité est vraie pour $n = 1$, et héréditaire grâce à la formule de récurrence

$$\begin{pmatrix} p_n(x) & p_{n+1}(x) \\ q_n(x) & q_{n+1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1}(x) & p_n(x) \\ q_{n-1}(x) & q_n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{n+1}(x) \end{pmatrix}.$$

En prenant les fonctions homographiques associées dans cette première identité, et en utilisant la propriété de morphisme rappelée dans le préambule, on en déduit que

$$\cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n(x) + t}}}} = \frac{p_{n-1}(x)t + p_n(x)}{q_{n-1}(x)t + q_n(x)},$$

et on obtient la seconde identité en faisant $t = 0$.

4. L'identité est immédiate en prenant le déterminant dans la première identité de la question **I.3.**. Quant à la minoration, elle est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ et héréditaire puisque, si elle est vraie aux rangs $n-2$ et $n-1$, alors

$$q_n(x) \geqslant q_{n-1}(x) + q_{n-2}(x) \geqslant 2^{\frac{n-2}{2}} + 2^{\frac{n-3}{2}} = 2^{\frac{n-3}{2}} \left(\sqrt{2} + 1\right) \geqslant 2^{\frac{n-3}{2}} \cdot 2 = 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

5. D'après la question **I.2.**, on a

$$x = \psi_{a_1(x),\ldots,a_{2n}(x)}(T^{2n}(x)), \text{ avec } T^{2n}(x) > 0.$$

Or, par sa définition-même, l'homographie $\psi_{a_1(x),\ldots,a_{2n}(x)}$ est le produit de $2n$ homographies de la forme $t \mapsto \frac{1}{a_k(x)+t}$, qui sont toutes strictement décroissantes sur $\mathbf{R}_+$. Par conséquent, $\psi_{a_1(x),\ldots,a_{2n}(x)}$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, d'où

$$x > \psi_{a_1(x),\ldots,a_{2n}(x)}(0) = \frac{p_{2n}(x)}{q_{2n}(x)}.$$

On obtient de même la majoration en partant cette fois de $x = \psi_{a_1(x),\ldots,a_{2n+1}(x)}(T^{2n+1}(x))$.

6. On déduit de la question précédente et de la question **I.4.** que

$$\begin{aligned}\left|x-\frac{p_{2n}(x)}{q_{2n}(x)}\right| &< \frac{p_{2n+1}(x)}{q_{2n+1}(x)}-\frac{p_{2n}(x)}{q_{2n}(x)}\\ &< \frac{p_{2n+1}(x)q_{2n}(x)-p_{2n}(x)q_{2n+1}(x)}{q_{2n}(x)q_{2n+1}(x)}\\ &< \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n}(x)q_{2n+1}(x)}\\ &< \frac{1}{q_{2n}(x)q_{2n+1}(x)}\,.\end{aligned}$$

On obtient de même

$$\left|x-\frac{p_{2n+1}(x)}{q_{2n+1}(x)}\right| < \frac{1}{q_{2n+1}(x)q_{2n+2}(x)}$$

en partant de l'encadrement

$$\frac{p_{2n+2}(x)}{q_{2n+2}(x)} < x < \frac{p_{2n+1}(x)}{q_{2n+1}(x)}\,.$$

Par ailleurs, d'après la question **I.4.**, $q_n(x) \to +\infty$, d'où $\frac{p_n(x)}{q_n(x)} \to x$ (à la vitesse 2^{-n} au moins.).

7. On a

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}\ln x.$$

Comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \left|(-1)^{n-1}x^{n-1}\ln x\right| dx = -\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 x^{n-1}\ln x\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$$

on peut intégrer terme à terme, ce qui donne

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\,.$$

8.(a) La fonction f est paire. Pour $n \geqslant 0$, on obtient par une double intégration par parties

$$a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \begin{cases} 0 \text{ si } n=0 \\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2} \text{ si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Comme f est continue et C^1 par morceaux, elle est somme de sa série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos(nt) \text{ pour } t \in \mathbf{R}.$$

8.(b) En faisant $t=0$, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,,$$

d'où, par la question **I.7.** :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}dx = -\frac{\pi^2}{12}\,.$$

9. Il s'agit de calculer l'intégrale d'une fonction mesurable positive, ce qui suffit à assurer son existence dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On a par ailleurs

$$\int_0^1 \frac{\ln\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor}{1+x}dx = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{\ln\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor}{1+x}dx = \sum_{k=1}^{+\infty}\ln(k)\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}\frac{dx}{1+x} = \sum_{k=1}^{+\infty}\ln(k)\ln\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right).$$

10. On peut donner plusieurs arguments pour justifier la mesurabilité de la fonction T :
— elle est limite simple d'une suite de fonctions continues par morceaux,
— elle est différence de deux fonctions décroissantes,
— pour tout réel α, l'ensemble $T^{-1}(]-\infty,\alpha[)$ est une union au plus dénombrable d'intervalles.
Cette fonction est également positive, et

$$\int_0^1 T(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} T(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{x}-k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\ln\frac{k+1}{k}-\frac{1}{k+1}\right).$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k+1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \ln(n+1)-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = 1-\gamma+o(1),$$

d'où

$$\int_0^1 T(x)dx = 1-\gamma.$$

II. Théorème de Birkhoff

1. Pour $0 \leqslant j < n-1$, on a

$$v_j = \max\left(0, u_{j+1}+\max\left(0,u_{j+2},\cdots,u_{j+2}+\cdots+u_n\right)\right) = \max\left(0,u_{j+1}+v_{j+1}\right) = \left(u_{j+1}+v_{j+1}\right)^+$$

et cette égalité est vraie aussi si $j=n-1$ car

$$v_{n-1} = \max(0,u_n) = u_n^+ = (u_n+v_n)^+.$$

2. Notons que les v_j sont positifs.
- Si $v_j = 0$, alors $v_j = 0 \leqslant v_{j+1} = v_{j+1}+u_{j+1}\mathbf{1}_{\{v_j>0\}}$.
- Si $v_j > 0$, alors $v_j = (u_{j+1}+v_{j+1})^+ = u_{j+1}+v_{j+1} = v_{j+1}+u_{j+1}\mathbf{1}_{\{v_j>0\}}$.

3. En sommant l'inégalité de la question précédente, on obtient

$$\sum_{j=0}^{n-1} u_{j+1}\mathbf{1}_{\{v_j>0\}} \geqslant \sum_{j=0}^{n-1}(v_j-v_{j+1}) = v_0-v_n = v_0 \geqslant 0.$$

4. Fixons $\omega\in\Omega$. En posant

$$u_k = f_k(\omega)-f_{k-1}(\omega)-g\circ U^{k-1}(\omega) \text{ pour } 1\leqslant k\leqslant n,$$

on a

$$v_j^n(\omega) = \max\left(0,u_{j+1},u_{j+1}+u_{j+2},\cdots,u_{j+1}+\cdots+u_n\right).$$

Le lemme de Riesz donne

$$\sum_{j=0}^{n-1} \big(f_{j+1}(\omega) - f_j(\omega) - g \circ U^j(\omega)\big)\, \mathbf{1}_{\{v_j^n(\omega)>0\}} \geqslant 0.$$

5. Comme $f_0 = 0$, on a

$$\begin{aligned} f_n &= \sum_{j=0}^{n-1} (f_{j+1} - f_j) \\ &\geqslant \sum_{j=0}^{n-1} (f_{j+1} - f_j)\mathbf{1}_{\{v_j^n>0\}} \text{ puisque } f_{j+1} - f_j \geqslant 0 \ (f \text{ est positive}) \\ &\geqslant \sum_{j=0}^{n-1} g \circ U^j\, \mathbf{1}_{\{v_j^n>0\}}. \end{aligned}$$

6. On a

$$\begin{aligned} v_0^{n-j} \circ U^j &= \max_{0\leqslant \ell\leqslant n-j} \left(f_\ell \circ U^j - \underbrace{f_0 \circ U^j}_{=0} - \sum_{i=0}^{\ell-1} g \circ U^{i+j} \right) \\ &= \max_{0\leqslant \ell\leqslant n-j} \left(\sum_{i=0}^{\ell-1} f \circ U^{i+j} - \sum_{i=0}^{\ell-1} g \circ U^{i+j} \right) = \max_{0\leqslant \ell\leqslant n-j} \left(\sum_{i=j}^{j+\ell-1} f \circ U^{i} - \sum_{i=j}^{j+\ell-1} g \circ U^{i} \right) \\ &= \max_{0\leqslant \ell\leqslant n-j} \left(f_{j+\ell} - f_j - \sum_{i=j}^{j+\ell-1} g \circ U^{i} \right) = \max_{j\leqslant \ell'\leqslant n} \left(f_{\ell'} - f_j - \sum_{i=j}^{\ell'-1} g \circ U^{i} \right) = v_j^n. \end{aligned}$$

De là, d'après la question précédente :

$$f_n \geqslant \sum_{j=0}^{n-1} \left(g\mathbf{1}_{\{v_0^{n-j}>0\}} \right) \circ U^j.$$

7. Les fonctions $g\mathbf{1}_{\{v_0^{n-j}>0\}}$ sont intégrables, car g l'est, donc aussi les fonctions $\left(g\mathbf{1}_{\{v_0^{n-j}>0\}} \right) \circ U^j$ d'après l'hypothèse invariance faite sur μ. On peut donc intégrer l'inégalité de la question précédente, ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_\Omega f_n d\mu &\geqslant \sum_{j=0}^{n-1} \int_\Omega \left(g\mathbf{1}_{\{v_0^{n-j}>0\}} \right) \circ U^j d\mu \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_\Omega g\mathbf{1}_{\{v_0^{n-j}>0\}} d\mu \text{ puisque } \mu \text{ est } U\text{-invariante.} \end{aligned}$$

Par ailleurs, toujours par U-invariance de μ :

$$\int_\Omega f_n d\mu = \sum_{j=0}^{n-1} \int_\Omega f \circ U^j d\mu = \sum_{j=0}^{n-1} \int_\Omega f d\mu = n \int_\Omega f d\mu.$$

On a donc

$$\int_\Omega f d\mu \geqslant \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_\Omega g\mathbf{1}_{\{v_0^{n-j}>0\}} d\mu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega g\mathbf{1}_{\{v_0^{j}>0\}} d\mu.$$

On va maintenant faire tendre n vers $+\infty$. Tout d'abord, lorsque $j \to +\infty$, $\mathbf{1}_{\{v_0^j>0\}}$ tend simplement vers $\mathbf{1}_{\{v>0\}}$, donc par convergence dominée :

$$\int_\Omega g\mathbf{1}_{\{v_0^j>0\}} d\mu \to \int_\Omega g\mathbf{1}_{v>0} d\mu = \int_{\{v>0\}} g\, d\mu.$$

De là, par Cesàro :

$$\int_\Omega f d\mu \geqslant \int_{\{v>0\}} g\, d\mu.$$

8. La fonction f^* est bien définie, mais à valeurs dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Pour y remédier, posons $g^* = \arctan f^*$. On a

$$f^* \circ U = \limsup \frac{1}{n} f_n \circ U = \limsup \frac{1}{n}(f_{n+1} - f) = f^*.$$

Par conséquent, $g^* \circ U = g^*$, donc g^* est égale presque partout à une constante élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Finalement, f^* est égale presque partout à une constante élément de $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

9. On a donc $\limsup \frac{1}{n} f_n > g$ presque partout. A fortiori, $\sup_{n\geqslant 0}\left(\frac{f_n}{n} - g\right) > 0$ presque partout, d'où

$$v := \sup_{n\geqslant 0}(f_n - ng) = \sup_{n\geqslant 0}\left(f_n - \sum_{j=0}^{n-1} g \circ U^j\right) > 0 \text{ p.p.}$$

(rappelons que g est une constante). D'après l'inégalité maximale,

$$+\infty > \int_\Omega f d\mu \geqslant \int_{\{v>0\}} g\, d\mu = \int_\Omega g\, d\mu = g.$$

L'arbitraire sur g donne alors $f^* < +\infty$ p.p., et plus précisément

$$f^* \leqslant \int_\Omega f d\mu \text{ p.p.} \tag{3.1}$$

10.(a) Pour $\omega \in \Omega$, on a

$$\overline{f}_N(\omega) = \begin{cases} f(\omega) \text{ si } f(\omega) \leqslant N \\ N \text{ si } f(\omega) > N. \end{cases}$$

On a donc (et c'est le fait essentiel) : $\overline{f}_N \leqslant f$. De là,

$$\liminf \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \overline{f}_N \circ U^j \leqslant \liminf \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f \circ U^j.$$

Or, le membre de gauche est égal à

$$\liminf \left(N - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(N-f)^+ \circ U^j\right) = N - \limsup \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(N-f)^+ \circ U^j.$$

On a donc bien

$$\liminf \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f \circ U^j \geqslant N - \limsup \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(N-f)^+ \circ U^j.$$

10.(b) D'après la question **II.9.**, appliquée à $(N-f)^+$ au lieu de f, on a

$$\limsup \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(N-f)^+\circ U^j \leqslant \int_\Omega (N-f)^+ d\mu \text{ p.p.}$$

D'après la question précédente, on a donc

$$\liminf \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\circ U^j \geqslant N - \int_\Omega (N-f)^+ d\mu = \int_\Omega (N-(N-f)^+)d\mu = \int_\Omega \overline{f}_N d\mu \text{ p.p.}$$

10.(c) En réalité, $\overline{f}_N = \inf(f,N)$ *croît* vers f quand $N \to +\infty$. Par Beppo Levi, en faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité de la question précédente, on obtient

$$\liminf \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\circ U^j \geqslant \int_\Omega f d\mu \text{ p.p.} \tag{3.2}$$

Comme l'union de deux ensembles de mesure nulle est de mesure nulle, on peut mettre bout-à-bout deux inégalités vraies chacune p.p., et (3.1) et (3.2) donnent

$$\int_\Omega f d\mu \leqslant \liminf \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\circ U^j \leqslant \limsup \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\circ U^j \leqslant \int_\Omega f d\mu \text{ p.p.}$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\circ U^j = \int_\Omega f d\mu \text{ p.p.}$$

11. Le théorème a été démontré dans le cas où f est positive et intégrable. Or, toute fonction intégrable peut s'écrire comme la différence de deux fonctions positives et intégrables, d'où le résultat par linéarité.

III. Propriétés de l'opérateur T

III.1 Invariance de la mesure μ par T

1. Il est standard que μ est une mesure à densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\Omega, \mathcal{B})$. De plus,

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 1.$$

2. Immédiat en encadrant $\dfrac{1}{1+x}$ entre $\dfrac{1}{2}$ et 1.

3. On a

$$\frac{1}{2\ln 2}\int_\Omega |f| d\lambda \leqslant \int_\Omega |f| d\mu \leqslant \frac{1}{\ln 2}\int_\Omega |f| d\lambda,$$

donc

$$\int_\Omega |f| d\lambda < +\infty \Leftrightarrow \int_\Omega |f| d\mu < +\infty.$$

4. Soit $x \in]0,1]$. On a

$$\begin{aligned} x \in T^{-1}([0,\alpha]) &\Leftrightarrow T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \in [0,\alpha] \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x} = k + \theta,\ k \in \mathbf{N}^*,\ \theta \in [0,\alpha] \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \geqslant 1} \left[\frac{1}{k+\alpha}, \frac{1}{k} \right]. \end{aligned}$$

5. On a donc, sachant que $\mu(\{0\}) = 0$:

$$\begin{aligned} \mu\left(T^{-1}([0,\alpha])\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu\left(\left[\frac{1}{k+\alpha}, \frac{1}{k}\right]\right) = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{k+\alpha}}^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{1+x} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{+\infty} \ln \frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k+\alpha}} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k+1}{k+1+\alpha}\right) - \ln\left(\frac{k}{k+\alpha}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} \left(\ln\left(\frac{k+1}{k+1+\alpha}\right) - \ln\left(\frac{k}{k+\alpha}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \lim_{N \to +\infty} \left(\ln\left(\frac{N+1}{N+1+\alpha}\right) - \ln\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left(-\ln \frac{1}{1+\alpha} \right) = \frac{1}{\ln 2} \ln(1+\alpha) = \mu\left([0,\alpha]\right). \end{aligned}$$

Comme $]\alpha,\beta] = [0,\beta] \backslash [0,\alpha]$, on en déduit que

$$\mu\left(T^{-1}(]\alpha,\beta])\right) = \mu\left(]\alpha,\beta]\right).$$

puis, par limite croissante, que

$$\mu\left(T^{-1}(]\alpha,\beta[)\right) = \mu\left(]\alpha,\beta[\right).$$

6. Soit U un ouvert de Ω. Les composantes connexes de U sont des intervalles de $\mathbf{R}$, et des ouverts de Ω puisque Ω est localement connexe. Enfin, comme chaque composante contient au moins un rationnel, les composantes sont en nombre au plus dénombrable.

7. Pour tout intervalle I ouvert dans Ω, on a $\mu(T^{-1}(I)) = \mu(I)$ d'après la question **III.1.5.** (le cas où I contient 0 ou 1 s'en déduisant puisque $\mu(T^{-1}(\{0\})) = \mu(T^{-1}(\{1\})) = 0$). En sommant sur les composantes connexes, on obtient $\mu(T^{-1}(O)) = \mu(O)$ pour tout ouvert de Ω. Et par passage au complémentaire, on obtient la même identité pour les fermés.

8.(a) Soit $\varepsilon > 0$. Par régularité de la mesure de Lebesgue, il existe O un ouvert et F un fermé de Ω vérifiant

$$F \subset A \subset O \text{ et } \lambda(O \backslash F) \leqslant \varepsilon \ln 2.$$

D'après la question **III.1.2.**, on a $\mu(O \backslash F) \leqslant \varepsilon$.

8.(b) On a alors $T^{-1}(F) \subset T^{-1}(A) \subset T^{-1}(O)$, d'où, grâce à la question **III.1.7.** :

$$\mu(F) = \mu\left(T^{-1}(F)\right) \leqslant \mu\left(T^{-1}(A)\right) \leqslant \mu\left(T^{-1}(O)\right) = \mu(O),$$

On a aussi

$$\mu(F) \leqslant \mu(A) \leqslant \mu(O),$$

d'où

$$\left|\mu\left(T^{-1}(A)\right) - \mu(A)\right| \leqslant \mu(O) - \mu(F) = \mu(O\backslash F) \leqslant \varepsilon.$$

En laissant ε tendre vers 0, on obtient $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$.

9. On a

$$\int_\Omega \mathbf{1}_A \circ T\, d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_{T^{-1}(A)} d\mu = \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) = \int_\Omega \mathbf{1}_A d\mu.$$

10. L'égalité

$$\int_\Omega f \circ T\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu$$

est vraie :

- pour f indicatrice d'après la question précédente,
- pour f étagée par linéarité,
- pour f mesurable positive par limite croissante,
- pour f intégrable en écrivant $f = f^+ - f^-$.

III.2 Ergodicité de T

1. Déja vu à la question **I.3.**.

2. Dire que $x \in \Delta(a_1, \ldots, a_n)$, c'est dire que x s'écrit

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + t}}}} = \psi_{a_1,\ldots,a_n}(t), \text{ avec } t \in \Omega'.$$

Ainsi,

$$\Delta(a_1, \ldots, a_n) = \psi_{a_1,\ldots,a_n}(\Omega').$$

Or, on a déjà observé que la fonction $\psi_{a_1,\ldots,a_n}$ est continue et strictement monotone sur $[0,1]$ donc, si $x \in \Delta(a_1, \ldots, a_n)$, $\psi_{a_1,\ldots,a_n}(\Omega)$ est le segment d'extrémités

$$\psi_{a_1,\ldots,a_n}(0) = \psi_{a_1(x),\ldots,a_n(x)}(0) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \text{ et } \psi_{a_1,\ldots,a_n}(1) = \psi_{a_1(x),\ldots,a_n(x)}(1) = \frac{p_{n-1}(x) + p_n(x)}{q_{n-1}(x) + q_n(x)},$$

et $\Delta(a_1, \ldots, a_n)$ est l'intersection de Ω' avec ce segment.

3. Grâce à la question **I.4.**, on a

$$\lambda(\Delta(a_1, \ldots, a_n)) \leqslant \lambda\left(\left[\frac{p_n(x)}{q_n(x)}, \frac{p_{n-1}(x) + p_n(x)}{q_{n-1}(x) + q_n(x)}\right]\right) = \frac{1}{q_n(x)(q_{n-1}(x) + q_n(x))} \leqslant \frac{1}{q_n(x)^2} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. Par régularité de la mesure de Lebesgue, il existe un ouvert O de Ω vérifiant $B \subset O$ et $\lambda(O \backslash B) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
\alpha\lambda(O)\lambda(A) &\leqslant \lambda(h^{-1}(O) \cap A) \\
&= \lambda(h^{-1}(O\backslash B) \cap A) + \lambda(h^{-1}(B) \cap A) \\
&\leqslant \lambda(h^{-1}(O\backslash B)) + \lambda(h^{-1}(B) \cap A) \\
&\leqslant 2\ln 2\, \mu(h^{-1}(O\backslash B)) + \lambda(h^{-1}(B) \cap A) \\
&= 2\ln 2\, \mu(O\backslash B) + \lambda(h^{-1}(B) \cap A) \text{ puisque } \mu \text{ est } h\text{-invariante} \\
&\leqslant 2\lambda(O\backslash B) + \lambda(h^{-1}(B) \cap A) \\
&\leqslant \varepsilon + \lambda(h^{-1}(B) \cap A).
\end{aligned}$$

5. Soit $B \in \mathcal{B}$, et $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente, il existe un ouvert O vérifiant

$$B \subset O \text{ et } \alpha\lambda(O)\lambda(A) \leqslant \varepsilon + \lambda(h^{-1}(B) \cap A).$$

On a alors $\alpha\lambda(B)\lambda(A) \leqslant \varepsilon + \lambda(h^{-1}(B) \cap A)$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$\alpha\lambda(B)\lambda(A) \leqslant \lambda(h^{-1}(B) \cap A).$$

6. Soit $x \in \Omega'$. Dire que $x \in \Delta_n$, c'est dire que x s'écrit

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + t}}}} = \psi_n(t), \text{ avec } t = T^n(x) \in \Omega'.$$

Comme ψ_n est strictement monotone, dire que, de plus, $T^n(x) \in]u, v[$, c'est-à-dire que $x = \psi_n(T^n(x))$ est élément de $]\psi_n(u), \psi_n(v)[$. De là,

$$T^{-n}(]u, v[) \cap \Delta_n =]\psi_n(u), \psi_n(v)[\cap \Omega', \text{ et en particulier } \Delta_n =]\psi_n(0), \psi_n(1)[\cap \Omega'.$$

Comme $\mathbf{Q}$ est de mesure de Lebesgue nulle, on en déduit que

$$\frac{\lambda\left(T^{-n}(]u, v[) \cap \Delta_n\right)}{\lambda(\Delta_n)} = \frac{\psi_n(v) - \psi_n(u)}{\psi_n(1) - \psi_n(0)}.$$

Sachant que

$$\psi_n(t) = \frac{p_{n-1}t + p_n}{q_{n-1}t + q_n},$$

en notant $p_{n-1}, p_n \dots$ la valeur constante de $p_{n-1}(x), p_n(x), \dots$ lorsque x décrit Δ_n, on obtient après simplification et utilisation de la question **I.4.** :

$$\frac{\lambda\left(T^{-n}(]u, v[) \cap \Delta_n\right)}{\lambda(\Delta_n)} = (v - u)\frac{q_n(q_{n-1} + q_n)}{(q_{n-1}u + q_n)(q_{n-1}v + q_n)}.$$

De là,

$$\frac{\lambda\left(T^{-n}(]u, v[) \cap \Delta_n\right)}{\lambda(\Delta_n)} \geqslant (v - u)\frac{q_n(q_{n-1} + q_n)}{(q_{n-1} + q_n)(q_{n-1} + q_n)} = (v - u)\frac{q_n}{q_{n-1} + q_n} \geqslant (v - u)\frac{q_n}{2q_n} = \frac{1}{2}\lambda(]u, v[),$$

la dernière majoration écrite étant due à la croissance de la suite $(q_n)_{n\geqslant 0}$.

7. En procédant comme à la question **III.1.7.**, on obtient

$$\frac{1}{2}\lambda(O)\lambda(\Delta_n) \leqslant \lambda\left(T^{-n}(O)\cap\Delta_n\right)$$

pour tout ouvert O de Ω.

8. On peut appliquer l'inégalité de sous-mélange (question **III.2.5.**) à $\alpha = \frac{1}{2}$, $A = \Delta_n$, $B = A$ (sic !) et $h = T^n$. Cela donne

$$\frac{1}{2}\lambda(A)\lambda(\Delta_n) \leqslant \lambda(T^{-n}(A)\cap\Delta_n) = \lambda(A\cap\Delta_n)$$

puisque A est supposé invariant par T.

9. Il suffit de montrer que si O est un ouvert de Ω, alors $O\cap\Omega'$ est une union d'intervalles de type Δ_n. En effet, comme deux intervalles de type Δ_n sont ou bien disjoints, ou bien contenus l'un dans l'autre, on en déduira gratuitement que $O\cap\Omega'$ est union *disjointe*, et dénombrable (car les intervalles fondamentaux sont en nombre dénombrable) d'intervalles de type Δ_n, ce qui donnera le résultat par σ-additivité de λ. Soit donc $x\in O\cap\Omega'$. On peut fixer

- un réel $\delta > 0$ tel que $]x-\delta, x+\delta[\subset O$,
- un entier n tel que $2^{1-n} < \delta$,
- une suite finie $(a_1,\dots,a_n)$ telle que $x\in\Delta_n := \Delta(a_1,\dots,a_n)$.

Dès lors, Δ_n contient x, et sa longueur est au plus égal à $2^{1-n} < \delta$ d'après la question **III.2.3.**, donc

$$\Delta_n \subset]x-\delta, x+\delta[\cap\Omega' \subset O\cap\Omega'.$$

10. On procède par approximation. Soit $\varepsilon > 0$, et O un ouvert de Ω vérifiant

$$B\subset O \text{ et } \lambda(O\backslash B)\leqslant\varepsilon.$$

On a alors

$$\frac{1}{2}\lambda(A)\lambda(B) \leqslant \frac{1}{2}\lambda(A)\lambda(O) \leqslant \lambda(A\cap O) = \lambda(A\cap B) + \lambda(A\cap(O\backslash B)) \leqslant \lambda(A\cap B)+\varepsilon.$$

d'où le résultat en faisant tendre ε vers 0.

11. Choisissons $B = {}^{c}A$ dans l'inégalité de la question précédente. Il vient

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\lambda(A)(1-\lambda(A)) \leqslant \lambda(A\cap {}^{c}A) = 0,$$

d'où $\lambda(A)\in\{0,1\}$. D'après la question **III.1.2.**, on a aussi $\mu(A)\in\{0,1\}$.

12.(a) Comme f est mesurable, $A_t\in\mathcal{B}$. Par ailleurs, on a

$$A_t = f^{-1}\left(]-\infty,t[\right) = (f\circ T)^{-1}\left(]-\infty,t[\right) = T^{-1}\left(f^{-1}\left(]-\infty,t[\right)\right) = T^{-1}(A_t).$$

Le résultat en découle grâce à la question précédente, et l'argument est identique pour B_t.

12.(b) Lorsque l'entier n tend vers $-\infty$, A_n décroît vers $\varnothing$. Par conséquent, $\mu(A_n)\to 0$ quand $n\to-\infty$. D'après la question précédente, il existe donc $t_0\in\mathbf{R}$ tel que $\mu(A_{t_0}) = 0$.

12.(c) De même, pour t assez grand, $\mu(A_t) = 1$, ce qui assure l'existence de s. Soit $(s_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels $< s$ croissant vers s. Alors A_{s_n} croît vers A_s, donc $0 = \mu(A_{s_n}) \to \mu(A_s)$, donc $\mu(A_s) = 0$.

12.(d) Si $\mu\left(\overset{c}{A}_{s+\varepsilon}\right) = 1$, alors $\mu(A_{s+\varepsilon}) = 0$, ce qui contredit la définition de s. Soit $(s_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels $> s$ décroissant vers s. Alors $\overset{c}{A}_{s_n}$ croît vers B_s, et $\mu\left(\overset{c}{A}_{s_n}\right) = 0$, d'où $\mu(B_s) = 0$.

12.(e) On a ainsi $\mu(A_s) = \mu(B_s) = 0$, donc $\mu(f^{-1}(\{s\})) = 1$: f est égale à s presque partout.

IV. Applications du théorème de Birkhoff

1. D'une part, μ est T-invariante (question **III.1.10.**) et T est μ-ergodique (question **III.2.12.**). D'autre part, la fonction identité est μ-intégrable. D'après le théorème ergodique,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i(x) \to \int_0^1 t\, d\mu(t) = \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{t}{1+t}dt = \frac{1}{\ln 2} - 1 \text{ p.p.}$$

2. Pour $x \in \Omega'$, on a (question **I.2.**) :

$$\ln\left(\sqrt[n]{a_1(x)\dots a_n(x)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln a_i(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left\lfloor\frac{1}{T^{i-1}(x)}\right\rfloor \to \int_0^1 \ln\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor d\mu(x) = \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{\ln\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor}{1+x}dx \text{ p.p.}$$

soit, d'après la question **I.9.** :

$$\sqrt[n]{a_1(x)\dots a_n(x)} \to \exp\left(\frac{1}{\ln 2}\sum_{k=1}^{+\infty}\ln(k)\ln\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)\right) = \prod_{k=2}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{\log_2 k} \text{ p.p.}$$

3.(a) Pour $x \in \Omega'$, on a

$$x = \psi_{a_1(x),\dots,a_n(x)}(T^n(x)) = \frac{p_{n-1}(x)T^n(x) + p_n(x)}{q_{n-1}(x)T^n(x) + q_n(x)}$$

d'après les questions **I.2** et **III.2.1.**.

3.(b) On déduit de la question précédente que

$$T^n(x) = -\frac{q_n(x)x - p_n(x)}{q_{n-1}(x)x - p_{n-1}(x)}$$

d'où en télescopant et en tenant compte du fait que $p_0(x) = 0$ et $q_0(x) = 1$:

$$\frac{q_n(x)x - p_n(x)}{x} = (-1)^n\prod_{k=1}^{n}T^k(x).$$

d'où le résultat.

3.(c) On en déduit, grâce à la question **I.8.(b)**, que

$$\frac{1}{n}\ln|q_n(x)x - p_n(x)| = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\ln T^k(x) \to \int_0^1 \ln t\, d\mu(t) = \frac{1}{\ln 2}\int_0^1\frac{\ln t}{1+t}dt = -\frac{\pi^2}{12\ln 2} \text{ p.p.}$$

3.(d) Admettons provisoirement l'inégalité préliminaire. On en déduit que

$$\frac{1}{n}\ln q_n(x) + \frac{1}{n}\ln|q_{n-1}(x)x - p_{n-1}(x)| \to 0,$$

d'où

$$\frac{1}{n}\ln q_n(x) \to \frac{\pi^2}{12\ln 2} \text{ p.p.}$$

Ensuite,

$$\frac{1}{n}\ln\left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| = \frac{1}{n}\ln|q_n(x)x - p_n(x)| - \frac{1}{n}\ln q_n(x) = -\frac{\pi^2}{6\ln 2} \simeq -2,37.$$

L'ordre de grandeur de la question **I.6.** était donc le bon.

En ce qui concerne l'inégalité : d'après la question **I.6.**, on a

$$q_n(x)|q_{n-1}(x)x - p_{n-1}(x)| \leqslant q_n(x)\frac{q_{n-1}(x)}{q_{n-1}(x)q_n(x)} \leqslant 1.$$

Par ailleurs, d'après les questions **IV.3.(a)** et **I.4.**, on a

$$x - \frac{p_{n-1}(x)}{q_{n-1}(x)} = \frac{p_{n-1}(x)T^n(x) + p_n(x)}{q_{n-1}(x)T^n(x) + q_n(x)} - \frac{p_{n-1}(x)}{q_{n-1}(x)} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}(x)(q_{n-1}(x)T^n(x) + q_n(x))}$$

d'où

$$q_n(x)|q_{n-1}(x)x - p_{n-1}(x)| = \frac{q_n(x)}{q_{n-1}(x)T^n(x) + q_n(x)} \geqslant \frac{q_n(x)}{q_{n-1}(x) + q_n(x)} \geqslant \frac{q_n(x)}{2q_n(x)} = \frac{1}{2}$$

la dernière minoration provenant de la croissance de la suite $(q_n(x))_{n\geqslant 0}$.

Chapitre 4

Épreuves orales : Algèbre et Géométrie ; Analyse et Probabilités ; Mathématiques–Option D ; Informatique fondamentale–Option D

4.1 Organisation générale des épreuves

Tous les candidats tirent un couple de sujets. Le candidat est libre de choisir le sujet qui lui plaît. Quelques rares candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon ; les titres des leçons définissent un champ qu'il faut traiter. **Le hors sujet est lourdement sanctionné**.

Les candidats préparent l'interrogation pendant 3 heures, période durant laquelle ils ont accès aux livres de la bibliothèque de l'Agrégation ou à leurs propres ouvrages (avec un numéro ISBN et non annotés [1]). Les ouvrages imprimés par les candidats eux-mêmes ne sont pas autorisés ; les candidats n'ont pas accès à Internet (ni bien sûr à leur téléphone portable ou tout autre objet électronique [2] !). A l'issue de cette phase de préparation, le jury fait procéder à la photocopie des plans de la leçon élaborés par les candidats.

Ces documents sont manuscrits, comportent 3 pages A4 ***au maximum*** et possèdent une marge de 1 cm sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. *Il est conseillé de ne pas utiliser de stylos de couleurs.* Il est aussi recommandé de soigner la présentation du plan écrit, de mettre des titres, d'encadrer les formules, *etc.* pour qu'il soit le plus lisible possible. En particulier il est vain de vouloir écrire petit dans l'espoir de placer plus de contenu ; on perd en clarté et le jury n'est pas disposé à utiliser une loupe. Les plans peuvent être complétés par une quatrième page consacrée aux figures (et exclusivement à celles-ci). Il faut noter clairement sur le plan les développements proposés.

Le candidat *peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve* et pourra utiliser les notes manuscrites produites durant la préparation, pendant la première phase de l'interrogation dite « présentation du plan ». Notons toutefois que le jury peut restreindre cette utilisation durant la période consacrée au développement, si le plan comporte lui-même trop de détails sur les développements proposés !

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale d'un maximum de 50 minutes environ : une présentation du plan de la leçon éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions.

1. Les rapports de jury de l'agrégation externe de mathématiques, complets et reliés sont autorisés. Concernant les ouvrages numériques avec ISBN, seuls les ouvrages disponibles dans le commerce sont autorisés. Tous les ouvrages personnels peuvent être interdits, lors de l'oral, sur simple décision du représentant du directoire présent lors de la préparation.

2. Les calculatrices ne sont pas autorisées, ni les clés USB, etc...

Le candidat doit avoir à l'esprit que le jury ne cherche en rien à le déstabiliser pendant l'épreuve. Lors de l'échange qui suit l'exposé du développement, les premières questions visent très souvent à préciser une notation ou un point du développement, le but étant pour le jury de s'assurer de la compréhension par le candidat des notions qu'il vient d'exposer et non de lui tendre un quelconque piège.

4.1.1 Première partie : présentation de la leçon

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole, **6 minutes maximum**, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de sa leçon.

Il existe maintenant de nombreux plans *tout faits* disponibles dans la littérature, plus ou moins pertinents, de plus ou moins grande valeur. Il est naturel que les candidats s'inspirent de sources de qualité et, d'une certaine manière, le choix de ces sources, la capacité à s'en affranchir ou à pleinement se les approprier, participent au regard que le jury peut porter sur leur maturité scientifique. Cependant, il est bien entendu que l'objectif de cette partie de l'épreuve n'est pas de juger la capacité à simplement recopier un plan, ni à le réciter par cœur d'ailleurs. Il s'agit d'une épreuve *orale* et le document transmis au jury est une base de discussion et un fil conducteur qui servira au jury pour mener la partie consacrée au dialogue et aux questions.

En particulier, chercher à remplir à tout prix les 3 feuilles autorisées, surtout avec des éléments que le candidat ne maîtrise manifestement pas ne constitue en rien une stratégie payante.

Le plan écrit n'est ni une énumération de paragraphes, ni un cours ou un exposé complet avec développement des démonstrations. Il définit toutefois avec suffisamment de précision les notions mathématiques introduites, donne les *énoncés complets des résultats fondamentaux*, notamment sur les hypothèses, cite des exemples et des applications.

La formalisation mathématique et le français doivent être soignés, mais bien évidemment il ne s'agit pas d'un texte destiné à être publié dans une revue internationale.

De manière générale, le jury conseille vivement aux candidats de soigner tant leurs écrits que leur expression orale, car c'est une compétence professionnelle importante du métier d'enseignant.

L'exposé oral qui consiste à relire simplement ce qui est écrit n'a pas beaucoup d'intérêt, le candidat se contente trop souvent d'une présentation linéaire, sans expliquer ou mettre en valeur les articulations du plan, ni faire ressortir les méthodes ou les résultats importants.

En fait, le candidat devrait s'imaginer dans la situation où il doit introduire à un auditoire, pendant 6 minutes, une leçon destinée ensuite à être développée sur plusieurs séances. Quel est l'intérêt du sujet ? Comment se positionne-t-il dans un paysage mathématique plus large ? Comment s'articulent les différentes sections qui composent la leçon ? Comment s'expliquent et se motivent les enchaînements ? C'est l'occasion de s'interroger sur les difficultés didactiques de la leçon, c'est-à-dire dans quel ordre et comment présenter les choses pour que le tout soit cohérent, compréhensible et pédagogiquement efficace. En quoi les exemples sélectionnés s'avèrent-ils pertinents ? Quelles figures illustrent particulièrement les notions en jeu ?

Autrement dit, le jury attend une argumentation synthétique de la construction de la leçon.

Le plan doit être maîtrisé, c'est à dire que les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours. Il est indispensable que le candidat ait une idée assez claire de la difficulté des démonstrations des résultats qu'il évoque dans son plan. Le jury pourra appliquer ces critères pour évaluer la maîtrise du plan.

C'est au candidat de circonscrire son plan, notamment en ce qui concerne les énoncés débordant largement du cadre du programme. Il peut être bon aussi de préciser, lors de la présentation orale, le niveau auquel se place le candidat.

Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples et de mathématique. Le plan écrit ne peut pas être une suite de banalités sur des sujets généraux mais doit aborder suffisamment profondément les mathématiques sous-jacentes à la leçon.

Il s'agit d'une épreuve orale, il est donc inutile de recopier le plan au tableau, dans la mesure où le jury possède une copie du texte. Toutefois l'usage du tableau (blanc ou à craie selon la configuration des salles) comme support pédagogique peut être efficace. Durant cette partie de l'épreuve, le candidat n'hésitera donc pas à exploiter son tableau afin de préciser son propos et de le rendre plus vivant.

La présentation orale, la qualité d'expression, la compréhension synthétique, la plus-value de l'exposé par rapport au plan écrit, la capacité du candidat à intéresser son auditoire sur une leçon donnée, constituent des éléments importants d'évaluation.

Insistons sur le fait que la recopie de plans disponibles sur Internet ou dans des livres spécialisés ne constitue pas un travail suffisant de préparation du concours. Ainsi, au-delà de l'exploitation d'ouvrages de référence, qui n'a rien de condamnable, le jury attend que le candidat fasse preuve d'un investissement personnel sur le sujet.

L'exposé oral ne peut être considéré comme maîtrisé s'il ressemble à une récitation. Bien entendu, ceci ne s'improvise pas et le discours doit avoir été réfléchi durant la préparation de l'épreuve.

À la fin de cette présentation de la leçon, le jury peut éventuellement questionner très brièvement le candidat et aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

4.1.2 Deuxième partie : le développement

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre le niveau auquel il souhaite se placer et les développements proposés. Un candidat ne sera pas avantagé s'il présente un développement non maîtrisé, mal compris ou exposé trop rapidement. Il faut toutefois veiller à rester au niveau de l'Agrégation ; les développements de niveau d'une classe de Terminale ou d'une première année post-bac seront évalués négativement.

Le jury demande au candidat de présenter *deux développements au moins*. Ceux-ci doivent être clairement mentionnés sur le plan écrit et non pas vaguement évoqués à l'oral. Dans cet esprit, le candidat motivera soigneusement le choix des développements qu'il propose, expliquant en quoi il estime que ces résultats ou énoncés sont centraux ou jouent à ses yeux un rôle particulier sur le sujet.

Le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre pour mener à bien son développement.

Le candidat dispose de 15mn (maximum) pour le mener à bien. Le jury demande au candidat de bien gérer son tableau, en particulier le candidat doit demander aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Le jury souhaite, dans la mesure du possible, que le candidat efface le moins possible le tableau pendant cette période.

Lors du développement, le jury attend du candidat des explications sur la preuve et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté.

Trop peu de candidats commencent leur développement par une rapide exposition des grandes idées ou des étapes qui le composent. Le jury aimerait avoir une petite explication de la démarche au début du développement. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury.

Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. La récitation mécanique d'un développement est lourdement sanctionnée ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'un futur agrégé.

On ne saurait trop conseiller aux candidats d'illustrer leur développement (et éventuellement leur plan) par un ou plusieurs dessins : l'exposé y gagnerait en clarté pour le jury, le candidat pourrait ainsi montrer un souci louable de pédagogie.

Rappelons que le développement doit être en rapport avec le sujet traité, la leçon présentée et le plan écrit. Nous insistons sur le fait que tout hors-sujet est sévèrement sanctionné. L'utilisation d'un résultat non présent dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explication convaincante. Dans le cas d'un développement difficile, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury.

Comme mentionné précédemment, le candidat *peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve* et ses notes manuscrites produites durant la préparation, uniquement durant la première phase de l'interrogation dite « présentation de la leçon », mais il ne pourra les utiliser pendant le développement.

Enfin, même si le jury laisse évoluer le candidat durant son développement, en intervenant le moins possible, il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, interrompre le candidat pour demander des explications. Cette intervention ne donne pas droit à une extension du temps consacré au développement.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'il vient d'exposer.

4.1.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury vérifie systématiquement la maîtrise approfondie du plan présenté. C'est-à-dire qu'une part importante de la discussion portera sur le plan, ou trouvera sa source dans le plan présenté par le candidat. De manière générale, il faut éviter de dépasser largement le niveau qu'on maîtrise. Pour assimiler les notions il faut, durant l'année de préparation, se demander si on est capable de les mettre en œuvre sur des exemples simples et, pour certains théorèmes, si on a réfléchi à des exemples ou des contre-exemples. Le candidat doit être conscient que, s'il met un énoncé dans son plan, il doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme évidentes auxquelles il doit répondre avec précision, et à des calculs éventuels sur ce point. Une fois de plus, insistons sur le fait qu'il est essentiel de bien maîtriser ce que l'on propose.

Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon, mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiatement. Le but est plutôt de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être compris comme un échec et le candidat ne doit pas se décourager. *Il doit au contraire rester attentif aux suggestions du jury* ; la qualité du dialogue, les réponses aux questions, l'utilisation du plan écrit et l'écoute dont le candidat fait preuve sont des éléments importants de notation.

Pendant cette discussion le jury veille à laisser un temps raisonnable au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Rappelons que l'objet du concours est de recruter de futurs enseignants, le jury peut donc aussi comme l'indique l'article 8 de l'arrêté du 25 juillet 2014, poser toutes questions utiles pour juger de la capacité des candidats à occuper de tels postes.

4.2 L'épreuve orale d'algèbre et géométrie

En règle générale, le jury apprécie que les candidats soient capables d'appliquer les résultats fondamentaux de leur leçon à des cas simples. Par exemple il est indispensable de savoir

- justifier qu'une matrice est diagonalisable ou en déterminer un polynôme annulateur ;
- effectuer des manipulations élémentaires sur les éléments appartenant à diverses structures algébriques standards ($\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\mathfrak{S}_n$, $\mathbf{F}_q$, etc.) ;
- mettre en œuvre des algorithmes exposés dans le plan (opérations élémentaires sur des systèmes ou des déterminants, réduction de Gauss d'une forme quadratique, etc.).

Dans les leçons, les illustrations des notions algébriques par des exemples et des applications issus de la géométrie sont les bienvenus, ceci tout particulièrement en théorie des groupes.

Les notions de quotients sont importantes, il est important à ce stade de dominer la projection canonique et surtout, les subtilités du passage au quotient dans le cadre d'un morphisme.

La théorie des représentations, introduite récemment dans le programme du concours, est naturellement reliée à bon nombre de leçons. En effet, en dehors des leçons directement concernées, les représentations peuvent figurer naturellement dans les leçons 101, 102, 103, 104, 105, 106 et 150.

Les remarques qui suivent sont spécifiques à chaque leçon et permettent aux candidats de mieux saisir les attentes du jury sur chacun de ces sujets. On y distingue clairement ce qui constitue le cœur du sujet d'éléments plus sophistiqués et ambitieux, qui dépassent cette base.

Leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il faut bien dominer les deux approches de l'action de groupe : l'approche naturelle et l'approche via le morphisme du groupe agissant vers le groupe des permutations de l'ensemble sur lequel il agit. La formule des classes et ses applications immédiates sont incontournables. Des exemples de natures différentes doivent être présentés : actions sur un ensemble fini, sur un espace vectoriel (en particulier les représentations), sur un ensemble de matrices, sur des groupes ou des anneaux. Les exemples issus de la géométrie ne manquent pas (groupes d'isométries d'un solide).

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en décrivant les actions naturelles de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{F}_q)$ sur la droite projective qui donnent des injections intéressantes pour $q = 2, 3$ et peuvent plus généralement en petit cardinal donner lieu à des isomorphismes de groupes. En notant que l'injection du groupe de permutations dans le groupe linéaire par les matrices de permutations donne lieu à des représentations, ils pourront facilement en déterminer le caractère.

Leçon 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Il ne faut pas uniquement aborder cette leçon de façon élémentaire sans réellement expliquer où et comment les nombres complexes de modules 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques (exponentielle complexe et ses applications, polynômes cyclotomiques, spectre de matrices remarquables, théorie des représentations). Il ne faut pas non plus oublier la partie « groupe » de la leçon : on pourra s'intéresser au relèvement du groupe unité au groupe additif des réels et aux propriétés qui en résultent. De même les sous-groupes finis de $\mathbf{S}^1$ sont intéressants à considérer dans cette leçon.

On pourra aussi s'intéresser aux groupes des nombres complexes de $\mathbf{Q}[i]$, et les racines de l'unité qui y appartiennent ; tout comme aux sous-groupes compacts de $\mathbf{C}^*$.

Leçon 103 : Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Dans cette leçon, il faut non seulement évoquer les notions de groupe quotient, de sous-groupe dérivé et de groupe simple mais surtout savoir les utiliser et en expliquer l'intérêt. On pourra utiliser des exemples issus de la géométrie, de l'arithmétique, de l'algèbre linéaire (utilisation d'espaces vectoriels quotients par exemple). La notion de produit semi-direct n'est plus au programme ; mais, lorsqu'elle est utilisée, il faut savoir la définir proprement et savoir reconnaître des situations simples où de tels produits apparaissent (le groupe diédral D_n par exemple).

S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en illustrant ces notions à l'aide d'une table de caractères et décrire le treillis des sous-groupes distingués, ainsi que l'indice du sous-groupe dérivé, d'un groupe fini à l'aide de cette table.

Leçon 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

Dans cette leçon il faut savoir manipuler correctement les éléments de différentes structures usuelles ($\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\mathfrak{S}_n$, etc.) comme par exemple, en proposer un générateur ou une famille de générateurs, savoir calculer un produit de deux permutations, savoir décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Il est important que la notion d'ordre d'un élément soit mentionnée et comprise dans des cas simples. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit être connu.

Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. Les groupes d'automorphismes fournissent des exemples très naturels dans cette leçon. On peut par exemple étudier les groupes de symétries $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ et relier sur ces exemples géométrie et algèbre, les représentations ayant ici toute leur place ; il est utile de connaître les groupes diédraux.

S'ils le désirent, les candidats peuvent ensuite mettre en avant les spécificités de groupes comme le groupe quaternionique, les sous-groupes finis de $SU(2)$ ou les groupes $GL_n(\mathbf{F}_q)$.

Leçon 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles, d'être capable de donner des systèmes de générateurs.

L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement.

Les applications sont nombreuses, il est très naturel de parler des déterminants, des polynômes symétriques ou des fonctions symétriques des racines d'un polynôme.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant aux automorphismes du groupe symétrique, à des problèmes de dénombrement ou aux représentations des groupes des permutations.

Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Cette leçon ne doit pas se résumer à un catalogue de résultats épars sur $\mathrm{GL}(E)$. Il est important de savoir faire correspondre les sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, symplectiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.). On doit présenter des systèmes de générateurs, étudier la topologie et préciser pourquoi le choix du corps de base est important. Les liens avec le pivot de Gauss sont à détailler.

Il faut aussi savoir réaliser $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ et faire le lien entre signature et déterminant. S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en remarquant que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et de son sous-groupe unitaire.

Leçon 107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C-espace vectoriel. Exemples.

Il s'agit d'une leçon où théorie et exemples doivent apparaître. D'une part, il est indispensable de savoir dresser une table de caractères pour des petits groupes, et d'autre part, il faut savoir tirer des informations sur le groupe à partir de sa table de caractères, et être capable de trouver la table de caractères de certains sous-groupes. Les représentations peuvent provenir d'actions de groupes sur des ensembles finis, de groupes d'isométries, d'isomorphismes exceptionnels entre groupes de petit cardinal. Inversement, on peut chercher à interpréter des représentations de façon géométrique, mais il faut avoir conscience qu'une table de caractères provient généralement de représentations complexes à priori non réelles. La présentation du lemme de Schur est importante et ses applications doivent être parfaitement maîtrisées.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer dans la construction de l'icosaèdre à partir de la table de caractères de $\mathfrak{A}_5$ en utilisant l'indice de Schur (moyenne des caractères sur les carrés des éléments du groupe).

Leçon 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

C'est une leçon qui doit être illustrée par des exemples très variés en relation avec les groupes de permutations et les groupes linéaires ou de leurs sous-groupes. La connaissance de parties génératrices s'avère très utile dans l'analyse des morphismes de groupes ou pour montrer la connexité de certains groupes.

Tout comme dans la leçon 106, la présentation du pivot de Gauss et de ses applications est envisageable.

Leçon 110 : Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de Fourier discrète. Applications.

Le théorème de structure des groupes abéliens finis a une place de choix dans cette leçon. On pourra en profiter pour montrer l'utilisation de la dualité dans ce contexte. Comme application, la cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini est tout à fait adaptée. D'ailleurs, des exemples de caractères, additifs, ou multiplicatifs dans le cadre des corps finis, sont les bienvenus. S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux sommes de Gauss.

L'algèbre du groupe est un objet intéressant, surtout sur le corps des complexes, où elle peut être munie d'une forme hermitienne. On peut l'introduire comme une algèbre de fonctions, munie d'un produit de convolution, mais il est aussi agréable de la voir comme une algèbre qui « prolonge » la mutiplication du groupe.

La transformée de Fourier discrète pourra être vue comme son analogue analytique, avec ses formules d'inversion, sa formule de Plancherel, mais dans une version affranchie des problèmes de convergence, incontournables en analyse de Fourier.

On pourra y introduire la transformée de Fourier rapide sur un groupe abélien d'ordre une puissance de 2 ainsi que des applications à la multiplication d'entiers, de polynômes et éventuellement au décodage de codes via la transformée de Hadamard.

Leçon 120 : Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

Dans cette leçon, l'entier n n'est pas forcément un nombre premier. Il serait bon de connaître les idéaux de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et, plus généralement, les morphismes de groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.

Il est nécessaire de bien maîtriser le lemme chinois et sa réciproque. S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en donnant une généralisation du lemme chinois lorsque deux éléments ne sont pas premiers entre eux, ceci en faisant apparaître le pgcd et le ppcm de ces éléments.

Il faut bien sûr savoir appliquer le lemme chinois à l'étude du groupe des inversibles, et ainsi, retrouver la multiplicativité de l'indicatrice d'Euler. Toujours dans le cadre du lemme chinois, il est bon de distinguer clairement les propriétés de groupes additifs et d'anneaux, de connaître les automorphismes, les nilpotents et les idempotents.

Enfin, il est indispensable de présenter quelques applications arithmétiques des propriétés des anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, telles que l'étude de quelques équations diophantiennes bien choisies. De même, les applications cryptographiques telles que l'algorithme RSA sont naturelles dans cette leçon.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant au calcul effectif des racines carrées dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Leçon 121 : Nombres premiers. Applications.

Le sujet de cette leçon est très vaste. Aussi les choix devront être clairement motivés. La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers est un résultat historique important qu'il faudrait citer. Sa démonstration n'est bien sûr pas exigible au niveau de l'agrégation.

Quelques résultats sur les corps finis et leur géométrie sont les bienvenus, ainsi que des applications en cryptographie.

Leçon 122 : Anneaux principaux. Applications.

Cette leçon n'est pas uniquement théorique, Il est possible de présenter des exemples d'anneaux principaux classiques autres que $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ (décimaux, entiers de Gauss ou d'Eisenstein), accompagnés d'une description de leurs irréductibles. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas et doivent être mentionnées. Par exemple, les notions de polynôme minimal sont très naturelles parmi les applications. Les anneaux euclidiens représentent une classe d'anneaux principaux importante et l'algorithme d'Euclide a toute sa place dans cette leçon pour effectuer des calculs.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant à l'étude des réseaux, à des exemples d'anneaux non principaux, mais aussi à des exemples d'équations diophantiennes résolues à l'aide d'anneaux principaux. À ce sujet, il sera fondamental de savoir déterminer les unités d'un anneau, et leur rôle au moment de la décomposition en facteurs premiers. De même, le calcul effectif des facteurs invariants de matrices à coefficients dans certains anneaux peut être fait.

Leçon 123 : Corps finis. Applications.

Une construction des corps finis doit être connue et une bonne maîtrise des calculs dans les corps finis est indispensable. Les injections des divers $\mathbf{F}_q$ doivent être connues et les applications des corps finis (y compris pour $\mathbf{F}_q$ avec q non premier !) ne doivent pas être oubliées : citons par exemple l'étude de polynômes à coefficients entiers et de leur irréductibilité. Le calcul des degrés des extensions et le théorème de la base téléscopique sont incontournables. L'étude des carrés dans un corps fini et la résolution d'équations de degré 2 sont envisageables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en détaillant des codes correcteurs.

Leçon 125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

Le théorème de la base téléscopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis sont incontournables. De même il faut savoir calculer le polynôme minimal d'un élément algébrique dans des cas simples, notamment pour quelques racines de l'unité. La leçon peut être illustrée par des exemples d'extensions quadratiques et leurs applications en arithmétique, ainsi que par des extensions cyclotomiques.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer en théorie de Galois.

Leçon 126 : Exemples d'équations diophantiennes.

Dans cette leçon on doit présenter les notions de bases servant à aborder les équations de type $ax+by = d$ (identité de Bezout, lemme de Gauss), les systèmes de congruences, mais aussi bien entendu la méthode de descente de Fermat et l'utilisation de la réduction modulo un nombre premier p.

La leçon peut aussi dériver vers la notion de factorialité, illustrée par des équations de type Mordell, Pell-Fermat, et même Fermat (pour $n = 2$, ou pour les nombres premiers de Sophie Germain).

Leçon 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

La présentation du bagage théorique permettant de définir corps de rupture, corps de décomposition, ainsi que des illustrations dans différents types de corps (réel, rationnel, corps finis) sont inévitables. Les corps finis peuvent être illustrés par des exemples de polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbf{F}_2$ ou $\mathbf{F}_3$. Il est nécessaire de présenter des critères d'irréductibilité de polynômes et des polynômes minimaux de quelques nombres algébriques.

Il faut savoir qu'il existe des corps algébriquement clos de caractéristique nulle autres que $\mathbf{C}$; il est bon de savoir montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels est un corps algébriquement clos. Le théorème de la base téléscopique, ainsi que les utilisations arithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes, est incontournable.

Leçon 142 : Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

Cette leçon ne doit pas se concentrer exclusivement sur les aspects formels ou uniquement sur les polynômes symétriques. Les aspects arithmétiques ne doivent pas être négligés. Il faut savoir montrer l'irréductibilité d'un polynôme à plusieurs indéterminées en travaillant sur un anneau de type $A[X]$, où A est factoriel. Le théorème fondamental sur la structure de l'algèbre des polynômes symétriques est vrai sur $\mathbf{Z}$. L'algorithme peut être présenté sur un exemple. Les applications aux quadriques, aux relations racines/cœfficients ne doivent pas être délaissées : on peut faire par exemple agir le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ sur les polynômes à n indéterminées de degré inférieur à 2.

S'ils désirent aller plus loin, les candidats peuvent s'aventurer vers la géométrie algébrique et présenter le Nullstellensatz.

Leçon 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

Dans cette leçon on peut présenter des méthodes de résolutions, de la théorie des corps, des notions de topologie (continuité des racines) ou même des formes quadratiques. Il peut être pertinent d'introduire la notion de polynôme scindé, de citer le théorème de d'Alembert-Gauss et des applications des racines (valeurs propres, *etc.*). Notons le lien solide entre la recherche des racines d'un polynôme et la réduction des matrices ; les valeurs propres de la matrice compagnon d'un polynôme permet d'entretenir ce lien.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer en théorie de Galois ou s'intéresser à des problèmes de localisation des valeurs propres, comme les disques de Gershgorin.

Leçon 150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Dans cette leçon il faut présenter différentes actions (congruence, similitude, équivalence, ...) et dans chaque cas on pourra dégager d'une part des invariants (rang, matrices échelonnées réduites...), d'autre part des algorithmes comme le pivot de Gauss. On peut aussi, si l'on veut aborder un aspect plus théorique, faire apparaître à travers ces actions quelques décompositions célèbres ; on peut décrire les orbites lorsque la topologie s'y prête.

S'ils le désirent, les candidats peuvent travailler sur des corps finis et utiliser le dénombrement dans ce contexte.

Leçon 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il est important de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Ces théorèmes semblent simples car ils ont été très souvent pratiqués, mais leur preuve demande un soin particulier. Il est important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie. Les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses, on peut par exemple évoquer l'existence de polynômes annulateurs ou alors décomposer les isométries en produits de réflexions.

S'ils le désirent, les candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques.

Leçon 152 : Déterminant. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant. Il est possible d'entamer la leçon en disant que le sous-espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1, toutefois, il est essentiel de savoir le montrer. Le plan doit être cohérent ; si le déterminant n'est défini que sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, il est délicat de définir $\det(A - XI_n)$ avec A une matrice carrée. L'interprétation du déterminant comme volume est essentielle.

Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter que d'un déterminant de Vandermonde ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des déterminants, avec des illustrations sur des exemples, doivent être présentées. Il serait bien que la continuité du déterminant trouve une application, ainsi que son caractère polynomial. Pour les utilisations des propriétés topologiques, on n'ommetra pas de préciser le corps de base sur lequel on se place.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminant sur $\mathbf{Z}$ avec des méthodes multimodulaires ; de plus, le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent trouver leur place dans cette leçon.

Leçon 153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction qui est ici un moyen pour démontrer des théorèmes ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$, connaître sa dimension sans hésiter ; s'ils le désirent, les candidats peuvent ensuite s'intéresser à ses propriétés globales.

Les liens entre réduction d'un endomorphisme u et la structure de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$ sont importants, tout comme ceux entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques. Il faut bien préciser que, dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître les conséquences théoriques et pratiques.

L'aspect *applications* est trop souvent négligé. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est souhaitable que les candidats ne fassent pas la confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin, rappelons que pour calculer A^k, il n'est pas nécessaire en général de réduire A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit souvent).

Leçon 154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Dans cette leçon, il faut présenter des propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées sont les bienvenues, par exemple le cas d'une matrice diagonalisable ou le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum.

La décomposition de Frobenius trouve tout à fait sa place dans cette leçon. Il ne faut pas oublier d'examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des endomorphismes commutant entre eux ou sur la théorie des représentations.

Leçon 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps $\mathbf{K}$ et la topologie choisie pour $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable est immédiat une fois que l'on connaît les valeurs propres et ceci sans diagonaliser la matrice, par exemple à l'aide des projecteurs spectraux. Sur les corps finis, on a des critères spécifiques de diagonalisabilité. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide.

Leçon 156 : Exponentielle de matrices. Applications.

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle. La distinction entre le cas réel et complexe doit être clairement évoqué.

Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ? La matrice définie par blocs $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ? La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. Notons que l'exponentielle fait bon ménage avec la décomposition polaire dans bon nombre de problèmes sur les sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve toute sa place dans cette leçon. Si l'on traite du cas des matrices nilpotentes, on pourra invoquer le calcul sur les développements limités. Les applications aux équations différentielles doivent être évoquées sans constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un développement.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$) ou vers les algèbres de Lie.

Leçon 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, ceci pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables par exemple. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. Notons que l'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et que l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Frobenius.

Leçon 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon sans toutefois être un développement consistant. La notion de signature doit être présentée ainsi que son unicité dans la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. La partie réelle et la partie imaginaire d'un produit hermitien définissent des structures sur l'espace vectoriel réel sous-jacent. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.

Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon.

L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.

Leçon 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction de endomorphismes normaux peut être évoquée.

Leçon 161 : Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

La classification des isométries en dimension 2 et 3 est exigible. Il faut savoir prouver qu'une isométrie est affine, pouvoir donner des générateurs du groupe des isométries affines, et savoir composer des isométries affines. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut aussi penser aux applications aux isométries laissant stables certains objets en dimension 2 et 3.

Leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Dans cette leçon, les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus. Il est impératif de présenter la notion de système échelonné, avec une définition précise et correcte, et de situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire (sans oublier la dualité). Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt pratique (algorithmique) des méthodes présentées doit être expliqué y compris sur des exemples simples où l'on attend parfois une résolution explicite.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter les relations de dépendances linéaires sur les colonnes d'une matrice échelonnée qui permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$. De même, des discussions sur la résolution de systèmes sur $\mathbf{Z}$ et la forme normale de Hermite peuvent trouver leur place dans cette leçon.

Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Il faut tout d'abord noter que l'intitulé implique implicitement que le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbf{R}$. Le candidat pourra parler de la classification des formes quadratiques sur le corps des complexes et sur les corps finis. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être pratiqué sur une forme quadratique simple.

Les notions d'isotropie et de cône isotrope sont un aspect important de cette leçon. On pourra rattacher cette notion à la géométrie différentielle.

Leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Dans cette leçon, la loi d'inertie de Silvester doit être présentée ainsi que l'orthogonalisation simultanée. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être expliqué sur une forme quadratique de $\mathbf{R}^3$; le lien avec la signature doit être clairement énoncé et la signification géométrique des deux entiers r et s composant la signature d'une forme quadratique réelle doit être expliqué. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante qui mérite d'être présentée dans cette leçon.

La définition des coniques affines non dégénérées doit être connue, et les propriétés classiques des coniques doivent être données. On pourra présenter les liens entre la classification des formes quadratiques et celles des coniques ; de même il est intéressant d'évoquer le lien entre le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi aller vers la théorie des représentation et présenter l'indicatrice de Schur-Frobenius qui permet de réaliser une représentation donnée sur le corps des réels.

Leçon 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Dans cette leçon, la notion de coordonnées barycentriques est incontournable ; des illustrations dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables) sont envisageables. Il est important de parler d'enveloppe convexe, de points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en présentant le lemme de Farkas, le théorème de séparation de Hahn-Banach, ou les théorèmes de Helly et de Caratheodory.

Leçon 182 : Applications des nombres complexes à la géométrie.

Cette leçon ne doit pas rester au niveau de la classe terminale. L'étude des inversions est tout à fait appropriée, en particulier la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement ; la formule de Ptolémée illustre bien l'utilisation de cet outil. Il est nécessaire de présenter les similitudes, les homographies et le birapport. On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi étudier l'exponentielle complexe et les homographies de la sphère de Riemann. La réalisation du groupe SU_2 dans le corps des quaternions et ses applications peuvent trouver leur place dans la leçon.

Leçon 183 : Utilisation des groupes en géométrie.

C'est une leçon dans laquelle on s'attend à trouver des utilisations variées. On s'attend à ce que soient définis différents groupes de transformations (isométries, déplacements, similitudes, translations) et à voir résolus des problèmes géométriques par des méthodes consistant à composer des transformations. De plus, les actions de groupes sur la géométrie permettent aussi de dégager des invariants essentiels (angle, birapport, excentricité d'une conique). Les groupes d'isométries d'une figure sont incontournables.

Leçon 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Il est nécessaire de dégager clairement différentes méthodes de dénombrement et les illustrer d'exemples significatifs. De nombreux domaines de mathématiques sont concernés par des problèmes de dénombrement, cet aspect varié du thème de la leçon doit être mis en avant. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. De plus il est naturel de calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités. Il est important de connaître l'interprétation ensembliste de la somme des coefficients binomiaux, et ne pas se contenter d'une justification par le binôme de Newton. L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien avec l'algèbre linéaire. Les actions de groupes peuvent également conduire à des résultats remarquables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter des applications de la formule d'inversion de Möebius ou de la formule de Burnside.

4.3 L'épreuve orale d'analyse et probabilités

On trouvera dans cette section des commentaires sur chaque leçon de l'oral d'Analyse et Probabilités de la session 2016. La plupart des commentaires sur les leçons sont structurés en deux parties : la première présente ce que le jury considère comme le socle de la leçon ; la seconde partie propose des suggestions pour sortir de ce socle de base. Insistons sur le fait que ce ne sont que des suggestions. Répetons qu'il vaut bien mieux présenter deux développements classiques pertinents et maîtrisés tant au niveau du fond que de la présentation (notamment avec un timing de 15 minutes respectés) plutôt que de s'aventurer sur des terrains mal maîtrisés.

Quelques remarques d'ordre général : une liste, même riche, de théorèmes ne suffit pas à convaincre le jury. Il est souhaitable d'enrichir les leçons avec des exemples pertinents. Il est important de savoir s'auto-évaluer sur le niveau. Toutefois, indépendamment du choix du niveau, le candidat doit choisir des développements pertinents relativement au thème de la leçon. Ainsi, le jury peut avoir un jugement sévère lorsque l'intersection avec le titre du sujet est anecdotique. Ainsi quelques développements intéressants sont parfois abusivement exploités (citons par exemple "base hilbertienne de polynômes sur L^2 avec poids d'ordre exponentiel", ou encore "méthode de Newton"), ce qui conduit parfois à un hors-sujet.

La liste des leçons évolue en 2017 et certaines des leçons de la session 2016 sont fusionnées avec d'autres. Cela ne signifie absolument pas que les notions sous-jacentes aux intitulés qui ne sont plus présents disparaissent : elles trouvent naturellement leur place parmi les leçons de la session 2017, comme cela est très clairement précisé dans ce qui suit.

201 : Espaces de fonctions ; exemples et applications.

C'est une leçon riche où le candidat devra choisir soigneusement le niveau auquel il souhaite se placer. Les espaces de fonctions continues sur un compact (par exemple l'intervalle $[0, 1]$) offrent des exemples élémentaires et pertinents. Dans ce domaine, le jury attend une maîtrise du fait qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue. Les candidats peuvent se concentrer dans un premier temps sur les espaces de fonctions continues et les bases de la convergence uniforme. Les espaces de Hilbert de fonctions comme l'espace des fonctions L^2 constituent ensuite une ouverture déjà significative.

Pour aller plus loin, d'autres espaces usuels tels que les espaces L^p ont tout à fait leur place dans cette leçon. Le théorème de Riesz-Fischer est alors un très bon développement pour autant que ses difficultés soient maîtrisées. Les espaces de fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$ constituent aussi une ouverture de très bon niveau.

202 : Exemples de parties denses et applications.

Il ne faut pas négliger les exemples élémentaires comme les sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$ et leurs applications, ou encore les critères de densité dans un espace de Hilbert. Le théorème de Weierstrass via les polynômes de Bernstein peut être abordé à des niveaux divers suivant que l'on précise ou pas la vitesse de convergence voire son optimalité.

Pour aller plus loin, la version plus abstraite du théorème de Weierstrass (le théorème de Stone-Weierstrass) est aussi intéressante et a de multiples applications. Cette leçon permet aussi d'explorer les questions d'approximation de fonctions par des polynômes et des polynômes trigonométriques, ou plus généralement la densité de certains espaces remarquables de fonctions dans les espaces de fonctions continues, ou dans les espaces L^p. Il est également possible de parler de l'équirépartition.

203 : Utilisation de la notion de compacité.

Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale (confusion entre *utilisation de la notion compacité* et *notion de compacité*). Néanmoins, on attend des candidats d'avoir une vision synthétique de la compacité. Des exemples d'applications comme le théorème de Heine et le théorème de Rolle doivent y figurer et leur démonstration être connue. Par ailleurs, le candidat doit savoir quand la boule unité d'un espace vectoriel normé est compacte. Des exemples significatifs d'utilisation comme le théorème de Stone-Weierstrass, des théorèmes de point fixe, voire l'étude qualitative d'équations différentielles, sont tout-à fait envisageables. Le rôle de la compacité pour des problèmes d'existence d'extrema mériterait d'être davantage étudié. On peut penser comme application à la diagonalisation des matrices symétriques à coefficients réels.

Pour aller plus loin, les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. Les opérateurs auto-adjoints compacts sur l'espace de Hilbert relèvent également de cette leçon, et on pourra développer l'analyse de leurs propriétés spectrales.

204 : Connexité. Exemples et applications.

Le rôle clef de la connexité dans le passage du local au global doit être mis en évidence dans cette leçon : en calcul différentiel, voire pour les fonctions holomorphes. Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité. La stabilité par image continue, l'identification des connexes de $\mathbf{R}$ sont des résultats incontournables. On distinguera bien connexité et connexité par arcs (avec des exemples compris par le candidat), mais il est pertinent de présenter des situations où ces deux notions coïncident. A contrario, on pourra distinguer leur comportement par passage à l'adhérence.

Des exemples issus d'autres champs (algèbre linéaire notamment) seront appréciés. Le choix des développements doit être pertinent, le préambule en fournit quelques exemples, même s'il fait aussi appel à des thèmes différents ; on peut ainsi suggérer le théorème de Runge.

205 : Espaces complets. Exemples et applications.

Les candidats devraient faire apparaître que l'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence : que ce soit tout simplement dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ mais aussi dans certains espaces de dimension infinie (par exemple dans certains espaces de fonctions). Il est important de présenter des exemples d'espaces usuels, dont on sait justifier la complétude. Rappelons ici que l'on attend des candidats une bonne maîtrise de la convergence uniforme. Les espaces L^p sont des exemples pertinents qui ne sont pas sans danger pour des candidats aux connaissances fragiles. On peut évoquer dans cette leçon des théorèmes classiques tels que le théorème de Cauchy-Lipschitz ou le théorème du point fixe des applications contractantes.

On ne s'aventurera pas à parler du théorème de Baire sans application pertinente et maîtrisée ; elles sont nombreuses. Rappelons à ce propos que la démonstration détaillée de l'existence d'une partie dense de fonctions continues dérivables en aucun point est délicate.

206 : Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

Cette leçon n'apparaîtra plus dans la session 2017. Toutefois le théorème du point fixe de Banach trouve naturellement sa place dans les leçons 205, 226, voire 233. Il est également sous-jacent dans d'autres thèmes de leçons : calcul différentiel, équations différentielles.

207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Il ne faut pas hésiter à commencer par des exemples très simples tels que le prolongement en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, mais il faut aller plus loin que le simple prolongement par continuité. Le prolongement par densité et le prolongement analytique relèvent bien sûr de cette leçon.

Pour aller plus loin, on peut par exemple parler de l'extension à L^2 de la transformation de Fourier. En ce qui concerne le théorème de Hahn-Banach, le candidat n'en donnera la version la plus générale que s'il peut s'aventurer sur le terrain délicat du lemme de Zorn. Rappelons que l'on peut aussi s'en dispenser pour justifier le théorème de Hahn-Banach de façon plus élémentaire dans le cas séparable.

208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Une telle leçon doit bien sûr contenir beaucoup d'illustrations et d'exemples, notamment avec quelques calculs élémentaires de normes subordonnées. Lors du choix de ceux-ci (le jury n'attend pas une liste encyclopédique), le candidat veillera à ne pas mentionner des exemples pour lesquels il n'a aucune idée de leur pertinence et à ne pas se lancer dans des développements trop sophistiqués.

La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être maîtrisée. Il faut savoir énoncer le théorème de Riesz sur la compacité de la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé. Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux. A contrario, des exemples d'espaces vectoriels normés de dimension infinie ont leur place dans cette leçon et il faut connaître quelques exemples de normes usuelles non équivalentes, notamment sur des espaces de suites ou des espaces de fonctions.

Pour aller plus loin, on peut éventuellement considérer le cas d'espaces métrisables mais dont la métrique n'est pas issue d'une norme, par exemple dans le champ des espaces de fonctions analytiques (topologie de la convergence uniforme sur tout compact par exemple).

209 : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

Cette leçon comporte un certain nombre de classiques comme par exemple les polynômes de Bernstein, éventuellement agrémenté d'une estimation de la vitesse de convergence (avec le module de continuité). Il n'est pas absurde de voir la formule de Taylor comme une approximation locale d'une fonction par des polynômes. Les polynômes d'interpolation de Lagrange peuvent être mentionnés en mettant en évidence les problèmes qu'ils engendrent du point de vue de l'approximation.

Pour aller plus loin, le théorème de Fejér (versions L^1, L^p ou $C(\mathbf{T})$) offre aussi la possibilité d'un joli développement, surtout s'il est agrémenté d'applications (polynômes trigonométriques lacunaires, injectivité de la transformée de Fourier sur L^1, ...), mais on peut aussi s'intéresser à la convolution avec d'autres noyaux.

213 : Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Il est bon de connaître et savoir justifier le critère de densité des sous-espaces par passage à l'orthogonal. Il faut aussi illustrer la leçon par des exemples de bases hilbertiennes (polynômes orthogonaux, séries de Fourier, ...).

Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne. De plus, la formule de la projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie d'un espace de Hilbert doit absolument être connue de même que l'interprétation géométrique de la méthode de Gramm-Schmidt. Le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de Hilbert H est régulièrement mentionné. Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules

$$x = \sum_{n\geqslant 0} (x|e_n)e_n \quad \text{et} \quad ||x||^2 = \sum_{n\geqslant 0} |(x|e_n)|^2$$

en précisant les hypothèses sur la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et en justifiant la convergence. La notion d'adjoint d'un opérateur continu peut illustrer agréablement cette leçon.

Pour aller plus loin, le programme permet d'aborder la résolution et l'approximation de problèmes aux limites en dimension 1 par des arguments exploitant la formulation variationnelle de ces équations. Plus généralement, l'optimisation de fonctionnelles convexes sur les espaces de Hilbert peut être explorée. Enfin, le difficile théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts peut être abordé.

214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Il s'agit d'une belle leçon, formulée ici dans la version qui sera adoptée pour la session 2017, qui exige une bonne maîtrise du calcul différentiel. Même si le candidat ne propose pas ces thèmes en développement, on est en droit d'attendre de lui des idées de démonstration des deux théorèmes fondamentaux qui donnent son intitulé à la leçon. Il est indispensable de savoir mettre en pratique le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles. On attend des applications en géométrie différentielle notamment dans la formulation des multiplicateurs de Lagrange. Plusieurs inégalités classiques de l'analyse peuvent se démontrer avec ce point de vue : arithmético-géométrique, Hölder, Carleman, Hadamard, … En ce qui concerne la preuve du théorème des extrema liés, la présentation de la preuve par raisonnement “sous-matriciel” est souvent obscure ; on priviligiera si possible une présentation géométrique s'appuyant sur l'espace tangent.

Pour aller plus loin, l'introduction des sous-variétés est naturelle dans cette leçon. Il s'agit aussi d'agrémenter cette leçon d'exemples et d'applications en géométrie, sur les courbes et les surfaces.

215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

Cette leçon requiert une bonne maîtrise de la notion de différentielle première et de son lien avec les dérivées partielles. On doit pouvoir mettre en pratique le théorème de différentiation composée pour calculer des dérivées partielles de fonctions composées dans des situations simples (par exemple le laplacien en coordonnées polaires). La différentiation à l'ordre 2 est attendue, notamment pour les applications classiques quant à l'existence d'extrema locaux. On peut aussi faire figurer dans cette leçon la différentielle d'applications issues de l'algèbre linéaire (ou multilinéaire).

Pour aller plus loin, l'exponentielle matricielle est une ouverture pertinente. D'autres thèmes issus de la leçon 214 trouvent aussi leur place ici.

217 : Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Exemples.

Ce thème retrouve naturellement sa place dans les leçons 214, 215, 219.

218 : Applications des formules de Taylor.

Il faut connaître les formules de Taylor et certains développements très classiques. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Le candidat doit pouvoir justifier les différentes formules de Taylor proposées ainsi que leur intérêt. Le jury s'inquiète des trop nombreux candidats qui ne savent pas expliquer clairement ce que signifient les notations o ou O qu'ils utilisent. De plus la différence entre l'existence d'un développement limité à l'ordre deux et l'existence de dérivée seconde doit être connue. On peut aussi montrer comment les formules de Taylor permettent d'établir le caractère développable en série entière (ou analytique) d'une fonction dont on contrôle les dérivées successives.

Pour aller plus loin, on peut mentionner des applications en algèbre bilinéaire (lemme de Morse), en géométrie (étude locale au voisinage des points stationnaires pour les courbes et des points critiques pour la recherche d'extrema) et, même si c'est plus anecdotique, en probabilités (Théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités contrôlant les dérivées intermédiaires lorsque f et sa dérivée n-ième sont bornées. On soignera particulièrement le choix des développements.

219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Comme souvent en analyse, il peut être opportun d'illustrer dans cette leçon un exemple ou un raisonnement à l'aide d'un dessin. Il faut savoir faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum) et globales (existence par compacité, par exemple). Dans le cas important des fonctions convexes, un minimum local est également global. Les applications de la minimisation des fonctions convexes sont nombreuses et elles peuvent illustrer cette leçon.

L'étude des algorithmes de recherche d'extremums y a toute sa place : méthode de gradient, preuve de la convergence de la méthode de gradient à pas optimal, ... Le cas particulier des fonctionnelles sur $\mathbf{R}^n$ de la forme $\frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x)$, où A est une matrice symétrique définie positive, ne devrait pas poser de difficultés. Les problèmes de minimisation sous contrainte amènent à faire le lien avec les extremums liés, la notion de multiplicateur de Lagrange et, là encore, des algorithmes peuvent être présentés et analysés. À ce sujet, une preuve géométrique des extrema liés sera fortement valorisée par rapport à une preuve algébrique, formelle et souvent mal maitrisée.

Les candidats pourraient aussi être amenés à évoquer les problèmes de type moindres carrés, ou, dans un autre registre, le principe du maximum et ses applications.

220 : Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études des solutions en dimension 1 et 2.

C'est l'occasion de rappeler une nouvelle fois que le jury s'alarme des nombreux défauts de maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz. Il est regrettable de voir des candidats ne connaître qu'un énoncé pour les fonctions globalement lipschitziennes ou plus grave, mélanger les conditions sur la variable de temps et d'espace. La notion de solution maximale et le théorème de sortie de tout compact sont nécessaires. Bien évidemment, le jury attend des exemples d'équations différentielles non linéaires. Le lemme de Grönwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est curieusement rarement énoncé. L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en œuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées.

Pour les équations autonomes, la notion de point d'équilibre permet des illustrations de bon goût comme par exemple les petites oscillations du pendule. Trop peu de candidats pensent à tracer et discuter des portraits de phase alors que le sujet y invite clairement.

Pour aller plus loin, il est possible d'évoquer les problématiques de l'approximation numérique dans cette leçon en présentant le point de vue du schéma d'Euler. On peut aller jusqu'à aborder la notion de problèmes raides et la conception de schémas implicites pour autant que le candidat ait une maîtrise convenable de ces questions.

221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Le jury attend d'un candidat qu'il sache déterminer rigoureusement la dimension de l'espace vectoriel des solutions. Le cas des systèmes à cœfficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. Le jury attend qu'un candidat puisse mettre en œuvre la méthode de variation des constantes pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 simple (à coefficients constants par exemple) avec second membre.

L'utilisation des exponentielles de matrices a toute sa place ici. Les problématiques de stabilité des solutions et le lien avec l'analyse spectrale devraient être exploitées.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire constitue un exemple de développement pertinent pour cette leçon. Les résultats autour du comportement des solutions, ou de leurs zéros, de certaines équations linéaires d'ordre 2 (Sturm, Hill-Mathieu, ...) sont aussi d'autres possibilités.

222 : Exemple d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Cette leçon peut être abordée en faisant appel à des techniques variées et de nombreux développements pertinents peuvent être construits en exploitant judicieusement les éléments les plus classiques du programme. Le candidat ne doit pas hésiter à donner des exemples très simples (par exemple les équations de transport).

Les techniques d'équations différentielles s'expriment par exemple pour traiter $\lambda u - u'' = f$ avec des conditions de Dirichlet en $x = 0$, $x = 1$ ou pour analyser l'équation de transport par la méthode des caractéristiques.

Les séries de Fourier trouvent dans cette leçon une mise en pratique toute désignée pour résoudre l'équation de la chaleur, de Schrödinger ou des ondes dans le contexte des fonctions périodiques. La transformée de Fourier, notamment sur l'espace de Schwartz, peut être considérée.

Le point de vue de l'approximation numérique donne lieu à des développements originaux, notamment autour de la matrice du laplacien et de l'analyse de convergence de la méthode des différences finies.

Des développements plus sophistiqués se placeront sur le terrain de l'analyse hilbertienne avec le théorème de Lax-Milgram, l'espace de Sobolev $H_0^1(]0,1[)$, jusqu'à la décomposition spectrale des opérateurs compacts, ou encore sur celui des distributions avec l'étude de solutions élémentaires d'équations elliptiques.

223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

Cette leçon permet souvent aux candidats de s'exprimer. Il ne faut pas négliger les suites de nombres complexes. Le théorème de Bolzano-Weierstrass doit être cité et le candidat doit être capable d'en donner une démonstration. On attend des candidats qu'ils parlent des limites inférieure et supérieure d'une suite réelle bornée, et qu'ils en maîtrisent le concept. Les procédés de sommation peuvent être éventuellement évoqués mais le théorème de Cesàro doit être mentionné et sa preuve maîtrisée par tout candidat à l'agrégation. Les résultats autour des sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$ permettent d'exhiber des suites denses remarquables et l'ensemble constitue un joli thème.

Pour aller plus loin, un développement autour de l'équirépartition est tout à fait envisageable.

224 : Exemple de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Cette leçon doit permettre aux candidats d'exprimer leur savoir-faire sur les techniques d'analyse élémentaire que ce soit sur les suites, les séries ou les intégrales. On peut par exemple établir un développement asymptotique à quelques termes des sommes partielles de la série harmonique, ou bien la formule de Stirling que ce soit dans sa version factorielle ou pour la fonction Γ. On peut également s'intéresser aux comportements autour des singularités de fonctions spéciales célèbres. Du côté de l'intégration, on peut évaluer la vitesse de divergence de l'intégrale de la valeur absolue du sinus cardinal, avec des applications pour les séries de Fourier ; voire présenter la méthode de Laplace.

Par ailleurs, le thème de la leçon permet l'étude de suites récurrentes (autres que $u_{n+1} = \sin(u_n)$), plus généralement de suites ou de fonctions définies implicitement, ou encore des études asymptotiques de solutions d'équations différentielles (sans résolution explicite).

226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Citer au moins un théorème de point fixe dans cette leçon est pertinent. Le jury attend d'autres exemples que la traditionnelle suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$ (dont il est souhaitable de savoir expliquer les techniques sous-jacentes).

La nouvelle formulation de cette leçon, qui sera en vigueur en 2017, invite à évoquer les problématiques de convergence d'algorithmes (notamment savoir estimer la vitesse), d'approximation de solutions de problèmes linéaires et non linéaires : dichotomie, méthode de Newton, algorithme du gradient, méthode de la puissance, méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, schéma d'Euler, ...

L'aspect vectoriel est souvent négligé. Par exemple, le jury attend des candidats qu'ils répondent de façon pertinente à la question de la généralisation de l'algorithme de Newton au moins dans $\mathbf{R}^2$, voire $\mathbf{R}^n$.

228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Cette leçon permet des exposés de niveaux très variés. Les théorèmes de base doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants, par exemple le théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée. Le jury s'attend à ce que le candidat connaisse et puisse calculer la dérivée des fonctions usuelles. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La stabilité par passage à la limite des notions de continuité et de dérivabilité doit être comprise par les candidats. De façon plus fine, on peut s'intéresser aux fonctions continues nulle part dérivables.

Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions lipschitziennes ou des fonctions monotones relève de cette leçon. Les applications du théorème d'Ascoli (avec, par exemple, des exemples d'opérateurs à noyaux compacts), sont les bienvenues. L'étude de la dérivée au sens des distributions de $x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ pour une fonction intégrable $f \in L^1([a, b])$, est un résultat intéressant.

229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

L'énoncé et la connaissance de la preuve de l'existence de limites à gauche et à droite pour les fonctions monotones sont attendues. Ainsi on doit parler des propriétés de continuité et de dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes de la variable réelle. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs. On notera que la monotonie concerne les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbf{R}^n$, qui fournissent de beaux exemples d'utilisation.

Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat remarquable (dont la preuve peut être éventuellement admise). L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon. Enfin, la dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité ; les candidats maîtrisant ces notions peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.

230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel de la matière de la leçon. Le thème central de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, développements asymptotiques — par exemple pour certaines suites récurrentes — cas des séries de Riemann, ...).

On peut aussi s'intéresser à certaines sommes particulières, que ce soit pour exhiber des nombres irrationnels (voire transcendants), ou mettre en valeur des techniques de calculs non triviales (par exemple en faisant appel aux séries de Fourier ou aux séries entières).

Enfin le jury apprécie que le théorème des séries alternées (avec sa version sur le contrôle du reste) soit maîtrisé, mais on rappelle aussi que la transformation d'Abel trouve toute sa place dans cette leçon.

232 : Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

Ce thème se retrouve naturellement dans la leçon 226

233 : Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

Cette leçon est reformulée pour la session 2017 au profit de la nouvelle leçon 233 suivante.

233 : Méthodes itératives en analyse numérique matricielle.

Dans cette leçon de synthèse, les notions de norme matricielle et de rayon spectral sont centrales, en lien avec le conditionnement et avec la convergence des méthodes itératives ; elles doivent être développées. Le résultat général de convergence, relié au théorème du point fixe de Banach, doit être enrichi de considérations sur la vitesse de convergence.

Le jury invite les candidats à étudier diverses méthodes issues de contextes variés : résolution de systèmes linéaires, optimisation de fonctionnelles quadratiques, recherche de valeurs propres,... Parmi les points intéressants à développer, on peut citer les méthodes de type Jacobi pour la résolution de systèmes linéaires, les méthodes de gradient dans le cadre quadratique, les méthodes de puissance pour la recherche de valeurs propres. Les candidats pourront également envisager les schémas numériques pour les équations différentielles ou aux dérivées partielles linéaires.

234 : Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Cette leçon nécessite d'avoir compris les notions de presque partout (comme par exemple les opérations sur les ensembles négligeables) et évidemment la définition des espaces L^p. Le jury a apprécié les candidats sachant montrer qu'avec une mesure finie $L^2 \subset L^1$ (ou même $L^p \subset L^q$ si $p \geqslant q$). Il est important de pouvoir justifier l'existence de produits de convolution comme par exemple le produit de convolution de deux fonctions de L^1). Par ailleurs, les espaces associés à la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{Z}$ fournissent des exemples pertinents non triviaux à propos desquels des développements peuvent être proposés comme la description du dual. Par ailleurs, des exemples issus des probabilités peuvent tout à fait être mentionnés.

Pour aller plus loin, la complétude de L^p (p fini ou infini) offre aussi un bon développement. On peut aussi penser à certains résultats sur la dimension des sous-espaces fermés de L^p dont les éléments ont des propriétés particulières de régularité. Enfin, le cas particulier hilbertien $p = 2$ mérite attention mais il faut se concentrer sur les spécificités d'un espace de fonctions L^2 et éviter de faire un catalogue de propriétés vraies pour n'importe quel espace de Hilbert.

235 : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Cette leçon s'intéresse aux problèmes d'interversion limite-limite, limite-intégrale et intégrale-intégrale. Il ne s'agit pas de refaire un cours d'intégration. On pourra toutefois mettre en évidence le rôle important joué par des théorèmes cruciaux de ce cours. À un niveau élémentaire, on peut insister sur le rôle de la convergence uniforme, ou de la convergence normale (dans le cas de séries de fonctions).

À un niveau plus avancé, les théorèmes de convergence dominée, de convergence monotone et le théorème de Fubini (et Fubini-Tonelli) ont leur place dans cette leçon. On choisira des exemples pertinents pour illustrer l'intérêt de chacun de ces réultats, mais on pourra aussi exhiber des contre-exemples montrant que des hypothèses trop faibles ne permettent pas en général d'effectuer l'interversion tant désirée. Pour les candidats qui le souhaitent, on pourra parler de la transformée de Fourier et/ou de la transformée de Laplace.

236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Cette leçon doit être très riche en exemples simples, comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$. Il est souhaitable de présenter des utilisations du théorème des résidus, ainsi que des exemples faisant intervenir les intégrales multiples comme le calcul de l'intégrale d'une gaussienne. Le calcul du volume de la boule unité de $\mathbf{R}^n$ ne doit pas poser de problèmes insurmontables. Le calcul de la transformation de Fourier d'une gaussienne a sa place dans cette leçon.

On peut aussi penser à l'utilisation du théorème d'inversion de Fourier ou du théorème de Plancherel. Certains éléments de la leçon précédente, comme par exemple l'utilisation des théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée et/ou de Fubini, sont aussi des outils permettant le calcul de certaines intégrales.

239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Souvent les candidats incluent les théorèmes de régularité (version segment — a minima — mais aussi version "convergence dominée") ce qui est pertinent. Cette leçon peut être enrichie par des études et méthodes de comportements asymptotiques. Les propriétés de la fonction Γ d'Euler fournissent un développement standard (il sera de bon ton d'y inclure le comportement asymptotique). Les différentes transformations classiques (Fourier, Laplace, ...) relèvent aussi de cette leçon. On peut en donner des applications pour obtenir la valeur d'intégrales classiques (celle de l'intégrale de Dirichlet par exemple).

Pour aller plus loin, on peut par exemple développer les propriétés des transformations mentionnées (notamment Fourier), ainsi que de la convolution.

240 : Produit de convolution, Transformation de Fourier. Applications.

Cette leçon, fusionnée avec la 254, est remplacée par la 250.

241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Une fois les résultats généraux énoncés, on attend du candidat qu'il évoque les séries de fonctions particulières classiques : séries entières, séries de Fourier. On pourra éventuellement s'intéresser aussi aux séries de Dirichlet. Il y a beaucoup de développements possibles et les candidats n'ont généralement aucun mal à trouver des idées que ce soit à un niveau élémentaire mais fourni en exemples pertinents ou plus avancé, voire nécessitant une certaine technicité. Par exemple, les théorèmes taubériens offrent une belle palette de développements.

Par ailleurs, la leçon n'exclut pas du tout de s'intéresser au comportement des suites et séries de fonctions dans les espaces de type L^p (notamment pour $p = 1$), ou encore aux séries de variables aléatoires indépendantes.

243 : Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Les candidats évoquent souvent des critères (Cauchy, D'Alembert) permettant d'estimer le rayon de convergence mais oublient souvent la formule de Cauchy-Hadamard. Le jury attend bien sûr que le candidat puisse donner des arguments justifiant qu'une série entière en 0 dont le rayon de convergence est R est développable en série entière en un point z_0 intérieur au disque de convergence et de minorer le rayon de convergence de cette série. Sans tomber dans un catalogue excessif, on peut indiquer les formules de développement de fonctions usuelles importantes (exp, log, $1/(1-z)$, sin,...). Le jury attend également que le candidat puisse les donner sans consulter ses notes. En ce qui concerne la fonction exponentielle, le candidat doit avoir réfléchi au point de vue adopté sur sa définition et donc sur l'articulation entre l'obtention du développement en série entière et les propriétés de la fonction. À ce propos, les résultats sur l'existence du développement en série entière pour les fonctions dont on contrôle toutes les dérivées successives sur un voisinage de 0 sont souvent méconnus.

Le théorème d'Abel (radial ou sectoriel) trouve toute sa place mais doit être agrémenté d'exercices pertinents. Réciproquement, les théorèmes taubériens offrent aussi de jolis développements. On pourra aller plus loin en abordant quelques propriétés importantes liées à l'analyticité de la somme d'une série entière.

244 : Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples.

Ce thème se retrouve naturellement dans les leçons 243 et 245.

245 : Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

Les conditions de Cauchy-Riemann doivent être parfaitement connues et l'interprétation de la différentielle en tant que similitude directe doit être comprise. La notation $\int_\gamma f(z)dz$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. Par ailleurs, même si cela ne constitue pas le cœur de la leçon, il faut connaître la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète).

Les résultats autour de l'analyticité, ou encore le principe du maximum, le principe des zéros isolés, sont bien sûr cruciaux. Le lemme de Schwarz est un joli résultat permettant de faire un développement élémentaire s'il est agrémenté d'applications pertinentes, comme par exemple déterminer les automorphismes du disque unité.

Pour les candidats qui le souhaitent, cette leçon offre beaucoup de possibilités, notamment en lien avec la topologie du plan. La preuve du théorème de l'application conforme de Riemann est par exemple un développement de très bon niveau mais qui nécessite une bonne maîtrise.

246 : Série de Fourier. Exemples et applications.

Les différents résultats autour de la convergence (L^2, Fejér, Dirichlet, ...) doivent être connus. Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Dans le cas d'une fonction continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Il est classique d'obtenir des sommes de séries remarquables comme conséquence de ces théorèmes.

On peut aussi s'intéresser à la formule de Poisson et à ses conséquences. L'existence d'exemples de séries de Fourier divergentes, associées à des fonctions continues (qu'ils soient explicites ou obtenus par des techniques d'analyse fonctionnelle) peuvent aussi compléter le contenu.

Mais il est souhaitable que cette leçon ne se réduise pas à un cours abstrait sur les cœfficients de Fourier. La résolution d'équations aux dérivées partielles (par exemple l'équation de la chaleur) peuvent illustrer de manière pertinente cette leçon, mais on peut penser à bien d'autres applications (inégalité isopérimétrique, comportements remarquables des fonctions à spectre lacunaire,...).

249 : Suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

Les éléments de cette leçon trouvent naturellement leur place dans la leçon 264, ainsi que dans les autres leçons de probabilités.

250 : Transformation de Fourier. Applications.

Cette leçon, reformulée pour la session 2017, offre de multiples facettes. Les candidats peuvent adopter différents points de vue : L^1, L^2 et/ou distributions. L'aspect “séries de Fourier” n'est toutefois pas dans l'esprit de cette leçon ; précisons aussi qu'il ne s'agit pas de faire de l'analyse de Fourier sur n'importe quel groupe localement compact mais bien sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^d$.

La leçon nécessite une bonne maîtrise de questions de base telle que la définition du produit de convolution de deux fonctions de L^1. En ce qui concerne la transformation de Fourier, elle ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de Fourier. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soigneuse des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. Le lien entre la régularité de la fonction et la décroissance de sa transformée de Fourier doit être fait, même sous des hypothèses qui ne sont pas minimales.

La formule d'inversion de Fourier pour une fonction L^1 dont la transformée de Fourier est aussi L^1 sont attendues ainsi que l'extension de la transformée de Fourier à l'espace L^2 par Fourier-Plancherel. Des exemples explicites de calcul de transformations de Fourier, classiques comme la gaussienne ou $(1 + x^2)^{-1}$, paraissent nécessaires.

Pour aller plus loin, la transformation de Fourier des distributions tempérées ainsi que la convolution dans le cadre des distributions tempérées peuvent être abordées. Rappelons une fois de plus que les attentes du jury sur ces questions restent modestes, au niveau de ce qu'un cours de première année de master sur le sujet peut contenir. Le fait que la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ dans lui même avec de bonnes estimations des semi-normes doit alors être compris et la formule d'inversion de Fourier maîtrisée dans ce cadre. Des exemples de calcul de transformée de Fourier peuvent être données dans des contextes liés à la théorie des distributions comme par exemple la transformée de Fourier de la valeur principale.

La résolution de certaines équations aux dérivées partielles telle que, par exemple, l'équation de la chaleur, peut être abordée, avec une discussion sur les propriétés qualitatives des solutions.

253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Il s'agit d'une leçon de synthèse, très riche, qui mérite une préparation soigneuse. Même si localement (notamment lors de la phase de présentation orale) des rappels sur la convexité peuvent être énoncés, ceci n'est pas attendu dans le plan. Il s'agit d'aborder différents champs des mathématiques où la convexité intervient. On pensera bien sûr, sans que ce soit exhaustif, aux problèmes d'optimisation, au théorème de projection sur un convexe fermé, au rôle joué par la convexité dans les espaces vectoriels normés (convexité de la norme, jauge d'un convexe,...). Les fonctions convexes élémentaires permettent aussi d'obtenir des inégalités célèbres. On retrouve aussi ce type d'argument pour justifier des inégalités de type Brunn-Minkowski ou Hadamard. Par ailleurs, l'inégalité de Jensen a aussi des applications en intégration et en probabilités.

Pour aller plus loin, on peut mettre en évidence le rôle joué par la convexité dans le théorème de séparation de Hahn-Banach. On peut aussi parler des propriétés d'uniforme convexité dans certains espaces, les espaces L^p pour $p > 1$, par exemple, et de leurs conséquences.

254 : Espaces de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et distributions tempérées. Dérivation et transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$.

Ce thème se retrouve naturellement dans les leçons 222, 236, 239, 250. Cette liste n'étant pas exhaustive.

260 : Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

Le jury attend des candidats qu'ils donnent la définition des moments centrés, qu'ils rappellent les implications d'existence de moments (décroissance des L^p). Le candidat peut citer — mais doit surtout savoir retrouver rapidement — les espérances et variances de lois usuelles, notamment Bernoulli, binômiale, géométrique, Poisson, exponentielle, normale. La variance de la somme de variables aléatoires indépendantes suscite souvent des hésitations. Les inégalités classiques (de Markov, de Bienaymé-Chebychev, de Jensen et de Cauchy-Schwarz) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (loi des grands nombres et théorème central limite). La notion de fonction génératrice des moments pourra être présentée ainsi que les liens entre moments et fonction caractéristique.

Pour aller plus loin, le comportement des moyennes pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées n'admettant pas d'espérance pourra être étudié. Pour les candidats suffisamment à l'aise avec ce sujet, l'espérance conditionnelle pourra aussi être abordée.

261 : Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

Les candidats pourront présenter l'utilisation de la fonction caractéristique pour le calcul de lois de sommes de variables aléatoires indépendantes et faire le lien entre la régularité de la fonction caractéristique et l'existence de moments. Le candidat doit être en mesure de calculer la fonction caractéristique des lois usuelles. Le jury attend l'énoncé du théorème de Lévy, que les candidats en comprennent la portée, et son utilisation dans la démonstration du théorème central limite.

Pour aller plus loin, des applications pertinentes de ces résultats seront les bienvenues. Enfin, la transformée de Laplace pourra être utilisée pour établir des inégalités de grandes déviations.

262 : Mode de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

Les implications entre les divers modes de convergence, ainsi que les réciproques partielles doivent être connues. Des contre-exemples aux réciproques sont attendus par le jury. Les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite) doivent être énoncés. On peut par ailleurs exiger de connaître au moins l'architecture des preuves. L'étude de maximum et minimum de n variables aléatoires indépendantes et de même loi peut nourrir de nombreux exemples.

Pour aller plus loin, les candidats pourront s'intéresser au comportement asymptotique de marches aléatoires (en utilisant par exemple le lemme de Borel-Cantelli, les fonctions génératrices, ...) ou donner des inégalités de grandes déviations. Enfin, les résultats autour des séries de variables aléatoires indépendantes comme le théorème de Kolmogorov peuvent tout à fait se placer dans cette leçon.

263 : Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire à densité et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Les très bons candidats auront en tête le théorème de Radon-Nikodym, même s'il ne s'agit pas de faire un cours abstrait sur l'absolue continuité. Le lien entre indépendance et produit des densités est un outil important. Le lien entre la somme de variables indépendantes et la convolution de leurs densités est trop souvent oublié. Ce résultat général peut être illustré par des exemples issus des lois usuelles. Les candidats pourront expliquer comment fabriquer n'importe quelle variable aléatoire à partir d'une variable uniforme sur $[0, 1]$.

Les candidats proposent parfois en développement la caractérisation de la loi exponentielle comme étant l'unique loi absolument continue sans mémoire : c'est une bonne idée de développement de niveau élémentaire pour autant que les hypothèses soient bien posées et toutes les étapes bien justifiées. On pourra pousser ce développement à un niveau supérieur en s'intéressant au minimum ou aux sommes de telles lois. La preuve du théorème de Scheffé sur la convergence en loi peut aussi faire l'objet d'un développement. La loi de Cauchy offre encore des idées de développements intéressants (par exemple en la reliant au quotient de deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée).

Pour aller plus loin, les candidats pourront aborder la notion de vecteurs gaussiens et son lien avec le théorème central limite. On peut aussi proposer en développement le théorème de Cochran.

264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre variables aléatoires de Bernoulli, binômiale et de Poisson doit être discuté. Il peut être d'ailleurs intéressant de mettre en avant le rôle central joué par les variables aléatoires de Bernoulli.

Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières, devront être mises en évidence, comme par exemple la caractérisation de la convergence en loi.

Pour aller plus loin, la notion de fonction génératrice pourra être abordée. Le processus de Galton-Watson peut se traiter intégralement par fonctions génératrices et cette voie a été choisie par plusieurs candidats : cela donne un développement de très bon niveau pour ceux qui savent justifier les étapes délicates.

Pour aller beaucoup plus loin, les candidats pourront étudier les marches aléatoires, les chaînes de Markov à espaces d'états finis ou dénombrables, les sommes ou séries de variables aléatoires indépendantes.

4.4 Épreuves orales Option D

4.4.1 Remarques sur l'épreuve de leçon de mathématiques de l'option D

Dans cette épreuve, le candidat tire un couple de sujets au sein d'une liste d'une quarantaine de sujets d'algèbre et d'analyse extraite de la liste générale des autres options du concours. **Il n'y a donc pas nécessairement un sujet d'algèbre et un sujet d'analyse !** Il peut y avoir deux sujets d'algèbre ou deux sujets d'analyse, par exemple : *Variables aléatoires discrètes* et *Fonctions monotones*. Le programme précise en effet :

> *Les candidats se verront proposer deux sujets, dans un corpus d'algèbre, de géométrie, d'analyse et de probabilités.*

Il est donc impératif que les candidats ajustent leur préparation à cette organisation ; ils ne peuvent se permettre de faire l'impasse sur une partie du programme.

Le jury a interrogé les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation étaient strictement identiques.

Notons toutefois que lorsqu'ils avaient le choix, les candidats ont le plus souvent préféré les sujets d'algèbre à ceux d'analyse. Nous conseillons vivement aux futurs candidats de cette option de ne pas négliger leur formation en analyse et probabilités. A l'avenir, le jury se réserve la possibilité de renforcer la fréquence des sujets d'analyse et probabilités dans les tirages de leçons proposées aux candidats.

Les remarques détaillées concernant cette épreuve ne sont pas différentes des remarques concernant les épreuves de leçon des autres options, et le lecteur est invité à se reporter à la section du rapport consacrée à ce point.

4.4.2 Leçon d'informatique fondamentale

Les sujets des leçons se répartissent en quatre grands domaines, bien identifiés : algorithmique (avec par exemple la leçon 902 : « *Diviser pour régner : exemples et applications* »), calculabilité et complexité (avec par exemple la leçon 928 :« *Problèmes NP-complets : exemples de réductions* »), langages et automates (avec par exemple la leçon 909 : « *Langages rationnels et automates finis. Exemples et applications.* »), et logique et preuves (avec par exemple la leçon 918 : « *Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre : exemples.* »). De manière générale, le jury a apprécié la qualité de nombreuses leçons présentées, dans les différents domaines, ce qui confirme le bon travail des préparations spécifiques en amont du concours.

Ceci est particulièrement net dans les plans des présentations proposées. Beaucoup de candidats cernent bien le sujet de leurs leçons et proposent des développements intéressants, même si une plus grande diversité dans les développements proposés serait souhaitable.

A contrario, le jury a constaté que certains candidats ont choisi l'option D apparemment sans avoir identifié les connaissances attendues. L'épreuve de la leçon est une épreuve difficile, qui couvre des domaines variés de tout le champ de la science informatique. Elle ne peut être réussie que si elle est préparée sérieusement et sur une période longue, et il serait illusoire de choisir cette option par défaut, sans préparation.

Le niveau constaté est assez hétérogène, ce qui conduit à une grande dispersion des notes. Le jury n'hésite pas à utiliser toute l'étendue de la plage de notation.

Organisation de la leçon Le jury rappelle qu'il s'agit bien d'une épreuve d'informatique fondamentale, et non pas d'outils mathématiques pour l'informatique. Il appartient au candidat de montrer la pertinence des outils mathématiques qu'il développe vis-à-vis des objectifs du thème informatique développé dans la leçon. La présentation d'outils mathématiques pour eux-mêmes, s'apparente donc à un hors-sujet. Ce point avait déjà été souligné dans les précédents rapports et les titres des leçons ont été précisés en conséquence. Les titres des leçons concernant des modèles formels de l'informatique sont maintenant libellés en mentionnant explicitement exemples et applications, ce qui devrait ramener le candidat aux réels attendus de l'épreuve.

Les deux questions-clés de cette épreuve sont toujours les mêmes :
- à quoi cet outil mathématique sert-il dans le cadre informatique considéré ? Pouvez-vous décrire quelques exemples pertinents de son application concrète ?
- la complexité ou le coût de son utilisation sont-ils bien compensés par la qualité supplémentaire d'information qu'il permet d'obtenir ?

Ces questions sont très souvent posées par le jury, sous une forme ou une autre. Le jury invite les candidats à se préparer tout particulièrement à gérer ce type de questions, centrales dans la pédagogie de l'informatique au niveau des lycées et des classes préparatoires.

Enfin, il faut rappeler que lors de la présentation de son plan, le candidat doit proposer au moins deux développements : le jury est attentif d'une part à ce que ces développements entrent strictement dans le cadre de la leçon, et que d'autre part ils ne se réduisent pas à des exemples triviaux. Tout hors sujet est sévèrement pénalisé.

Interaction avec le jury Une large partie de l'épreuve est consacrée à l'interaction avec le jury. Ici, il s'agit plutôt d'explorer de manière plus approfondie les notions qui ont été présentées, les domaines connexes, et surtout les exemples d'application de ces notions.

L'interaction est conduite sous la forme d'un dialogue avec le candidat. Le jury respecte le niveau choisi par le candidat : les questions s'ajustent à ce niveau. De même, toute digression du candidat sur un domaine connexe à celui de la leçon conduira le jury à tester les connaissances du candidat sur ce domaine : les connaissances solides seront récompensées, mais un manque de maîtrise sur des notions choisies par le candidat lui-même seront pénalisées.

Ce long temps d'interaction doit être considéré comme une occasion privilégiée pour le candidat de montrer ses connaissances, de guider le jury dans la direction adéquate. Il est indispensable que les candidats s'entraînent à ce type d'exercice avec leurs préparateurs.

Commentaires sur les leçons d'Informatique fondamentale La leçon 910 « *Langages algébriques. Exemples et applications.* » a été supprimée. La notion de langages algébriques reste au programme de l'option, elle est par exemple sous-jacente à la leçon 923, « *Analyses lexicale et syntaxique : applications.* » et des exemples concernant les grammaires algébriques pourront illustrer d'autres leçons.

La leçon 917 « *Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.* » a été supprimée ; la logique du premier ordre est au cœur des leçons 918 « *Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre : exemples* » et 924 « *Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.* » et donne lieu à des exemples illustrant d'autres leçons.

La leçon 922 « *Ensembles récursifs, récursivement énumérables. Exemples.* » a été supprimée, la notion d'ensembles récursifs, récursivement énumérables restant naturellement centrale dans les leçons 913 « *Machines de Turing. Applications.* » et 914 « *Décidabilité et indécidabilité. Exemples.* ».

Voici quelques points plus spécifiques pour chacune des leçons qui seront proposées en 2017.

901 : Structures de données : exemples et applications.

Le mot algorithme ne figure pas dans l'intitulé de cette leçon, même si l'utilisation des structures de données est évidemment fortement liée à des questions algorithmiques.

La leçon doit donc être orientée plutôt sur la question du choix d'une structure de données que d'un algorithme. Le jury attend du candidat qu'il présente différents types abstraits de structures de données en donnant quelques exemples de leur usage avant de s'intéresser au choix de la structure concrète. Le candidat ne peut se limiter à des structures linéaires simples comme des tableaux ou des listes, mais doit présenter également quelques structures plus complexes, reposant par exemple sur des implantations à l'aide d'arbres.

902 : Diviser pour régner : exemples et applications.

Cette leçon permet au candidat de proposer différents algorithmes utilisant le paradigme diviser pour régner. Le jury attend du candidat que ces exemples soient variés et touchent des domaines différents.

Un calcul de complexité ne peut se limiter au cas où la taille du problème est une puissance exacte de 2, ni à une application directe d'un théorème très général recopié approximativement d'un ouvrage de la bibliothèque de l'agrégation.

903 : Exemples d'algorithmes de tri. Correction et complexité.

Sur un thème aussi classique, le jury attend des candidats la plus grande précision et la plus grande rigueur.

Ainsi, sur l'exemple du tri rapide, il est attendu du candidat qu'il sache décrire avec soin l'algorithme de partition et en prouver la correction en exhibant un invariant adapté. L'évaluation des complexités dans le cas le pire et en moyenne devra être menée avec rigueur : si on utilise le langage des probabilités, il importe que le candidat sache sur quel espace probabilisé il travaille.

On attend également du candidat qu'il évoque la question du tri en place, des tris stables, ainsi que la représentation en machine des collections triées. Le jury ne manquera pas de demander au candidat des applications non triviales du tri.

906 : Programmation dynamique : exemples et applications.

Même s'il s'agit d'une leçon d'exemples et d'applications, le jury attend des candidats qu'ils présentent les idées générales de la programmation dynamique et en particulier qu'ils aient compris le caractère générique de la technique de mémoïsation. Le jury appréciera que les exemples choisis par le candidat couvrent des domaines variés, et ne se limitent pas au calcul de la longueur de la plus grande sous-séquence commune à deux chaînes de caractères.

Le jury ne manquera pas d'interroger plus particulièrement le candidat sur la question de la correction des algorithmes proposés et sur la question de leur complexité en espace.

907 : Algorithmique du texte : exemples et applications.

Cette leçon devrait permettre au candidat de présenter une grande variété d'algorithmes et de paradigmes de programmation, et ne devrait pas se limiter au seul problème de la recherche d'un motif dans un texte, surtout si le candidat ne sait présenter que la méthode naïve.

De même, des structures de données plus riches que les tableaux de caractères peuvent montrer leur utilité dans certains algorithmes, qu'il s'agisse d'automates ou d'arbres par exemple.

Cependant, cette leçon ne doit pas être confondue avec la 909, « *Langages rationnels et Automates finis. Exemples et applications.* ». La compression de texte peut faire partie de cette leçon si les algorithmes présentés contiennent effectivement des opérations comme les comparaisons de chaînes : la compression LZW, par exemple, ressortit davantage à cette leçon que la compression de Huffman.

909 : Langages rationnels et automates finis. Exemples et applications.

Pour cette leçon très classique, il importe de ne pas oublier de donner exemples et applications, ainsi que le demande l'intitulé.

De même, une approche algorithmique doit être privilégiée dans la présentation des résultats classiques (déterminisation, théorème de Kleene, minimisation, etc.) qui pourra utilement être illustrée par des exemples. Le jury pourra naturellement poser des questions telles que : connaissez-vous un algorithme pour décider de l'égalité des langages reconnus par deux automates ?

Des applications dans le domaine de la compilation entrent naturellement dans le cadre de cette leçon.

912 : Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.

Il s'agit de présenter un modèle de calcul : les fonctions récursives. Il est important de faire le lien avec d'autres modèles de calcul, par exemple les machines de Turing. En revanche, la leçon ne peut pas se limiter à l'aspect « *modèle de calcul* » et doit traiter des spécificités de l'approche.

Le candidat doit motiver l'intérêt de ces classes de fonctions sur les entiers et pourra aborder la hiérarchie des fonctions récursives primitives. Enfin, la variété des exemples proposés sera appréciée.

913 : Machines de Turing. Applications.

Il s'agit de présenter un modèle de calcul. Le candidat doit expliquer l'intérêt de disposer d'un modèle formel de calcul et discuter le choix des machines de Turing. La leçon ne peut se réduire à la leçon 914 ou à la leçon 915, même si, bien sûr, la complexité et l'indécidabilité sont des exemples d'applications. Plusieurs développements peuvent être communs avec une des leçons 914, 915, mais il est apprécié qu'un développement spécifique soit proposé, comme le lien avec d'autres modèles de calcul, ou le lien entre diverses variantes des machines de Turing.

914 : Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

Le programme de l'option offre de très nombreuses possibilités d'exemples. Si les exemples classiques de problèmes sur les machines de Turing figurent naturellement dans la leçon, le jury apprécie des exemples issus d'autres parties du programme : théorie des langages, logique, réécriture,. . .

Le jury portera une attention particulière à une formalisation propre des réductions, qui sont parfois très approximatives.

915 : Classes de complexité. Exemples.

Le jury attend que le candidat aborde à la fois la complexité en temps et en espace. Il faut naturellement exhiber des exemples de problèmes appartenant aux classes de complexité introduites, et montrer les relations d'inclusion existantes entre ces classes.

Le jury s'attend à ce que le caractère strict ou non de ces inclusions soit abordé, en particulier le candidat doit être capable de montrer la non-appartenance de certains problèmes à certaines classes.

Parler de décidabilité dans cette leçon serait hors sujet.

916 : Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

Le jury attend des candidats qu'ils abordent les questions de la complexité de la satisfiabilité.

Pour autant, les applications ne sauraient se réduire à la réduction de problèmes NP-complets à SAT.

Une partie significative du plan doit être consacrée à la représentation des formules et à leurs formes normales.

918 : Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre : exemples.

Le jury attend du candidat qu'il présente au moins la déduction naturelle ou un calcul de séquents et qu'il soit capable de développer des preuves dans ce système sur des exemples classiques simples. La présentation des liens entre syntaxe et sémantique, en développant en particulier les questions de correction et complétude, et de l'apport des systèmes de preuves pour l'automatisation des preuves est également attendue.

Le jury appréciera naturellement si des candidats présentent des notions plus élaborées comme la stratégie d'élimination des coupures mais est bien conscient que la maîtrise de leurs subtilités va au-delà du programme.

919 : Unification : algorithmes et applications.

La leçon est rarement choisie par les candidats. « *Algorithmes* » figure au pluriel, il est donc attendu de présenter plusieurs algorithmes : l'algorithme historique de Robinson ainsi qu'au moins un autre algorithme, plus efficace. Le jury attend des preuves de correction et une étude de complexité.

Concernant les applications, au moins deux exemples sont au programme de l'option : la méthode de résolution en logique du premier ordre et le calcul des paires critiques dans la complétion de Knuth-Bendix. Le candidat peut aussi considérer d'autres exemples, comme l'inférence de types.

920 : Réécriture et formes normales. Exemples.

Au-delà des propriétés standards (terminaison, confluence) des systèmes de réécriture, le jury attend notamment du candidat qu'il présente des exemples sur lesquels l'étude des formes normales est pertinente dans des domaines variés : calcul formel, logique, etc.

Un candidat ne doit pas s'étonner que le jury lui demande de calculer des paires critiques sur un exemple concret.

Lorsqu'un résultat classique comme le lemme de Newman est évoqué, le jury attend du candidat qu'il sache le démontrer.

921 : Algorithmes de recherche et structures de données associées.

Le sujet de la leçon concerne les algorithmes de recherche : les structures de données proposées doivent répondre à une problématique liée aux algorithmes, et la leçon ne peut donc être structurée sur la base d'un catalogue de structures de données.

La recherche d'une clé dans un dictionnaire sera ainsi par exemple l'occasion de définir la structure de données abstraite « dictionnaire », et d'en proposer plusieurs implantations concrètes. De la même façon, on peut évoquer la recherche d'un mot dans un lexique : les arbres préfixes (ou digital tries) peuvent alors être présentés. Mais on peut aussi s'intéresser à des domaines plus variés, comme la recherche d'un point dans un nuage (et les quad-trees), et bien d'autres encore.

923 : Analyses lexicale et syntaxique : applications.

Cette leçon ne doit pas être confondue avec la 909, qui s'intéresse aux seuls langages rationnels, ni avec la 907, sur l'algorithmique du texte.

Si les notions d'automates finis et de langages rationnels, d'automates à piles et de grammaires algébriques sont au coeur de cette leçon, l'accent doit être mis sur leur utilisation comme outils pour les analyses lexicale et syntaxique.

Il s'agit donc d'insister sur la différence entre langages rationnels et algébriques, sans perdre de vue l'aspect applicatif : on pensera bien sûr à la compilation. On pourra s'intéresser à la transition entre analyse lexicale et analyse syntaxique, et on pourra présenter les outils associés classiques, sur un exemple simple. Les notions d'ambiguité, de grammaire LL(1), d'automate à pile déterministe, l'aspect algorithmique doivent être développés. La présentation d'un type particulier de grammaire algébrique pour laquelle on sait décrire un algorithme d'analyse syntaxique efficace sera ainsi appréciée.

924 : Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

Le jury s'attend à ce que la leçon soit abordée dans l'esprit de l'option informatique, en insistant plus sur la décidabilité/indécidabilité des théories du premier ordre que sur la théorie des modèles.

Il est attendu que le candidat donne au moins un exemple de théorie décidable (resp. complète) et un exemple de théorie indécidable. Si le jury peut s'attendre à ce que le candidat connaisse l'existence du théorème d'incomplétude, il ne s'attend pas à ce que le candidat en maîtrise la démonstration.

925 : Graphes : représentations et algorithmes.

Cette leçon offre une grande liberté de choix au candidat, qui peut choisir de présenter des algorithmes sur des problèmes variés : connexité, diamètre, arbre couvrant, flot maximal, plus court chemin, cycle eulérien, etc. mais aussi des problèmes plus difficiles, comme la couverture de sommets ou la recherche d'un cycle hamiltonien, pour lesquels il pourra proposer des algorithmes d'approximation ou des heuristiques usuelles.

Il prendra soin de proposer au moins un algorithme reposant sur chacune des représentations des graphes qu'il aura proposées.

Une preuve de correction des algorithmes proposés sera évidemment appréciée.

926 : Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.

Il s'agit ici d'une leçon d'exemples. Le candidat prendra soin de proposer l'analyse d'algorithmes portant sur des domaines variés, avec des méthodes d'analyse également variées : approche combinatoire ou probabiliste, analyse en moyenne ou dans le cas le pire.

L'intitulé de la leçon ne précise pas le type de complexité étudiée : cela peut-être une complexité en temps autant qu'en espace, et la notion de complexité amortie a également toute sa place dans cette leçon, sur un exemple bien choisi, comme les arbres splay ou les union find (ce ne sont que des exemples).

927 : Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

Le jury attend du candidat qu'il traite des exemples d'algorithmes récursifs et des exemples d'algorithmes itératifs.

En particulier, le candidat doit présenter des exemples mettant en évidence l'intérêt de la notion d'invariant pour la correction partielle et celle de variant pour la terminaison des segments itératifs.

Une formalisation comme la logique de Hoare pourra utilement être introduite dans cette leçon, à condition toutefois que le candidat en maîtrise le langage. Des exemples non triviaux de correction d'algorithmes seront proposés. Un exemple de raisonnement type pour prouver la correction des algorithmes gloutons pourra éventuellement faire l'objet d'un développement.

928 : Problèmes NP-complets : exemples et réduction

L'objectif ne doit pas être de dresser un catalogue le plus exhaustif possible ; en revanche, pour chaque exemple, il est attendu que le candidat puisse au moins expliquer clairement le problème considéré, et indiquer de quel autre problème une réduction permet de prouver sa NP-complétude.

Les exemples de réduction seront autant que possible choisis dans des domaines variés : graphes, arithmétique, logique, etc. Un exemple de problème NP-complet dans sa généralité qui devient P si on contraint davantage les hypothèses pourra être présenté, ou encore un algorithme P approximant un problème NP-complet.

Si les dessins sont les bienvenus lors du développement, le jury attend une définition claire et concise de la fonction associant, à toute instance du premier problème, une instance du second ainsi que la preuve rigoureuse que cette fonction permet la réduction choisie.

Chapitre 5

Épreuves orales de modélisation

Lors de l'inscription au concours, quatre options sont proposées :

A. Probabilités et Statistiques,
B. Calcul scientifique,
C. Algèbre et Calcul formel,
D. Modélisation et Analyse de systèmes informatiques.

L'épreuve de modélisation comporte une période de préparation de quatre heures et une interrogation dont la durée sera d'une heure à compter de 2017.

Même s'il s'agit d'une épreuve plus appliquée ou moins académique que les deux autres épreuves orales, cela ne dispense en aucun cas les candidats de faire preuve de la rigueur mathématique requise : quand on utilise un théorème, il faut impérativement être capable d'en restituer un jeu d'hypothèses. Par jeu d'hypothèses correct, on entend que le théorème soit vrai et qu'il s'applique effectivement au contexte considéré. Le jury n'attend pas nécessairement un énoncé avec les hypothèses minimales.

Cette épreuve de modélisation doit permettre aux candidats de mettre en avant diverses qualités : les connaissances mathématiques (pour les options A, B, C) / informatiques et mathématiques (pour l'option D), la réflexion et la mise en perspective des connaissances, l'aptitude à les appliquer à des problèmes concrets de modélisation et à produire des illustrations informatiques pertinentes, les qualités pédagogiques de mise en forme d'un exposé construit et cohérent, la capacité à faire preuve d'initiatives pour s'exprimer et manifester des qualités pédagogiques et de synthèse. La capacité des candidats à répondre aux questions fait partie intégrante de l'évaluation de cette épreuve. Comme pour l'ensemble des oraux, le caractère vivant de l'exposé est un atout.

Le texte fourni est la base pour construire et exposer un traitement mathématique (et/ou informatique pour l'option D) d'un problème « concret » en s'appuyant sur des éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. La présentation doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions, mise en lumière des connaissances. Les candidats doivent utiliser leurs connaissances mathématiques et informatiques pour justifier certains points mentionnés dans le texte, proposer un retour sur le modèle ainsi qu'une conclusion.

Texte L'épreuve de modélisation repose sur un texte d'environ 5 à 6 pages (hors l'exercice de programmation pour l'option D) que les candidats choisissent parmi les deux qui leur sont proposés.

En 2017, ces textes seront surmontés, pour les options A, B, C, du bandeau suivant :

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury apprécie qu'un plan soit*

annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et en mettant en lumière les connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.

Pour l'option D, le bandeau sera :

Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury apprécie qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et en mettant en lumière les connaissances, à partir des éléments du texte. L'exercice de programmation doit être présenté lors de l'exposé. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.

Les textes se termineront par le texte suivant pour les options A, B, C :

Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.

Pour l'option D, la fin des textes comportera la mention suivante :

Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur, notamment à travers l'exercice de programmation.

Les textes sont souvent motivés par des problèmes concrets. Ils peuvent présenter des arguments rapides, voire heuristiques (signalés comme tels) mais ne contiennent pas d'assertion délibérément trompeuse et se concluent par une liste de suggestions. Même si la plupart des textes s'appuient sur des problématiques issues de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste donc avant tout à dégager les comportements qualitatifs du modèle, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres et s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter. Le jury s'attend à ce que les candidats ne se contentent pas d'un exposé qualitatif et démontrent certains résultats évoqués dans le texte. *A contrario*, les interprétations qualitatives du comportement des modèles sont parfois absentes des exposés. Pourtant, montrer que l'on comprend un modèle ne se réduit pas à prouver un théorème.

Chaque année, des textes sont rendus publics et sont disponibles sur le site de l'agrégation de mathématiques `http://agreg.org`. Ces textes sont représentatifs de l'épreuve et permettent aux candidats de se familiariser avec le format des textes, se faire une idée des attentes du jury, réfléchir à des illustrations numériques pertinentes dans le cadre du texte ou avoir des exemples d'exercices de programmation pour l'option D.

Préparation Durant les quatre heures de préparation, les candidats ont accès à la bibliothèque et disposent d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site de l'agrégation de mathématiques, à l'adresse `http://agreg.org`. Les candidats retrouveront le même environnement sur l'ordinateur de la salle d'interrogation. Il n'est évidemment pas réaliste de découvrir les logiciels à disposition des candidats le jour de l'épreuve : la configuration informatique utilisée pour le concours et sa documentation sont accessibles et téléchargeables sur le site http://clefagreg.dnsalias.org/ et permettent de se familiariser avec l'environnement offert pour l'épreuve.

Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur le discours qu'ils tiendront, la stratégie d'exploitation du tableau et d'utilisation de l'outil informatique qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. Proposer un exposé structuré et cohérent ne peut s'improviser au moment de l'oral et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation.

Oral Au début de l'interrogation, le jury commence par vérifier que les fichiers créés par les candidats lors de la préparation ont bien été transférés sur la machine locale (dont l'environnement est identifique à celui de la salle de préparation) et par rappeler les modalités de l'épreuve. Celle-ci est scindée en deux temps : un exposé de 40 minutes (35 minutes à partir de 2017), suivi de 25 minutes d'échanges avec le jury. Les candidats sont invités à commencer par donner la structure de leur présentation sous forme d'un plan et le déroulement de l'exposé doit être en cohérence avec cette structure. Grâce à ce plan, le jury pourra ainsi avoir une vision globale de l'exposé et aider, si besoin, les candidats à gérer leur temps. Comme les candidats se le voient rappeler en début d'épreuve, l'exposé doit être accessible à un public qui découvre les problématiques du texte et doit permettre d'en faire comprendre les enjeux à un public qui ne le connaîtrait pas. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis.

Durant l'exposé, les candidats disposent de leurs notes, d'un tableau et d'un ordinateur. Ils peuvent alterner, quand bon leur semble, entre un exposé oral, quelques éléments rédigés au tableau de façon propre et lisible et la présentation de ce qui a été préparé à l'aide de l'outil informatique. Les candidats doivent gérer correctement le tableau et demander, si besoin, au jury les parties qu'ils peuvent effacer (le jury peut souhaiter conserver certains passages et y revenir lors des échanges avec les candidats). Le jury a sous les yeux un exemplaire des textes et les candidats peuvent y faire référence pour éviter de recopier les notations, les énoncés complets ou certaines formules. Même si les programmes ne fonctionnent pas comme ils l'auraient souhaité ou si les simulations numériques n'ont pas abouti, les candidats sont invités à expliquer ce qu'ils voulaient mettre en œuvre, illustrer ou programmer. Si les candidats n'ont pas accédé à l'ordinateur dix minutes avant la fin du temps qui leur est imparti, le jury les préviendra.

Il n'y a pas de « format type » pour cette épreuve. Des prestations très différentes, tant dans leur forme que dans leur contenu, sur un même texte, peuvent conduire également à des notes élevées. Comme dans tout oral, la construction de l'exposé doit être une préoccupation importante des candidats. Une réflexion s'impose afin de produire un tout cohérent et intelligible par un public qui, dans l'esprit de l'épreuve, découvre le texte à travers l'exposé des candidats. Une brève introduction à la problématique avant de s'engager dans une longue digression (succession de définitions, théorèmes, ...) sans lien avec le problème de départ ne peut donner satisfaction. Il en va de même d'un exposé se réduisant à la présentation de la problématique du texte et à des illustrations informatiques, ou à l'énumération linéaire des pistes de réflexion proposées par le texte, sans contribution des candidats. Un texte traité de façon partielle mais en profondeur peut donner une note élevée. À un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique / informatique ou critique scientifique, les candidats doivent préférer une discussion fouillée d'une portion du texte, bâtie sur des arguments mathématiques / informatiques solides, des simulations pertinentes accompagnées de commentaires de bon aloi. Néanmoins, dans l'ensemble, les candidats semblent avoir perçu la nécessité d'utiliser, au mieux, le temps qui leur est consacré. Le jury apprécie de voir de plus en plus de candidats qui se sont approprié le texte et en donnent une présentation pertinente et autre qu'une paraphrase linéaire.

Pour enrichir leur propos, les candidats sont invités à mobiliser leurs connaissances, sur des aspects variés du programme, en étayant les arguments seulement esquissés dans le texte par des énoncés précis.

Il est totalement illusoire de chercher à impressionner le jury par une logorrhée de mots savants : les textes proposés peuvent être discutés en exploitant un bagage technique qui n'utilise pas les éléments les plus sophistiqués du programme. En particulier, le jury ne manque pas de s'attarder sur toute notion amenée par les candidats durant leur présentation et il est toujours dommageable de s'aventurer sur des terrains méconnus. Bien plus qu'une démonstration de virtuosité technique, le jury attend que les candidats montrent leur maîtrise d'énoncés relativement simples « en situation » : c'est là que réside une des difficultés principales de l'épreuve. Nombre de candidats éprouvent des difficultés à formaliser précisément des notions de base du programme ou à mettre en œuvre certaines de leurs connaissances. *A contrario*, utiliser une portion excessive du temps de parole pour recycler un chapitre de cours ou un développement d'une leçon d'Analyse et Probabilités, d'Algèbre et Géométrie ou d'Informatique, en s'éloignant des enjeux du texte est considéré comme un hors sujet et est sévèrement sanctionné. La paraphrase pure et simple d'amples portions du texte ne constitue en aucun cas un exposé satisfaisant. Les textes fournissent souvent des esquisses de démonstrations qui sont précisément destinées à être complétées et commentées. Les candidats ne doivent pas se contenter de ces esquisses de démonstration. S'ils font mention de ces esquisses, le jury s'assurera que les candidats ont compris en profondeur. Le jury n'est pas dupe des candidats qui tentent de faire semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un point du texte ou une démonstration. Il ne se laisse pas tromper non plus par les candidats qui font des indications du texte un argument d'autorité, tentative maladroite de masquer des insuffisances techniques. Un regard critique (« il faudrait prouver que… mais je n'ai pas réussi à le faire », « les hypothèses du théorème de XXX que je connais pour aborder des problèmes similaires ne sont pas satisfaites dans le cas présent » …) est une attitude bien plus payante.

Échanges avec le jury Durant 25 minutes, le jury revient sur certains propos des candidats qui méritent précision. Il peut demander l'énoncé précis de théorèmes utilisés pour démontrer une assertion. Les échanges peuvent également porter sur la modélisation, les illustrations informatiques ou les exercices de programmation pour l'option D.

5.1 Recommandations du jury, communes aux options A, B, C

Le jury tient à souligner les attentes partagées entre les trois options A (Probabilités et Statistiques), B (Calcul scientifique) et C (Algèbre et Calcul formel).

Le jury regrette de ne pas voir davantage de dessins (soignés) ou schémas explicatifs qui peuvent rendre l'argumentation plus claire et convaincante. La capacité à revenir sur le problème de départ et à conclure quant à l'efficacité de l'approche mathématique proposée pour y répondre est une qualité très appréciée. La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer : il vaut mieux indiquer les étapes cruciales d'un raisonnement que de se lancer dans un long calcul fastidieux qu'on aura du mal à mener à bien.

5.1.1 Illustration informatique

Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, dont les ambitions sont clairement délimitées. Il ne s'agit en aucun cas, et pour aucune de ces trois options, d'un exercice de programmation. L'objectif est d'être capable d'utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte. La réalisation de cet objectif constitue une part incompressible de la note finale attribuée à l'épreuve. Une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standards des logiciels fournis. La forme et la nature des illustrations proposées n'obéissent à aucun format préétabli. En revanche, elles doivent faire la preuve d'une véritable réflexion scientifique et être agrémentées de commentaires, sur les résultats et les méthodes. Les illustrations informatiques devraient plus souvent permettre de faire un retour sur la problématique du texte et il convient de commenter les résultats obtenus dans le cadre du modèle proposé par le texte. Des illustrations peuvent mettre en valeur les limites du modèle étudié et le jury apprécie particulièrement que les candidats aient un regard critique sur le texte et ne prennent pas celui-ci pour vérité absolue. Le jury rappelle que même si les simulations ne sont pas abouties, il sait valoriser la démarche suivie lorsqu'elle est clairement argumentée et permettrait, avec des aménagements mineurs, de mettre en évidence des aspects intéressants du texte.

Si un bel effort est produit par la majorité des candidats, un nombre limité de candidats préfèrent ne pas toucher à l'outil informatique. Si les candidats pensent ainsi consacrer plus de temps à l'analyse du texte et à la préparation de leur exposé oral, cette stratégie n'est en aucun cas payante, bien au contraire.

Il est important de se rappeler qu'il s'agit d'une illustration. Présenter le code source de façon détaillée n'est pas indispensable, le jury sera plus sensible à une présentation de résultats d'exécution et/ou une représentation graphique clairement commentées oralement par le candidat. Dans le cas d'une représentation graphique, il est important de préciser, au moins oralement, ce qui est représenté en abscisses et ordonnées.

5.1.2 Liens avec les épreuves d'Analyse-Probabilités et Algèbre-Géométrie

Les candidats ne doivent pas hésiter à s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques pour proposer des développements originaux dans les leçons d'Analyse et Probabilités ou d'Algèbre et Géométrie. Par exemple,

A. les candidats de l'option A peuvent nourrir leurs leçons de thèmes et d'exemples probabilistes (la fonction caractéristique d'une variable aléatoire est une transformée de Fourier, le produit de convolution a un sens probabiliste, les espaces L^p d'une mesure de probabilité sont intéressants, l'étude de certaines séries aléatoires est possible, la fonction de répartition est une fonction monotone digne d'intérêt, le calcul intégral est en lien étroit avec les probabilités, . . .).

B. les candidats de l'option B peuvent centrer leur propos sur des problématiques motivées par les préoccupations du calcul scientifique (approximation de solutions d'équations linéaires ou non linéaires, d'équations différentielles, convergence d'algorithmes, analyse matricielle,. . .).

C. les candidats de l'option C peuvent s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques en algèbre effective.

5.2 Option A : Probabilités et Statistiques

5.2.1 Commentaires généraux

Les deux aspects, probabiliste et statistique, forment un tout cohérent dans l'étude des phénomènes aléatoires et les textes proposés mêlent souvent ces deux points de vue. Cependant, il n'est pas impossible de se voir proposer le choix entre deux textes où l'aspect statistique est plus marqué : il est donc nécessaire que les candidats fassent un effort de formation statistique. La part importante de la statistique dans l'enseignement des mathématiques justifie cet investissement. Ainsi, le jury se satisfait de ne plus voir les candidats bouder les textes à coloration statistique, contrairement à ce qui a pu être constaté lors des sessions précédentes.

En outre, la difficulté des textes étant progressive, une honnête maîtrise des fondamentaux du programme permet, sans virtuosité technique, d'aborder l'épreuve favorablement. Il n'est pas rare qu'un texte démarre avec des résultats classiques (par exemple, la loi des grands nombres ou le théorème central limite). Être à l'aise avec ces notions permet de démarrer l'exposé en confiance.

Le jury met en garde contre les exposés pratiquant une paraphrase sans plus-value mathématique. Il est bien plus judicieux de traiter un passage éventuellement limité mais de manière détaillée et en fournissant tous les arguments pertinents.

5.2.2 Contenu théorique en probabilités-statistique

Au vu de son expérience, le jury estime judicieux, pour se préparer adéquatement à l'épreuve, de réfléchir aux techniques et notions suivantes.

— **Méthodes classiques en probabilités** (calcul de la loi de $f(X)$ à partir de la loi de X, utilisation de la fonction caractéristique pour la convergence en loi, probabilités conditionnelles et formules des probabilités totales ou de l'espérance totale, calcul de $\mathbf{E}(f(X,Y))$ en fonction de la loi du couple (X,Y)). À titre d'exemple, le calcul de $\mathbf{P}(X = Y)$ lorsque X, Y sont indépendantes et que X n'a pas d'atome pose souvent problème.

— **Différents modes de convergence** (presque-sûre, dans L^p, en probabilité, en loi). Leurs définitions, caractérisations et implications sont des questions fréquemment posées. Un peu de familiarité avec leur manipulation pourra être utile (par exemple, si $X_n \to X$ et $Y_n \to Y$, a-t-on $f(X_n) \to f(X)$ ou $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$?).

— **La loi des grands nombres et le théorème central limite.** Ce sont des incontournables de l'épreuve et il faut en maîtriser les hypothèses et la conclusion. Il est utile de percevoir que le théorème central limite précise la vitesse de convergence dans la loi des grands nombres. D'un point de vue statistique, la loi des grands nombres met un estimateur en évidence et le théorème central limite permet de construire un intervalle de confiance (asymptotique). Rappelons que la loi faible des grands nombres a des hypothèses plus fortes et une conclusion plus faible que la loi forte. Elle n'a donc pas d'intérêt autre que pédagogique, en raison de la simplicité de sa preuve.

— **Intervalles de confiance.** Rappelons qu'un tel intervalle est aléatoire, fabriqué à partir des observations et que ses bornes ne doivent pas s'exprimer en fonction du paramètre à estimer. Notons aussi que le lemme de Slutsky s'avère utile pour remplacer des valeurs théoriques inconnues par des valeurs empiriques : il faut pouvoir expliquer ceci précisément.

— **Chaînes de Markov.** Énoncer les propriétés de Markov faible et forte pose souvent d'insurmontables difficultés. Il importe de reconnaître une construction récursive $X_{n+1} = f(X_n, \varepsilon_{n+1})$ d'une chaîne de Markov. La notion de mesure stationnaire doit pouvoir être interprétée de manière à la fois matricielle et probabiliste. La terminologie « état stable » parfois employée à la place de « mesure stationnaire » a donné lieu à des confusions (c'est une mesure et pas un état). Le sens des mots « irréductible », « récurrent », « apériodique » mérite d'être précisément connu.

— **Espérance conditionnelle.** Outre la définition précise, il est indispensable d'avoir déjà fait quelques calculs concrets d'espérance conditionnelle (par exemple, $\mathbf{E}(f(X,Y)|Y)$ lorsque X, Y sont indépendantes ou lorsque le couple (X,Y) admet une densité, ou encore $\mathbf{E}(X|X+Y)$ avec X, Y indépendantes et de même loi).

— **Martingales.** Ce concept ne doit pas être confondu avec celui de chaîne de Markov. Il s'agit d'un outil parfois utile pour prouver des convergences presque-sûres ou L^2.

— **Modèle linéaire.** Il s'agit essentiellement de comprendre que la minimisation d'une distance euclidienne est assurée par une projection orthogonale. Il est bon de savoir que la projection orthogonale sur F est simplement caractérisée par son action sur F et sur $F^\perp$.

— **Vecteurs gaussiens.** Par définition, une application affine conserve l'ensemble des vecteurs gaussiens, modifiant moyenne et covariance. Le théorème de Cochran, problématique pour de nombreux candidats, s'en déduit simplement car des projections orthogonales Π_V, Π_W sur des espaces orthogonaux vérifient $\Pi_V \Pi_V^T = \Pi_V$ et $\Pi_V \Pi_W = 0$.

— **Tests statistiques.** Le principe général est souvent mal connu. Rappelons qu'un test fixe deux hypothèses H_0, H_1 et un niveau α, qu'il majore la probabilité de rejeter H_0 sous H_0 par α et qu'il évalue aussi la puissance (probabilité d'accepter H_1 sous H_1). Les tests d'adéquation du

χ^2 et de Kolmogorov-Smirnov méritent d'être connus précisément.

À titre de satisfaction, le jury observe lors de cette session des progrès en ce qui concerne l'utilisation du lemme de Slutsky, la connaissance des lois usuelles et la construction d'intervalles de confiance.

5.2.3 Modélisation et mise en œuvre informatique

Le jury suggère aux candidats de réfléchir aux illustrations informatiques pertinentes en probabilités et statistiques. La présentation d'un test doit faire apparaître clairement la valeur de la statistique de test obtenue et le quantile de la loi pertinente. Si un intervalle de confiance I_n dépend de n observations, les candidats gagnent à présenter graphiquement l'évolution $n \mapsto I_n$. Illustrer le comportement asymptotique d'une suite de variables aléatoires demande d'avoir réfléchi aux différents modes de convergence. Une convergence presque-sûre se voit sur une trajectoire. Une convergence en loi demande de simuler un échantillon, de représenter l'histogramme ou la fonction de répartition empirique associés et de pouvoir expliquer pourquoi ces tracés empiriques sont proches de leurs pendants théoriques. De manière générale, lorsqu'un programme mêle une boucle et un aléa, il faut se demander si l'aléa doit être simulé avant la boucle ou bien à chaque étape de cette dernière.

S'il est parfaitement légitime d'utiliser les routines préprogrammées dans les logiciels disponibles, il pourra être pertinent d'avoir un peu réfléchi à leurs fonctionnements (calcul d'une fonction de répartition ou d'un quantile, simulation de lois usuelles, simulation de chaînes de Markov, calcul de mesures stationnaires).

Rappelons que de nombreux textes sont assortis d'un jeu de données numériques sur lequel les candidats sont invités à mettre en œuvre des illustrations. Le jury se réjouit de l'augmentation du nombre de candidats traitant effectivement ces données. Cela constitue une réelle plus-value pour l'exposé.

Enfin, s'il est bon que les choix de modélisation soient commentés, il ne s'agit pas de se livrer à une critique gratuite et systématique de toutes les hypothèses. Si une hypothèse semble restrictive, il sera judicieux d'expliquer en quoi elle simplifie les calculs. Si une généralisation est suggérée, il pourra être intéressant de signaler les complications techniques qu'elle entraînerait. Le jury valorise les efforts faits pour interpréter la signification pour le modèle des résultats mathématiques obtenus.

5.3 Option B : Calcul scientifique

5.3.1 Commentaires généraux

Si les modalités et les attentes de cette épreuve semblent connues par une majorité des candidats admissibles, beaucoup ne maîtrisent tout simplement pas les notions de base du programme général intervenant dans les textes. Afin d'aborder sereinement les textes proposés dans l'option B, le jury rappelle qu'un minimum d'aisance est requis avec les notions suivantes :

- Connaître le théorème de Cauchy-Lipschitz et être en mesure de l'appliquer pour des systèmes différentiels simples en citant correctement toutes les hypothèses nécessaires à son utilisation.
- Construire, analyser et mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite.
- Connaître les principes des méthodes directes de résolution de systèmes linéaires (pivot de Gauss, LU), la notion de conditionnement, la recherche d'éléments propres de matrices, analyser et mettre en œuvre la méthode de la puissance.
- Analyser et mettre en œuvre la méthode de Newton (cas vectoriel).
- Construire la matrice correspondant à la discrétisation par différences finies de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ et connaître ses propriétés.
- Être capable d'énoncer et appliquer le théorème des extrêma liés (typiquement pour des problèmes de minimisation de fonctionnelles convexes sur $\mathbf{R}^N$ avec contraintes linéaires), analyser et mettre en œuvre un algorithme du gradient.

— Maîtriser les outils d'analyse de Fourier.
— Connaître les méthodes de quadratures classiques.

Le jury souligne que les textes exploitent ces notions dans leurs versions les plus élémentaires et ne requièrent aucun raffinement technique.

5.3.2 Recommandations spécifiques

Le jury émet les recommandations plus spécifiques suivantes :

— **Quadratures numériques.** L'erreur commise par la méthode des rectangles doit être connue et une preuve élémentaire est exigible des candidats.

— **Analyse des équations différentielles ordinaires et calcul différentiel.** La dérivation de fonctions de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$ ne devrait pas poser de difficulté au niveau de l'agrégation. Les formules de développements de Taylor contiennent généralement un terme de reste, dont l'analyse est un point souvent crucial. Les candidats devraient faire preuve d'automatismes à la vue de la moindre équation différentielle ordinaire. Par exemple, un texte indiquant « la solution de l'équation différentielle [...] est définie pour tout temps et reste positive » doit amener à :

1. Énoncer de façon précise le théorème de Cauchy-Lipschitz le plus adapté au problème (version linéaire si le problème est linéaire, version globale quand elle s'applique, ...).
2. Expliquer comment il s'applique dans le contexte présent (détailler explicitement la fonction $(t, X) \in [0, T] \times \mathbf{R}^n \mapsto f(t, X) \in \mathbf{R}^n$ qui permet de mettre le problème sous la forme $X'(t) = f(t, X(t))$, distinguer la variable vectorielle X et la fonction $X : t \mapsto X(t)$ sont malheureusement des obstacles majeurs pour une grande proportion des candidats).
3. En déduire la positivité de la solution et le caractère non borné du temps d'existence. Trop de candidats sont pris en défaut sur la notion de solution maximale.

— **Schémas numériques pour les équations différentielles.** Le jury considère la description des schémas d'Euler comme un élément central du programme de l'option. Les candidats doivent être capables de présenter clairement les principes guidant l'écriture de ces schémas et l'analyse de leurs propriétés de convergence, ainsi que les avantages et inconvénients des méthodes explicites et implicites. Trop rares sont les candidats capables de formaliser correctement une définition de la convergence d'un schéma numérique, qui est trop souvent confondue avec la consistance du schéma. La confusion récurrente entre l'approximation X_n et l'évaluation $X(t_n)$ de la solution exacte au temps t_n, l'incapacité à relier le nombre de points de discrétisation et le pas Δt, témoignent d'une compréhension déficiente du sujet. La mise en œuvre de ces méthodes peut être l'occasion de discuter des difficultés potentielles liées à la stabilité et aux contraintes portant sur le pas de temps.

— **Équations aux dérivées partielles.** Le jury précise que les textes qui évoquent des problèmes d'équations aux dérivées partielles peuvent être abordés avec des outils rudimentaires et ne nécessitent *a priori* aucune connaissance sur la théorie des distributions, bien que ces notions aient intégré le programme commun, ni ne réclament de dextérité particulière d'analyse fonctionnelle. Il est néanmoins important de savoir faire la différence entre un problème aux limites et un problème de Cauchy, et d'utiliser la discrétisation adaptée au type de problème considéré. Le jury a été quelque peu surpris que des candidats à cette épreuve découvrent la matrice associée à la discrétisation de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ par différences finies le jour de l'oral.

— **Algèbre linéaire.** Des lacunes profondes et inquiétantes sont trop régulièrement relevées. Au grand étonnement du jury, de nombreux candidats ne font pas le lien entre matrices symétriques et formes quadratiques. Les raisonnements liés à la réduction des matrices sont trop souvent extrêmement laborieux et les méthodes pratiques de calcul (résolution de systèmes, déterminant, inverse d'une matrice, ...) méconnues. La notion de conditionnement est bien souvent trop imprécise et les liens entre rayon spectral et normes matricielles sont mal maîtrisés.

— **Optimisation.** Les théorèmes d'existence d'optima sont mal connus. On s'attend à ce que les candidats soient capable de préciser les hypothèses requises pour :
  1. obtenir l'existence d'un optimum,
  2. obtenir l'unicité,
  3. caractériser le minimum (sans contrainte ou avec contraintes d'égalité).

— **Analyse de Fourier.** Le jury s'étonne que de nombreux candidats aient du mal à préciser les hypothèses de régularité assurant la convergence de la série de Fourier. Le lien entre la régularité de la fonction et le comportement asymptotique de ses coefficients de Fourier doit être connu.

5.3.3 Modélisation et mise en œuvre informatique

Le jury de l'option B rappelle qu'une illustration réalisée avec les routines de base des logiciels fournis est tout à fait satisfaisante si elle est clairement présentée, motivée et discutée. Si `Scilab` ou `Python` sont certainement les logiciels les mieux adaptés, le jury relève qu'un certain nombre de candidats a pu fournir des résultats convaincants avec un logiciel comme `Octave`, `XCas` ou `Sage`. Le jury insiste sur le fait qu'il est important de commenter les résultats informatiques (courbes, solutions, erreurs, ...) obtenus et de les relier au problème de modélisation traité par le texte ou à des résultats mathématiques sous-jacents.

5.4 Option C : Algèbre et Calcul formel

5.4.1 Commentaires généraux

La ligne directrice de l'option C est dans un premier temps la recherche de l'*effectivité*, puis de l'*efficacité* (souvent en temps, parfois en espace) du calcul algébrique. Cela va des aspects les plus élémentaires (algèbre linéaire, groupes, calcul avec les entiers, les polynômes, les entiers modulo) aux aspects plus avancés (élimination, géométrie effective, codes correcteurs d'erreur). La quasi-totalité des textes proposés dans le cadre de l'option rentrent totalement dans une ou plusieurs de ces grandes problématiques.

Cette « grille de lecture » peut accompagner les candidats, les aider à construire leur exposé et, dans l'idéal, les amener à expliquer non seulement *ce que* le texte fait, mais aussi *pourquoi* il le fait. La capacité à percevoir ces problématiques fait la différence entre bonnes et excellentes prestations, et peut aussi expliquer les notes honorables de certains candidats dont le niveau mathématique était pourtant limité.

5.4.2 Calcul algébrique effectif

Lorsqu'un énoncé du texte affirme l'existence d'un objet (scalaire, vecteur, matrice, élément d'un groupe, entier, polynôme, ...), le jury apprécierait que les candidats mènent la réflexion suivante :

— peut-on calculer cet objet ?
— si oui, par quelle(s) méthode(s) ?
— ces méthodes sont-elles efficaces ? quel est leur coût ?

Les candidats ayant le réflexe de se saisir, spontanément, d'une question de complexité, sont encore très rares. Pourtant cette démarche est perçue très positivement par le jury. Pour prendre un exemple, quand le texte parle de cryptographie, comparer le coût du système proposé et le coût d'une attaque, même naïve, est une initiative intéressante et actuellement quasi–inexistante. Une telle étude est beaucoup plus à sa place qu'un exposé détaillé de RSA plaqué sur un texte qui n'en parle pas – la mention rapide de RSA dans un texte introduisant un système de chiffrement pour comparer des complexités restant bien sûr pertinente. Plus largement, une réflexion minimale sur les ordres de grandeur (est-ce qu'un calcul faisable représente $10^1, 10^{10}, 10^{100}, 10^{1000}$ opérations élémentaires ?) permettrait souvent de mieux situer les problèmes soulevés par un texte, ou de proposer des valeurs de paramètres réalistes quand ce sujet n'est pas évoqué par le texte.

5.4.3 Modélisation et mise en œuvre informatique

Le jury constate avec satisfaction une progression de la moyenne des candidats dans l'utilisation de l'outil informatique et regrette parfois que des candidats ayant préparé un travail d'illustration raisonnable, ne le mettent pas plus en valeur durant l'exposé.

Rappelons cependant que les candidats doivent être capables de justifier la pertinence de leur programme ou de leurs calculs dans le cadre du texte. Reprendre un morceau de code d'un livre est une démarche tout-à-fait acceptable à condition que les candidats comprennent exactement ce que fait le code et que cela fasse sens dans le cadre du texte.

Pour finir, le jury est parfois surpris de voir des candidats développer de longs et fastidieux calculs au tableau alors que l'utilisation de l'outil informatique leur aurait permis de gagner en temps et en clarté.

5.4.4 Aspects mathématiques

Sur les aspects mathématiques et la maîtrise des éléments du programme, les principales observations du jury sont les suivantes :

— Par rapport aux années précédentes, le jury se réjouit d'observer une amélioration en ce qui concerne l'algèbre linéaire effective. Les applications de la méthode du pivot de Gauss sont un peu mieux maîtrisées par les candidats. De plus, la complexité de cet algorithme est maintenant fréquemment connue des candidats même si l'origine de ce $O(n^3)$ donne parfois encore lieu à des explications pour le moins obscures.

— Le jury constate également une progression dans les connaissances théoriques des candidats sur les corps finis. Malgré cela, le calcul effectif dans ces corps n'est pas toujours maîtrisé.

— *A contrario*, la connaissance du résultant semble avoir régressé par rapport aux sessions précédentes. Si les candidats interrogés sur le sujet sont en général capables d'en donner une définition, ses propriétés élémentaires et surtout son utilisation pour éliminer des variables dans un système d'équations polynomiales semble très floue pour de nombreux candidats. Beaucoup de candidats le voient comme un critère d'existence d'un facteur commun et ne pensent plus (surtout dans le cas des polynômes à une variable) au PGCD qui est un objet bien plus simple à appréhender.

— Le jury observe que de nombreux candidats n'ont aucune connaissance sur les codes correcteurs d'erreurs. Un bon nombre d'entre eux font d'ailleurs la confusion entre codes correcteurs d'erreurs et cryptographie. Rappelons que les codes correcteurs sont une partie limitée du programme, et que très peu de connaissances sont exigibles (et exigées). Toutefois, il est nécessaire de s'y être confronté pour se familiariser avec les problématiques sous-jacentes, à savoir, typiquement qu'un bon code correcteur se décrit de façon compacte (et est donc en général linéaire), a une grande dimension et grande distance minimale (par rapport à sa longueur) et, aussi et surtout un algorithme de décodage efficace – rappelons que ce second point n'est pas vrai d'un code linéaire « quelconque ». Il faut avoir déjà un peu étudié le sujet pour comprendre les questions soulevées par presque tout texte sur les codes. Signalons enfin que la méconnaissance des corps finis est souvent rédhibitoire pour ce sujet.

— Si l'algorithme d'Euclide est bien connu des candidats, la plupart d'entre eux ne savent obtenir des relations de Bézout qu'en effectuant l'algorithme d'Euclide classique puis en procédant à une laborieuse « remontée ». Rappelons que l'algorithme d'Euclide **étendu** est explicitement au programme de l'option.

— Les attentes du jury en termes de complexité sont limitées mais il est attendu des candidats qu'ils sachent estimer le coût de certaines procédures classiques au programme : opérations sur les entiers et dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, sur les polynômes (multiplication, division euclidienne, évaluation, interpolation), pivot de Gauss, algorithme d'Euclide, ...

5.5 Option D : Modélisation et Analyse de Systèmes Informatiques

5.5.1 Commentaires généraux

Le jury apprécie le travail accompli pour la préparation de cette épreuve par les meilleurs candidats. Les candidats sont interrogés dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation sont largement semblables, sauf en ce qui concerne l'exercice de programmation.

Dans la suite, nous procéderons en deux temps : nous évoquerons d'abord la vision que le jury a du déroulement de l'épreuve, avant de revenir sur les travers les plus fréquents. Chacune de ces deux parties évoquera les différents temps de l'épreuve : exposé, exercice de programmation, questions.

5.5.2 Attentes du jury

Les textes présentent généralement une problématique concrète, informatique ou de la vie de tous les jours, avant d'en proposer une formalisation plus ou moins complète et une analyse informatique plus ou moins détaillée. Ils sont souvent plutôt de nature descriptive et volontairement allusifs.

Exposé du candidat

Motivation. C'est aux candidats d'introduire le sujet du texte et de motiver la présentation qui va suivre – et cela n'arrive, hélas, que très rarement. Cette motivation est le plus souvent l'évocation de situations concrètes dans lesquelles on a besoin d'outils informatiques spécifiques. Ces situations peuvent être proposées par le texte lui-même, mais elles peuvent aussi être tirées de l'expérience personnelle des candidats. Toute contribution personnelle à ce niveau est toujours très appréciée !

Présentation du texte. Il est attendu des candidats une restitution argumentée d'une partie cohérente du texte, ainsi qu'un effort de formalisation sur les parties descriptives et allusives du texte. Il est bon d'essayer de donner une ou des preuves complètes d'énoncés du texte, ou de compléter les arguments parfois lapidaires fournis par ce dernier. Les énoncés considérés comme vraiment trop difficiles pour être prouvés dans le cadre d'une préparation en temps limité en partant des connaissances du programme sont systématiquement pointés comme devant être admis.
Il est attendu des candidats qu'ils soient fidèles à l'esprit du texte. Il ne s'agit pas de traiter l'intégralité des points du texte, mais que le traitement choisi soit cohérent : les candidats doivent par exemple pouvoir expliquer pourquoi ils ont choisi de développer certains points, et pas certains autres.

Exercice de programmation informatique

Nature de l'exercice. L'exercice de programmation proposé est en règle générale très simple et peut presque toujours être traité en une vingtaine de lignes. Il est décrit par une spécification claire (entrée / sortie / hypothèses éventuelles sur les données) qui doit impérativement être respectée [1].
La simplicité de l'exercice vient du fait que le jury souhaite avant tout tester une capacité (et non une virtuosité) à organiser un programme simple, clair, et pédagogique : le programme doit pouvoir être présenté et les choix (structures de données, style impératif vs fonctionnel, types), argumentés.

1. à une réserve près sur liste/tableau évoquée *infra*

Le jury n'accorde pas une importance excessive aux considérations d'élégance ou d'efficacité tant que ce qui est proposé reste dans les limites du raisonnable.

Exposé de l'exercice. L'exercice de programmation doit être présenté au jury, ce qui implique un commentaire pertinent en parallèle de la projection du code, qui aide à la compréhension toujours difficile dans un temps court d'un programme écrit par un autre.
La présentation au jury doit être faite, que le programme fonctionne — ce que l'on espère ! — ou pas. C'est seulement dans un deuxième temps que les candidats lancent une exécution. Dans tous les cas, le jury évalue la qualité générale du code réalisé. Cette évaluation interactive permet aux candidats réactifs de repérer une erreur, voire de la corriger, de recompiler et de relancer l'exécution.
La dimension « présentation » de l'exercice de programmation est difficile et ne peut pas être découverte le jour de l'oral. S'interroger sur cette dimension lors de sa préparation – par exemple, en s'imaginant face à une classe – peut permettre de ne pas être pris au dépourvu.

Remarques sur le style de programmation. Si l'adoption d'un style de programmation plus élégant (par exemple, définition de types spécifiques ou de fonctions auxiliaires) peut augmenter un peu la vingtaine de lignes de code évoquée plus haut, il est à la fois peu raisonnable en matière de temps consacré à l'exercice, mais aussi de commodité pour le jury lors de l'évaluation, que l'ensemble du code ne puisse pas tenir sur un écran.
Les commentaires sont appréciés par le jury quand ils apportent un plus : spécification, pré ou post-conditions, invariants, complexité ; ils doivent rester en quantité raisonnable, ne pas empêcher la continuité et la lisibilité du code et ne pas être une simple paraphrase du code lui-même.
Enfin affirmons à nouveau que tous les exercices sont construits de manière à pouvoir être traités confortablement dans le cadre de tous les langages du programme. Par ailleurs, à compter de la session 2017, quand la spécification évoque un « tableau » (ou une « liste »), cela signifie toujours que les candidats peuvent choisir entre ces deux structures de données, mais doivent savoir argumenter leur choix – au minimum en expliquant que le langage ou le style de programmation choisi s'accommode mieux de l'un ou de l'autre.
On renvoie au rapport 2015 pour des commentaires plus détaillés, qui restent d'actualité, sur le style de programmation.

Tests. Les candidats doivent toujours proposer plusieurs jeux de test, dont si possible un qui ne soit pas totalement « jouet ». Les textes n'en proposant souvent au mieux qu'un, il faut donc prévoir un temps de réflexion sur ce point.

Questions du jury

Sur l'exercice de programmation. Le jury revient toujours, en général pour commencer la séance de questions, sur l'exercice de programmation, de manière plus ou moins approfondie. Il demande au moins aux candidats
- d'argumenter leurs choix s'ils ne l'ont pas fait au préalable,
- d'indiquer les bibliothèques et les fonctions avancées utilisées et d'expliquer leur comportement (voire de demander comment les candidats auraient pu faire sans) – et éventuellement, leur complexité en temps et en espace (cette dernière étant souvent mal comprise / connue). Cela est particulièrement vrai des nombreuses constructions avancées de Python.
- de préciser les hypothèses implicites faites sur les données.
- éventuellement, d'expliquer les messages d'erreurs observés à la compilation / l'interprétation / l'exécution.

Sur l'exposé des candidats. Ensuite le jury revient sur la partie du texte présentée par les candidats. L'interrogation s'adapte toujours au niveau des candidats. Les questions du jury portent au moins autant sur la démarche globale de modélisation et la compréhension des différentes approches du texte que sur l'étude technique des diverses propositions.

Il pose des questions destinées à affiner sa perception de la compréhension du texte par les candidats, à comprendre leur capacité à formaliser une question ou expliciter une preuve s'ils ne l'ont pas montrée d'eux-même, ou encore à tester leur regard critique sur le texte.
Enfin, il est fréquent que des questions d'informatique fondamentale soient posées en rapport avec le texte, pour percevoir la capacité à faire le lien entre connaissances théoriques et informatique souvent plus concrète ; les questions de calculabilité et complexité (tant analyse de complexité d'un algorithme que preuve de NP-complétude d'un problème, avec l'aide du jury), ou encore les questions d'algorithmique, sont en particulier naturelles et fréquentes.

5.5.3 Quelques travers fréquents

Exposé

Le jury renvoie largement au commentaire commun aux quatre options sur cette partie : la paraphrase du texte, même agréablement conduite, est à proscrire, le jury cherchant à mesurer principalement l'apport des candidats par rapport au document que ces derniers ont reçu.

Le principal défaut observé est l'absence de formalisation ou de preuve dans le texte – qui conduit souvent à la paraphrase évoquée ci-dessus.

S'agissant des démonstrations, si une part de raisonnement informel, heuristique ou argumentatif, peut être admise, il est *indispensable* que les candidats précisent qu'ils vont utiliser des arguments de cette nature (par opposition à une preuve) et qu'ils aient, avant cela, montré leur capacité à effectuer des preuves complètes, rigoureuses, et soignées sur des énoncés non triviaux. Plus largement, annoncer comme « évidente », une assertion ne dispense pas de savoir donner un argument à la demande du jury ; des arguments élémentaires d'injectivité ou de cardinalité sont ainsi fréquemment mal identifiés par les candidats.

Exercice de programmation

Commençons par un commentaire positif : l'exercice de programmation est bien accepté, et bien traité par la quasi-totalité des candidats. Une écrasante majorité des programmes fonctionne et fait, de manière plus ou moins efficace ou élégante, ce qui est demandé, mais le jury regrette quelques lectures trop rapides de la spécification conduisant à des hors-sujet.
Observons néanmoins qu'il reste une marge de progression significative sur la présentation orale de l'exercice de programmation.

Programme. Le jury a souvent le sentiment que cet exercice est un peu surinvesti par les très bons candidats au regard des attentes. Certains candidats proposent souvent beaucoup plus que ce qui est demandé, au détriment des aspects formalisation évoqués précédemment. Il est généralement peu intéressant, par exemple, de proposer des optimisations simples (par exemple, remarquer qu'un graphe est non orienté et ne parcourir qu'une fois les arêtes au lieu de deux) qui peuvent être brièvement décrites à l'oral.
Pour le reste, les compléments proposés devraient s'efforcer de constituer une illustration d'un ou de plusieurs points du texte à l'instar de ce qui se pratique dans les autres options ; illustration d'un algorithme proposé par le texte, étude d'un exemple, expérimentations, étude statistique, mesure de temps ou de complexité en moyenne, ... De telles illustrations sont toujours très appréciées par le jury. Dans ce cadre, l'ensemble des outils informatiques présents sur l'ordinateur peut être utilisé. On peut même imaginer, pour aller loin dans cette direction, une présentation très expérimentale du texte mettant en lumière les problèmes qu'il évoque et exposant, sur un ou plusieurs exemples, les solutions proposées, leurs forces et leurs faiblesses. C'est un parti-pris différent de celui de la formalisation mais qui pourrait également donner d'excellents exposés.

Pointons par exemple qu'il est frappant de parler de flottants pendant 40 minutes sans même montrer ce qui se passe sur des exemples sur l'ordinateur…
D'autre part, les candidats ne prennent que rarement le temps de réflexion, court mais indispensable, pour réfléchir aux aspects algorithmiques (même s'ils sont toujours élémentaires), structurer leur code et définir structures de données et type. C'est pourtant nécessaire pour un code clair et pour une présentation bien construite du programme.

Présentation de l'exercice de programmation. Il est dommage que peu de candidats réflechissent à la manière de présenter leur programme. Une paraphrase du code (« ici j'ai fait `type chose = int`, ici j'ai fait une boucle ») n'a que peu d'intérêt.

Remarque ponctuelle. La majorité des candidats utilise `CAML`, la minorité restante se partageant essentiellement entre `C` et `Python`. Plusieurs candidats ont été désarçonnés par des avertissements de l'interprète `CAML` indiquant qu'une expression devrait être de type `unit` alors qu'elle ne l'est pas ; les candidats devraient pourtant comprendre (et savoir expliquer) que c'est le prix de l'utilisation de traits impératifs dans un langage fonctionnel fortement typé.

Connaissances en informatique

Elles sont très inégales suivant les candidats. La partie "discussion avec le jury" de l'épreuve n'appelle pas de commentaires extrêmement détaillés. Le jury constate et apprécie que beaucoup de candidats ont des notions sérieuses sur des sujets plus « concrets » que le programme — architecture, compilation, aspects système,... et savent motiver ou éclairer les problématiques des textes à la lumière de ces connaissances.

La seule tendance générale observée en 2016 sur les connaissances est une fragilité sur les preuves de complexité par réduction – le sens dans lequel la réduction se fait étant souvent mal maîtrisé par les candidats – y compris certains très bons.

Annexe A

Liste des leçons d’oral qui seront proposées en 2017

A.1 Leçons Algèbre et Géométrie 2017

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

102 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

103 Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Exemples.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

110 Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de Fourier discrète. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

122 Anneaux principaux. Applications.

123 Corps finis. Applications.

125 Extensions de corps. Exemples et applications.

126 Exemples d'équations diophantiennes.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

142 Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

161 Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

183 Utilisation des groupes en géométrie.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

A.2 Leçons Analyse-Probabilités 2017

201 Espaces de fonctions ; exemples et applications.

202 Exemples de parties denses et applications.

203 Utilisation de la notion de compacité.

204 Connexité. Exemples et applications.

205 Espaces complets. Exemples et applications.

207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

209 Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

218 Applications des formules de Taylor.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

233 Méthodes itératives en analyse numérique matricielle.

234 Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

250 Transformation de Fourier. Applications.

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

261 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

262 Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

263 Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

A.3 Leçons de mathématiques pour l'informatique (option D)

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

123 Corps finis. Applications.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

183 Utilisation des groupes en géométrie.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

203 Utilisation de la notion de compacité.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

218 Applications des formules de Taylor.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

233 Méthodes itératives en analyse numérique matricielle.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

250 Transformation de Fourier. Applications.

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

A.4 Leçons Informatique 2017

901 Structures de données. Exemples et applications.

902 Diviser pour régner. Exemples et applications.

903 Exemples d'algorithmes de tri. Correction et complexité.

906 Programmation dynamique. Exemples et applications.

907 Algorithmique du texte. Exemples et applications.

909 Langages rationnels et automates finis. Exemples et applications.

912 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.

913 Machines de Turing. Applications.

914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

915 Classes de complexité. Exemples.

916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre. Exemples.

919 Unification : algorithmes et applications.

920 Réécriture et formes normales. Exemples.

921 Algorithmes de recherche et structures de données associées.

923 Analyses lexicale et syntaxique. Applications.

924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

925 Graphes : représentations et algorithmes.

926 Analyse des algorithmes, complexité. Exemples.

927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

928 Problèmes NP-complets : exemples et réduction

A.5 Sélection de leçons de mathématiques pour le concours spécial docteurs 2017

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Exemples.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

110 Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de FOURIER discrète. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

123 Corps finis. Applications.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

183 Utilisation des groupes en géométrie.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

203 Utilisation de la notion de compacité.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

213 Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications..

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

233 Méthodes itératives en analyse numérique matricielle.

234 Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

250 Transformation de Fourier. Applications.

261 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

262 Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.