

Un théorème de Poincaré

Jean Etienne ROMBALDI

3 janvier 2006

1

Un théorème de Poincaré

On désigne par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, non identiquement nulle à partir d'un certain rang, qui vérifie la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+2} = a_n u_{n+1} + b_n u_n, \quad (1.1)$$

où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes de nombres complexes avec :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b. \quad (1.2)$$

On désigne par P le polynôme :

$$P(X) = X^2 - aX - b$$

et on suppose qu'il admet deux racines complexes λ et μ telles que $|\lambda| > |\mu|$.

On se propose, dans cette note, de montrer le résultat suivant.

Théorème 1.1 (Poincaré) *Avec les notations et hypothèses qui précèdent, on a $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l'une des racines de P .*

On note, pour tout entier naturel n :

$$a_n = a + \alpha_n, \quad b_n = b + \beta_n,$$

où $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de nombres complexes convergentes vers 0.

Du fait que $\lambda \neq \mu$, la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

est inversible et on peut définir les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} p_n + q_n = u_n, \\ \lambda p_n + \mu q_n = u_{n+1}. \end{cases} \quad (1.3)$$

En notant :

$$X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}, \quad Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix},$$

on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad AX_n = Y_n.$$

Lemme 1.1 *Il existe une suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices carrées complexes d'ordre 2 telles que :*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & X_{n+1} = D_n X_n, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Démonstration. En définissant la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices carrées complexes d'ordre 2 par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_n & a_n \end{pmatrix},$$

la relation de récurrence (1.1) se traduit par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = R_n Y_n$$

et pour tout entier naturel n , on a :

$$X_{n+1} = A^{-1} Y_{n+1} = A^{-1} R_n A X_n = D_n X_n.$$

Avec (1.2) et la continuité du produit matriciel, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = D$, avec :

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{\mu - \lambda} \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -b + (\mu - a)\lambda & -b + (\mu - a)\mu \\ b + (-\lambda + a)\lambda & b + (-\lambda + a)\mu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En tenant compte de $\lambda + \mu = a$ et $\lambda\mu = -b$, on obtient $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. ■

On note, pour tout entier naturel n :

$$D_n = \begin{pmatrix} \lambda + \varepsilon_n & \varphi_n \\ \gamma_n & \mu + \delta_n \end{pmatrix},$$

où $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites de nombres complexes convergentes vers 0.

Pour tout réel $\delta \in \left] 0, \frac{|\lambda| - |\mu|}{2} \right[$, on a :

$$0 < \frac{|\mu| + \delta}{|\lambda| - \delta} < 1 \tag{1.4}$$

et il existe un entier n_δ tel que :

$$\forall n \geq n_\delta, \quad |\varepsilon_n| < \frac{\delta}{3}, \quad |\varphi_n| < \frac{\delta}{3}, \quad |\gamma_n| < \frac{\delta}{3}, \quad |\delta_n| < \frac{\delta}{3}. \tag{1.5}$$

Lemme 1.2 *Si, avec les notations qui précèdent, il existe un entier $n \geq n_\delta$ tel que $|q_n| < |p_n|$, alors $|q_{n+k}| < |p_{n+k}|$ pour tout entier naturel k .*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour $k = 1$. On conclut ensuite par récurrence sur $k \geq 1$.

On a :

$$p_{n+1} = (\lambda + \varepsilon_n) p_n + \varphi_n q_n$$

et avec (1.5) :

$$|p_{n+1}| \geq |\lambda| |p_n| - \frac{\delta}{3} (|p_n| + |q_n|),$$

ce qui compte tenu de $|q_n| < |p_n|$ donne :

$$|p_{n+1}| \geq |\lambda| |p_n| - \frac{2\delta}{3} |p_n| > (|\lambda| - \delta) |p_n|$$

(on a $|\lambda| - \delta > 0$).

Avec :

$$q_{n+1} = \gamma_n p_n + (\mu + \delta_n) q_n$$

et (1.5), on obtient :

$$|q_{n+1}| \leq |\mu| |q_n| + \frac{\delta}{3} (|p_n| + |q_n|) < (|\mu| + \delta) |p_n|$$

et donc :

$$|q_{n+1}| < (|\mu| + \delta) \frac{|p_{n+1}|}{|\lambda| - \delta} < |p_{n+1}|$$

d'après (1.4). ■

Du lemme précédent, on déduit que si δ est fixé dans $\left] 0, \frac{|\lambda| - |\mu|}{2} \right[$, on a alors deux cas de figure possibles :

- soit $|q_n| \geq |p_n|$ pour tout $n \geq n_\delta$;
- soit il existe $m_\delta \geq n_\delta$ tel que $|q_n| < |p_n|$ pour tout $n \geq m_\delta$.

On suppose dans un premier temps qu'on est dans le premier cas de figure.

Si il existe $n \geq n_\delta$ tel que $q_n = 0$, alors $p_n = 0$ et avec (1.3), $u_n = u_{n+1} = 0$ ce qui entraîne $u_{n+k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, en contradiction avec l'hypothèse u_n non nul pour une infinité de valeurs de n .

On a donc $q_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_\delta$.

Théorème 1.2 *Dans le premier cas de figure, on a :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n} = 0,$$

u_n est non nul à partir d'un certain rang et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \mu.$$

Démonstration. On désigne par L la limite supérieure de la suite $\left(\left| \frac{p_n}{q_n} \right| \right)_{n \geq n_\delta}$, soit en

notant $v_n = \sup_{k \geq n} \left| \frac{p_k}{q_k} \right|$, pour tout $n \geq n_\delta$:

$$L = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \geq n_\delta}} v_n = \inf_{n \geq n_\delta} v_n.$$

Si $L > 0$, pour tout réel $\varepsilon \in]0, \delta[$ tel que $L - \varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $n_\varepsilon \geq n_\delta$ tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad \begin{cases} L \leq v_n < L + \varepsilon, \\ |\varepsilon_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\varphi_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\delta_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \end{cases}$$

Pour $n \geq n_\varepsilon$, on a alors :

$$\begin{cases} |p_{n+1}| \geq |\lambda| |p_n| - \frac{\varepsilon}{3} (|p_n| + |q_n|) > |\lambda| |p_n| - \varepsilon |q_n|, \\ |q_{n+1}| \leq |\mu| |q_n| + \frac{\varepsilon}{3} (|p_n| + |q_n|) < (|\mu| + \varepsilon) |q_n| \end{cases}$$

et :

$$\frac{|p_{n+1}|}{|q_{n+1}|} \geq \frac{|\lambda| |p_n| - \varepsilon |q_n|}{(|\mu| + \varepsilon) |q_n|} = \frac{|\lambda| \frac{|p_n|}{|q_n|} - \varepsilon}{|\mu| + \varepsilon}.$$

Avec $v_n = \sup_{k \geq n} \left| \frac{p_k}{q_k} \right| < L + \varepsilon$, on déduit alors que :

$$\frac{|\lambda| \frac{|p_n|}{|q_n|} - \varepsilon}{|\mu| + \varepsilon} < L + \varepsilon,$$

ou encore :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad \frac{|p_n|}{|q_n|} < \frac{(L + \varepsilon)(|\mu| + \varepsilon) + \varepsilon}{|\lambda|}.$$

Mais par définition de la borne supérieure, pour tout $n \geq n_\varepsilon$, on peut trouver un entier $k \geq n$ tel que :

$$L - \varepsilon < \frac{|p_k|}{|q_k|}$$

et l'inégalité précédente entraîne alors :

$$L - \varepsilon < \frac{(L + \varepsilon)(|\mu| + \varepsilon) + \varepsilon}{|\lambda|},$$

le réel ε étant arbitrairement petit. En faisant tendre ε vers 0, on aboutit alors à $L \leq \frac{L|\mu|}{|\lambda|}$, soit $|\lambda| \leq |\mu|$ en contradiction avec $|\lambda| > |\mu|$.

On a donc $L = 0$ et avec $0 \leq \liminf \left| \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \limsup \left| \frac{p_n}{q_n} \right| = 0$, on déduit que la suite

$\left(\left| \frac{p_n}{q_n} \right| \right)_{n \geq n_\delta}$ converge vers 0.

Des relations :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad \begin{cases} \frac{u_n}{q_n} = \frac{p_n}{q_n} + 1, \\ \frac{u_{n+1}}{q_n} = \lambda \frac{p_n}{q_n} + \mu, \end{cases}$$

on déduit alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{q_n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{q_n} = \mu$, donc u_n est non nul à partir d'un certain rang et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \mu$. ■

On s'intéresse maintenant au deuxième cas de figure. Dans ce cas, on a $p_n \neq 0$ pour tout $n \geq m_\delta$.

Théorème 1.3 *Dans le deuxième cas de figure, on a :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_n}{p_n} = 0,$$

u_n est non nul à partir d'un certain rang et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda.$$

Démonstration. On désigne par L la limite supérieure de la suite $\left(\left|\frac{q_n}{p_n}\right|\right)_{n \geq m_\delta}$.

Si $L > 0$, pour tout réel $\varepsilon \in]0, \delta[$ tel que $L - \varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $n_\varepsilon \geq m_\delta$ tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad \begin{cases} L \leq \sup_{k \geq n} \left| \frac{q_k}{p_k} \right| < L + \varepsilon, \\ |\varepsilon_n| < \frac{\varepsilon}{3}, |\varphi_n| < \frac{\varepsilon}{3}, |\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{3}, |\delta_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \end{cases}$$

Pour $n \geq n_\varepsilon$, on a alors :

$$\begin{cases} |p_{n+1}| \geq (|\lambda| - \varepsilon) |p_n|, \\ |q_{n+1}| \leq |\mu| |q_n| + \varepsilon |p_n| \end{cases}$$

et :

$$\frac{|q_{n+1}|}{|p_{n+1}|} \leq \frac{|\mu| |q_n| + \varepsilon |p_n|}{(|\lambda| - \varepsilon) |p_n|} = \frac{|\mu| \frac{|q_n|}{|p_n|} + \varepsilon}{|\lambda| - \varepsilon}$$

(pour $0 < \varepsilon < \delta$, on a $|\lambda| - \varepsilon > |\lambda| - \delta > |\mu| + \delta > 0$).

Par définition de la borne supérieure, on peut trouver un entier $k \geq n_\varepsilon$ tel que :

$$L - \varepsilon < \frac{|q_{k+1}|}{|p_{k+1}|}$$

et pour un tel k , on a :

$$L - \varepsilon < \frac{|\mu| \frac{|q_k|}{|p_k|} + \varepsilon}{|\lambda| - \varepsilon} < \frac{|\mu| (L + \varepsilon) + \varepsilon}{|\lambda| - \varepsilon},$$

le réel ε étant arbitrairement petit. En faisant tendre ε vers 0, on aboutit alors à $L \leq \frac{L|\mu|}{|\lambda|}$, soit $|\lambda| \leq |\mu|$ en contradiction avec $|\lambda| > |\mu|$.

On a donc $L = 0$ et la suite $\left(\left|\frac{q_n}{p_n}\right|\right)_{n \geq m_\delta}$ converge vers 0.

Des relations :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad \begin{cases} \frac{u_n}{p_n} = 1 + \frac{q_n}{p_n}, \\ \frac{u_{n+1}}{p_n} = \lambda + \mu \frac{q_n}{p_n}, \end{cases}$$

on déduit alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{p_n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{p_n} = \lambda$, donc u_n est non nul à partir d'un certain rang et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$. ■

Le théorème de Poincaré est donc démontré.

Corollaire 1.1 *Si, avec les notations et hypothèses du théorème de Poincaré, les deux racines du polynôme P sont non nulles et de module distinct de 1, alors :*

$$|u_n| = |\rho|^{n+o(n)},$$

où ρ est une des racines du polynôme P .

Démonstration. Le théorème de Poincaré nous dit qu'il existe un entier n_0 tel que u_n soit non nul pour tout $n \geq n_0$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |\rho|$, où ρ est une des racines du polynôme P .

En posant $v_n = \ln(|u_n|)$, pour $n \geq n_0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right) = \ln(|\rho|),$$

soit :

$$\forall n \geq n_0, \quad v_{n+1} - v_n = \ln(|\rho|) + \varepsilon_n,$$

où $(\varepsilon_n)_{n \geq n_0}$ est une suite réelle convergente vers 0.

On a donc :

$$\begin{aligned} v_n &= v_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = (n - n_0) \ln(|\rho|) + v_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \varepsilon_k \\ &= n \ln(|\rho|) (1 + \delta_n), \end{aligned}$$

où on pose :

$$\delta_n = \frac{v_{n_0} - n_0 \ln(|\rho|)}{n \ln(|\rho|)} + \frac{1}{n \ln(|\rho|)} \sum_{k=n_0}^{n-1} \varepsilon_k.$$

En tenant compte de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n - n_0} \sum_{k=n_0}^{n-1} \varepsilon_k = 0$ (théorème de Césaro), on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$.

On a donc :

$$|u_n| = e^{v_n} = (e^{n \ln(|\rho|)})^{(1 + \delta_n)} = |\rho|^{n(1 + \delta_n)} = |\rho|^{n + o(n)}.$$

■

Exemple 1.1 (Les polynômes de Legendre) Les polynômes de Legendre sur $[-1, 1]$ sont définis par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$$

et ils vérifient la relation de récurrence :

$$P_{n+2}(x) = \frac{2n+3}{n+2} x P_{n+1}(x) - \frac{n+1}{n+2} P_n(x).$$

On a donc pour tout réel x :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2x, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -1$$

et l'équation caractéristique correspondante est :

$$r^2 - 2xr + 1 = 0$$

de racines complexes :

$$\gamma = x + \sqrt{x^2 - 1}, \quad \mu = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Pour $x \in [-1, 1]$ ces deux racines sont conjuguées de module égal à 1 et le théorème de Poincaré ne s'applique pas. Pour $x > 1$, ces deux racines sont réelles non nulles avec $\lambda > \mu$ et le théorème de Poincaré nous dit que :

$$|P_n(x)| = \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^{n + o(n)}.$$

Bibliographie

- [1] L. M. MILNE-THOMPSON — *The calculus of finite differences*. MacMillan (1933)