MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

EAI MAT 2

SESSION 2015

AGRÉGATION
CONCOURS INTERNE
ET CAER

Section : MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.
De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

A

Tournez la page S.V.P.

NOTATIONS ET RAPPELS

On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels positifs ou nuls, par $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, par $\mathbf{C}$ celui des nombres complexes.
Si $A \subset \mathbf{R}$ est une partie de $\mathbf{R}$, on désigne par $\mathbf{R} - A$ son complémentaire.
Soit $X \subset \mathbf{R}$ une partie de $\mathbf{R}$ et $u : X \to \mathbf{R}$ une fonction bornée. On pose $\|u\|_X = \sup\limits_{x \in X} |u(x)|$.

On dit qu'une variable aléatoire réelle Y est de loi exponentielle si sa loi admet pour densité la fonction : $h(t) = e^{-t}$ si $t > 0$ et $h(t) = 0$ si $t \leqslant 0$.

On rappelle la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

Partie I

1. Soit, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

(a) Démontrer que $u_n \in [0,1]$ et étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

(b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On appelle γ sa limite.

On pose, pour $s > 0$, $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$.

2. **(a)** Rappeler pourquoi $\Gamma(s)$ est bien défini et démontrer que pour $s > 0$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Que vaut $\Gamma(n+1)$ pour n entier naturel ?

(b) Calculer $\Gamma(1/2)$. (On pourra, en le justifiant, se ramener au calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$, et calculer le carré de celle-ci).

(c) Démontrer que Γ est continue et dérivable sur $\mathbf{R}^{+*}$, et calculer , pour $s > 0$, $\Gamma'(s)$.

(d) Soit n un entier strictement positif. Démontrer que, pour $x \in [0,n]$, $(1-\frac{x}{n})^n \leqslant e^{-x}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\frac{x}{n})^n = e^{-x}$.

(e) Démontrer que : $\forall s > 0$, $\displaystyle\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^{s-1}dx = \frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}$
(On pourra procéder par intégrations par parties successives).

(f) Démontrer que : $\forall s > 0, \Gamma(s) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}$.

(g) Démontrer que : $\forall s > 0, \ln\Gamma(s) = -\ln(s) - \gamma s + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{s}{n} - \ln(1+\frac{s}{n}))$.

(h) Démontrer que : $\forall s > 0, \dfrac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\gamma + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{s+n-1})$.

Partie II

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs, convergeant vers $+\infty$ et telle que la suite $(a_{n+1}-a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Soit $F : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ une application dérivable. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} F'(x) = 0$ et qu'il existe $l \in \mathbf{R}$ tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} F(a_n) = l$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = l$.

On se propose de démontrer dans les trois questions suivantes que : $\Gamma(s+1) \sim \sqrt{2\pi} s^{s+\frac{1}{2}} e^{-s}$ pour s au voisinage de $+\infty$.
On pose, pour $s > 0$, $F(s) = \ln(\dfrac{\Gamma(s+1)e^s}{s^{s+\frac{1}{2}}})$.

4. Démontrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}^{+*}$ et que : $F'(s) = \lim\limits_{n\to+\infty} (\ln(\dfrac{n}{s}) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{s+k+1}) - \dfrac{1}{2s}$.

5. Démontrer que : $-\dfrac{1}{2s} \leqslant F'(s) \leqslant \ln(\dfrac{s+1}{s}) - \dfrac{1}{2s}$.

6. Conclure.

Partie III

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels. On dit que le produit infini $\prod\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si la suite des produits partiels $p_N = \prod\limits_{n=0}^{N} a_n$ converge vers une limite non nulle.

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels tous positifs, ou bien tous dans l'intervalle $]-1,0]$. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   i) Le produit infini $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+u_n)$ converge.

   ii) La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln(1+u_n)$ converge.

   iii) La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

8. Soient pour $k, N \in \mathbf{N}$ des réels $u_{k,N}$ tels que : $\forall k \in \mathbf{N}$, la suite $(u_{k,N})_{N\in\mathbf{N}}$ est convergente, de limite $v_k \in \mathbf{R}$. On suppose de plus qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels positifs, avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$ telle que : $\forall k, N \in \mathbf{N}, |u_{k,N}| \leqslant a_k$.

   (a) Démontrer que la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k$ converge et que la suite $w_N = \sum\limits_{k=0}^{N} u_{k,N}$ converge vers $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k$.
   (Indication : on pourra considérer la suite de fonctions $f_N : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ donnée par : $\forall x \in [k, k+1[$, $f_N(x) = u_{k,N}$ si $k \leqslant N$ et $f_N(x) = 0$ si $x \geqslant N+1$, et exprimer w_N à partir de f_N.)

   (b) On suppose de plus que : $u_{k,N} \in]-1,0], \forall k, N \in \mathbf{N}$. Démontrer que la suite $\prod\limits_{k=0}^{N}(1+u_{k,N})$ converge, quand $N \to +\infty$, vers $\prod\limits_{k=0}^{+\infty}(1+v_k)$.

Soit $f_n : I \to \mathbf{R}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles. On dit que le produit infini des fonctions f_n converge si pour tout $x \in I$, il existe un entier n_0 tel que le produit infini de la suite numérique $(f_n(x))_{n \geqslant n_0}$ existe. On pose alors $p(n_0, x) = \prod_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$. On pose, pour tout $x \in I$ et pour $N \geqslant 0$, $p_N(x) = \prod_{n=0}^{N} f_n(x)$ et $p(x) = f_0(x) \cdots f_{n_0-1}(x) p(n_0, x)$. On dit que le produit infini des fonctions f_n converge uniformément sur I si la suite de fonctions $(p_N)_{N \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction p.

9. Soient $a_0, \cdots, a_N$ des nombres réels, $p_N = \prod_{n=0}^{N} (1 + a_n)$ et $q_N = \prod_{n=0}^{N} (1 + |a_n|)$. Démontrer que :

(a) $q_N \leqslant \exp(\sum_{k=0}^{N} |a_k|)$

(b) $|p_N - 1| \leqslant q_N - 1$ (on pourra procéder par récurrence sur N).

10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions bornées sur I telle que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ converge uniformément sur I et telle que : $\forall x \in I, u_n(x) \neq -1$.

On pose $p_N(x) = \prod_{n=0}^{N} (1 + u_n(x))$ et $q_N(x) = \prod_{n=0}^{N} (1 + |u_n(x)|)$.

(a) Démontrer que la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est bornée sur I.

(b) Soit $\epsilon > 0$. Démontrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall M \geqslant N \geqslant n_0, \forall x \in I, \quad |p_M(x) - p_N(x)| \leqslant |p_N(x)|(e^{\epsilon} - 1).$$

(c) On suppose de plus que $\epsilon < \frac{1}{2}$.
Démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que, $\forall M \geqslant N \geqslant n_0, \forall x \in I, \quad |p_M(x) - p_N(x)| \leqslant 2C\epsilon$.

(d) Démontrer que le produit infini des fonctions $(1 + u_n)$ converge uniformément sur I.

11. On se propose dans cette question de donner une expression de la fonction $\frac{sin(t)}{t}$, prolongée par continuité en 0, comme produit infini.

(a) Soit $t \in \mathbf{R}$. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $\sin(t) = 2^n \sin(2^{-n}t) \prod_{j=1}^{n} \cos(2^{-j}t)$.

(b) Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe un polynôme $Q_k \in \mathbf{R}[X]$ de degré 2^{k-1} tel que : $\forall x \in \mathbf{R}, \cos(2^k x) = Q_k(\sin^2(x))$.

(c) Soit $n \geqslant 2$. Démontrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbf{R}[X]$, de degré $2^{n-1} - 1$, tel que $\forall t \in \mathbf{R} - 2^{n-1}\pi\mathbf{Z}$,

$$\frac{2^{-n}\sin(t)}{\sin(2^{-n}t)\cos(2^{-n}t)} = Q(\sin^2(2^{-n}t))$$

.

(d) Déterminer les racines de Q et en déduire que, $\forall t \in \mathbf{R} - 2^{n-1}\pi\mathbf{Z}$:

$$\frac{2^{-n}\sin(t)}{\sin(2^{-n}t)\cos(2^{-n}t)} = \prod_{k=1}^{2^{n-1}-1} (1 - \frac{\sin^2(2^{-n}t)}{\sin^2(k\pi 2^{-n})}).$$

(e) Démontrer que : $\prod_{k=1}^{2^{n-1}-1}(1-\frac{\sin^2(2^{-n}t)}{\sin^2(k\pi 2^{-n})})$ converge, quand $n \to +\infty$, vers $\prod_{k=1}^{+\infty}(1-\frac{t^2}{(k\pi)^2})$ et en déduire que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \frac{\sin(t)}{t} = \prod_{k=1}^{+\infty}(1-\frac{t^2}{(k\pi)^2}).$$

12. Démontrer que : $\forall s \in]0,1[, \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$. (On pourra utiliser la question 2. (f))

13. On se propose dans cette question de donner une expression de $\Gamma(s)$ comme produit infini.

(a) Soit, pour $x > 0$ et $n \geqslant 1$, $f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^{-1}e^{\frac{x}{n}}$. Démontrer que le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge pour tout $x > 0$ et que la convergence est uniforme sur tout intervalle compact contenu dans $\mathbf{R}^{+*}$.

(b) Démontrer que $\Gamma(s) = \frac{1}{s}e^{-\gamma s}\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{s}{n})^{-1}e^{\frac{s}{n}}$.

Partie IV

On considère dans cette partie, pour $t > 0$, une variable aléatoire X_t à valeurs réelles strictement positives de loi ayant pour densité la fonction f_t donnée par :

$\forall x > 0, f_t(x) = \frac{x^{t-1}e^{-x}}{\Gamma(t)}$ et $\forall x \leqslant 0, f_t(x) = 0$.

14. Exprimer l'espérance mathématique $E(\ln(X_t))$ et la variance $Var(\ln(X_t))$ en fonction de $\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$. En déduire que la fonction $t \mapsto \ln(\Gamma(t))$ est convexe.

15. (a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\Gamma'(1) = \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

(b) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe $\alpha \in]n, n+1[$ tel que $\ln(n) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$.

(c) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ln(n) < \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} < \ln(n+1)$.

(d) En déduire que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

16. (a) Démontrer que, pour $x > 0$, on a : $1 - x^{-1} \leqslant \ln(x) \leqslant x - 1$ et $\ln^2(x) \leqslant (1-x^{-1})^2 + (x-1)^2$.

(b) Démontrer que pour $t > 0$, $E(\ln(\frac{X_t}{t})) \leqslant 0$ et que pour $t > 1$, $E(\ln(\frac{X_t}{t})) > \frac{-1}{(t-1)}$.

(c) Démontrer que pour $t > 2$, $E(\ln^2(\frac{X_t}{t})) < \frac{2t}{(t-2)^2}$.

17. Quelques résultats généraux.

(a) Soient I et J des intervalles ouverts, Z une variable aléatoire réelle de densité continue g nulle en dehors de I et $f : I \to J$ un difféomorphisme de classe C^1, de bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$. Démontrer que la loi de la variable aléatoire $f(Z)$ a pour densité la fonction qui est nulle en dehors de J et qui vaut sur J : $g \circ f^{-1}.|(f^{-1})'|$.

(b) Soient U et V des ouverts de $\mathbf{R}^n$, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un n-uple de variables aléatoires réelles, de loi admettant une densité continue f nulle en dehors de U, et $\varphi : U \to V$ un difféomorphisme de classe C^1. On désigne par $d\varphi^{-1}$ la différentielle de la bijection réciproque φ^{-1}. Démontrer que la loi de la variable aléatoire $\varphi(X_1, X_2, \cdots X_n)$ a pour densité la fonction qui est nulle en dehors de V et qui vaut sur V :

$$f \circ \varphi^{-1}.|\det(d\varphi^{-1})|$$

18. Soit $t > 0$. On considère des variables aléatoires indépendantes X_t et Y_j, $j \in \mathbf{N}$, où X_t, à valeurs strictement positives, a une loi de densité f_t, et les Y_j, $j \in \mathbf{N}$, ont chacune une loi exponentielle.

On pose $S_0 = 0$ et pour $j \geqslant 1$, $S_j = \sum\limits_{i=1}^{j} Y_i$.

(a) Soit $n \geqslant 1$. Déterminer la loi du (n+1)-uple $(\frac{X_t}{X_t + S_1}, \frac{X_t + S_1}{X_t + S_2}, \cdots, \frac{X_t + S_{n-1}}{X_t + S_n}, X_t + S_n)$.

(b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_t + S_n$ et pour $1 \leqslant j \leqslant n$, les lois des variables aléatoires $\dfrac{X_t + S_{j-1}}{X_t + S_j}$.

(c) Démontrer que les variables aléatoires $\dfrac{X_t}{X_t + S_1}, \dfrac{X_t + S_1}{X_t + S_2}, \cdots, \dfrac{X_t + S_{n-1}}{X_t + S_n}, X_t + S_n$ sont indépendantes.

(d) Quelle est, pour $j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, la loi de la variable aléatoire $-\dfrac{Y_j}{j+t}$? Comparer avec la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X_t + S_j}{X_t + S_{j+1}}$.

(e) Soit, pour $n \geqslant 1$, $d_{n,t} = \gamma + \ln(t+n) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Démontrer que $|d_{n,t}| \leqslant \frac{t+1}{n}$ (On pourra pour cela commencer par établir que $|d_{n+1,t} - d_{n,t}| < \frac{t+1}{n(n+1)}$).

(f) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ la variable aléatoire $\ln(X_t)$ a même loi que la variable aléatoire $-\gamma + \sum\limits_{j=0}^{n-1} (\dfrac{1}{j+1} - \dfrac{Y_j}{j+t}) + \ln(\dfrac{X_{t+n}}{t+n}) + d_{n,t}$, avec X_{t+n} indépendante des variables aléatoires Y_j, $j \geqslant 0$.

(On observera que, pour $n \geqslant 1$, $\ln(X_t) = \ln(\prod\limits_{j=1}^{n} \dfrac{X_t + S_{j-1}}{X_t + S_j}) + \ln(X_t + S_n)$).

(g) Démontrer que $\ln(\dfrac{X_{t+n}}{t+n})$ tend vers 0 en moyenne quadratique.

(h) Démontrer que $\ln(X_t)$ a même loi que $-\gamma + \sum\limits_{j=0}^{+\infty} (\dfrac{1}{j+1} - \dfrac{Y_j}{j+t})$.

19. Soient , pour $t > 0$, des variables aléatoires indépendantes X_t , où X_t, à valeurs strictement positives, suit une loi de densité f_t.

(a) Démontrer qu'il existe une suite de réels $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$, avec $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = 2\ln(2)$, telle que la variable aléatoire $2\ln(X_{2t})$ a même loi que la variable aléatoire

$$\ln(X_t) + \ln(X_{t+1/2}) + 2\ln(\frac{X_{2t+n}}{2t+n}) - \ln(\frac{X_{t+m}}{t+m}) - \ln(\frac{X_{t+p+1/2}}{t+p+1/2}) + r_n$$

où m et p sont des entiers dépendants de n que l'on précisera.
Indication : On pourra utiliser 18. (f) pour comparer les lois de $2\ln(X_{2t})$ et $\ln(X_t)+\ln(X_{t+1/2})$

(b) En déduire que : $2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma(s+1/2) = \Gamma(2s)\Gamma(1/2)$. (On pourra considérer les espérances mathématiques de puissances des variables aléatoires ci-dessus, pour une valeur convenable de t).

FIN DU SUJET