



Problèmes de révision pour l'Agrégation de Mathématiques

JEAN-ETIENNE ROMBALDI



15 août 2026

Table des matières

	Page
Avant-propos	vii
1 Postulat de BERTRAND	1
1.1 Rappels de cours	1
1.2 Énoncé	2
2 Sous-groupes maximaux d'un groupe	7
2.1 Rappels de cours	7
2.2 Énoncé	9
3 Le groupe linéaire $GL(E)$	15
3.1 Rappels de cours	15
3.2 Énoncé	16
4 Sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{C})$ et de $GL_n(\mathbb{Z})$	25
4.1 Rappels de cours	25
4.2 Énoncé	27
5 Valeurs propres de matrices particulières	33
5.1 Rappels de cours	33
5.2 Énoncé	34
6 Commutant d'un endomorphisme en dimension finie	41
6.1 Rappels de cours	41
6.2 Énoncé	42
7 Un théorème de BURNSIDE	49
7.1 Rappels de cours	49
7.2 Énoncé	50
8 Diamètre transfini d'une partie du plan euclidien	57
8.1 Rappels de cours	57
8.2 Énoncé	57

9	Formes quadratiques réelles et ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$	63
9.1	Rappels de cours	63
9.2	Énoncé	65
10	Transformations de CESÀRO, d'EULER et de TOEPLITZ	71
10.1	Rappels de cours	71
10.2	Énoncé	72
11	Autour de la formule de STIRLING	79
11.1	Rappels de cours	79
11.2	Énoncé	80
12	Fonctions absolument monotones	87
12.1	Rappels de cours	87
12.2	Énoncé	88
13	Fonctions à variation bornée	95
13.1	Rappels de cours	95
13.2	Énoncé	96
14	Fonctions de WEIERSTRASS	103
14.1	Énoncé	103
15	Fonctions presque périodiques	109
15.1	Rappels de cours	109
15.2	Énoncé	110
16	Intégrales de WALLIS	119
16.1	Rappels de cours	119
16.2	Énoncé	120
17	Intégrales de DIRICHLET généralisées	125
17.1	Rappels de cours	125
17.2	Énoncé	127
18	Intégrales elliptiques	137
18.1	Rappels de cours	137
18.2	Énoncé	138
19	Séries de FOURIER-LEGENDRE	147
19.1	Rappels de cours	147
19.2	Énoncé	148
20	Opérateurs de STURM-LIOUVILLE	157
20.1	Rappels de cours	157
20.2	Énoncé	158

21 Opérateurs compacts	165
21.1 Rappels de cours	165
21.2 Énoncé	167

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux candidats à l'agrégation interne de mathématiques, qu'ils soient inscrits dans une préparation universitaire, en formation autonome ou en reprise d'études. Il a pour ambition d'accompagner efficacement la préparation au concours en proposant un ensemble de problèmes soigneusement choisis, couvrant les principaux domaines du programme, et conçus pour refléter l'esprit, le niveau d'exigence et la diversité des épreuves de l'agrégation. Il sera également utile aux candidats à l'agrégation externe ainsi qu'aux élèves de classes préparatoires scientifiques.

Chaque chapitre débute par un rappel de cours synthétique, centré sur les notions, résultats fondamentaux et méthodes indispensables à la résolution du problème étudié. Ces rappels qui ne peuvent se substituer à un cours complet, sont destinés à fournir au lecteur un cadre conceptuel clair, mettant en évidence les idées et les outils essentiels. Ils visent également à favoriser une vision transversale des mathématiques, indispensable à la réussite au concours. Ces synthèses s'appuient sur une bibliographie classique, à laquelle le lecteur est invité à se reporter en vue d'approfondir les notions abordées, replacer les résultats dans un cadre plus général ou découvrir d'autres points de vue.

Les problèmes proposés sont suivis de corrigés détaillés et rigoureux, dans lesquels une attention particulière est portée à la rédaction, à la justification des raisonnements et à la mise en valeur des idées clés. Pour certaines questions, plusieurs méthodes sont présentées en vue d'encourager le lecteur à développer sa propre autonomie mathématique. L'ensemble de l'ouvrage a été conçu dans un double objectif : consolider les connaissances théoriques et entraîner à une pratique exigeante de la résolution de problèmes, condition essentielle pour aborder l'agrégation avec confiance et discernement.

Chaque problème débute en partie préliminaire par une série de questions sur quelques résultats classiques qui seront utilisés dans les autres parties où l'on s'intéresse au cœur du thème étudié. Cette progression vise à guider le lecteur dans la construction des outils nécessaires, tout en l'amenant progressivement vers des résultats plus substantiels.

Enfin, chaque problème est centré autour d'un thème particulier qui peut donner des idées de développements pour les leçons d'oral. Ces pistes sont mises en valeur par l'annonce des objectifs de certaines parties, lorsque celles-ci visent à établir un résultat notable, en lien direct avec les attentes du concours.

Les sujets abordés avec cet ouvrage sont les suivants :

- arithmétique avec le problème 1 où l'on s'intéresse à la conjecture de J. BERTRAND démontrée par P. TCHEBYCHEV : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des nombres premiers compris entre n et $2n$;
- théorie des groupes avec le problème 2 où l'on s'intéresse à la notion de sous-groupe maximal d'un groupe et à l'intersection de tous ses sous-groupes, à savoir le sous-groupe de FRATTINI d'un groupe ;
- groupe linéaire d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel avec le problème 3 qui est l'occasion de revoir quelques résultats généraux sur $GL(E)$ en s'intéressant aux cas particuliers de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et d'un corps fini et avec le problème 4 où l'on s'intéresse en particulier aux sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{C})$ et de $GL_n(\mathbb{Z})$;

- algèbre linéaire avec le problème 5 où l'on propose quelques calculs classiques de valeurs et vecteurs propres de matrices, le problème 6 où l'on s'intéresse aux commutant et bicommutant d'un endomorphisme et le problème 7 où l'on s'intéresse à un théorème de BURNSIDE qui nous dit que pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos et tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension $n \geq 2$, $\mathcal{L}(E)$ est l'unique sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$ (une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dite irréductible s'il n'y pas de sous-espace strict de E stable par $\mathcal{A}$);
- géométrie avec le problème 8 où l'on s'intéresse à la notion de diamètre transfini d'un ensemble du plan affine euclidien et le problème 9 où l'on s'intéresse aux convexes compacts de $\mathbb{R}^n$;
- suites numériques ou à valeurs dans un espace normé avec le problème 10 où l'on s'intéresse aux moyennes de CESÀRO, d'EULER et de TOEPLITZ et le problème 11 où l'on s'intéresse aux formules de STIRLING;
- classes de fonctions particulières avec le problème 12 où l'on s'intéresse aux fonctions absolument monotones, le problème 13 où l'on s'intéresse aux fonctions à variations bornées, le problème ?? où l'on s'intéresse aux fonctions continues et nulle part dérivables et le problème ?? où l'on s'intéresse aux fonctions presque périodiques;
- intégration avec le problème REFF où l'on s'intéresse ...;
-





PROBLÈME 1



Postulat de BERTRAND

1.1 Rappels de cours

Du théorème de division euclidienne, on déduit le théorème de numération dans une base.

Théorème Soit $b \geq 2$ un entier. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique entier p et un unique $(p+1)$ -uplet $(n_k)_{0 \leq k \leq p} \in \mathbb{N}^{p+1}$ tels que $n_p \neq 0$, $0 \leq n_k \leq b-1$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, p\}$ et $n = \sum_{k=0}^p n_k b^k$.

Les théorèmes de BÉZOUT et de GAUSS sont importants en arithmétique.

Théorème Des entiers relatifs $a_1, \dots, a_p$ non tous nuls sont premiers entre eux dans leur ensemble si, et seulement si, il existe des entiers relatifs $u_1, \dots, u_p$ tels que $\sum_{k=1}^p u_k a_k = 1$.

Théorème Soient a, b, c des entiers relatifs non nuls. Si a divise bc et a est premier avec b , alors a divise c .

Sur les nombres premiers, les principaux résultats sont les suivants.

- L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.
- Tout entier naturel $n \geq 2$ se décompose de manière unique sous la forme $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, où $2 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_r$ sont des nombres premiers et les α_k sont des entiers naturels non nuls.

Sur les groupes nous avons besoin des résultats suivants.

Théorème Soit E un ensemble fini. Toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}(E) \setminus \{Id_E\}$ se décompose en produit de cycles deux à deux disjoints. Cette décomposition est unique à l'ordre près.

Si $\sigma = \prod_{k=1}^r \gamma_k$ est une telle décomposition, on a alors la partition $\text{Supp}(\sigma) = \bigcup_{k=1}^r \text{Supp}(\gamma_k)$ et l'ordre de σ est $\theta(\sigma) = \text{ppcm}_{1 \leq k \leq r} (\theta(\gamma_k))$.

Théorème Soit G un groupe fini d'ordre $m \geq 2$. Pour tout diviseur premier p de m il existe dans G un élément d'ordre p .

1.2 Énoncé

Le but de ce problème est de donner une démonstration du résultat suivant conjecturé par J. BERTRAND, puis démontré par P. TCHEBYCHEV : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des nombres premiers compris entre n et $2n$.

On donnera quelques applications de ce théorème.

Pour tout réel x , on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble de tous les nombres premiers.

Pour tout nombre premier p et tout entier $n \geq 2$, on note $\nu_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers, soit :

$$\nu_p(n) = \max \{k \in \mathbb{N}, p^k \text{ divise } n\}$$

Par convention, on note $\nu_p(1) = 0$.

Cet entier $\nu_p(n)$ est la *valuation p -adique* de n .

On a $\nu_p(n) \neq 0$ si, et seulement si, p divise n .

La décomposition en facteurs premiers de n peut donc s'écrire sous la forme $n = \prod_{p \in \mathcal{D}_n \cap \mathcal{P}} p^{\nu_p(n)}$, où $\mathcal{D}_n$ désigne l'ensemble des diviseurs positifs de n , ce qui peut

aussi s'écrire $n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(n)}$, le produit étant fini puisque $\nu_p(n) = 0$ si p ne divise pas n .

– I – Quelques propriétés des valuations p -adiques

1. Montrer que le nombre de zéros qui terminent l'écriture décimale d'un entier $n \geq 2$ est égal à $\min(\nu_2(n), \nu_5(n))$.

2. Soient p un nombre premier et n, m deux entiers naturels non nuls. Montrer que :

(a) $\nu_p(nm) = \nu_p(n) + \nu_p(m)$;

(b) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\nu_p(n^k) = k\nu_p(n)$;

(c) $\nu_p(n+m) \geq \min(\nu_p(n), \nu_p(m))$, l'égalité étant réalisée si $\nu_p(n) \neq \nu_p(m)$.

3. Soient p un nombre premier et $n \geq 2$ un entier. Montrer que :

- (a) pour tout $k \in \mathbb{N}$, le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont multiples de p^k est égal à $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$;
- (b) pour tout $k \in \mathbb{N}$, le nombre d'entiers compris entre 1 et n dont la valuation p -adique vaut k est l'entier $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor$, cet entier étant nul pour $k > k_{n,p} = \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor$;
- (c) $\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{k_{n,p}} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ (formule de LEGENDRE)¹ ;
- (d) $\nu_p(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{p-1}$.
4. Préciser pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de zéros qui terminent l'écriture décimale de $n!$
5. Soient p un nombre premier, $n \geq 2$ un entier et $S_p(n)$ la somme des chiffres dans l'écriture en base p de n . Montrer que :
- (a) $\nu_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}$;
- (b) $\frac{n}{p-1} - \left(\frac{\ln(n)}{\ln(p)} + 1 \right) \leq \nu_p(n!) < \frac{n}{p-1}$;
- (c) pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on a $\nu_p((p^a - 1)!) = \frac{p^a - 1}{p-1} - a$.

– II – Quelques propriétés des coefficients binomiaux $\binom{2n}{n}$

1. Soient $n \geq 2$ un entier, p un diviseur premier de $\binom{2n}{n}$ et $\alpha_{n,p} = \nu_p\left(\binom{2n}{n}\right)$. Montrer que :
- (a) $2 \leq p < 2n$;
- (b) $\alpha_{n,p} = \sum_{k=1}^{k_{2n,p}} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$ où $k_{2n,p} = \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right\rfloor$, chacun des entiers $\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ valant 0 ou 1 ;
- (c) $p \leq p^{\alpha_{n,p}} \leq 2n$;
- (d) pour $\sqrt{2n} < p < 2n$, $\alpha_{n,p}$ vaut 0 ou 1 ;
- (e) pour $2 \leq n < p < 2n$, on a $\alpha_{n,p} = 1$;
- (f) pour $n \geq 3$ et $\frac{2n}{3} < p \leq n$, on a $\alpha_{n,p} = 0$.

1. Pour $n < p$, on a $\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor = 0$ et les sommes considérées sont nulles.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2 \leq \binom{2n}{n} = \max_{0 \leq k \leq 2n} \binom{2n}{k}$, puis que $2^{2n} \leq 2n \binom{2n}{n}$.
3. Pour tout entier $n \geq 2$, on note $P_n = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p$. Montrer que :
 - (a) pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{P_{2m+1}}{P_{m+1}} \leq \binom{2m+1}{m} < 2^{2m}$;
 - (b) pour tout entier $n \geq 2$, on a $P_n < 2^{2n}$ (inégalité de TCHEBYCHEV).
4. Soit $n \geq 5$ un entier. En convenant qu'un produit indexé sur l'ensemble vide vaut 1, montrer que :
 - (a) $\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} \prod_{p \in]\sqrt{2n}, \frac{2n}{3}] \cap \mathcal{P}} p \prod_{p \in]n, 2n[\cap \mathcal{P}} p$;
 - (b) $\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} 2^{\frac{4n}{3}} \prod_{p \in]n, 2n[\cap \mathcal{P}} p$;
 - (c) $2^{\frac{2n}{3}} \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \prod_{p \in]n, 2n[\cap \mathcal{P}} p$.

– III – Théorème de TCHEBYCHEV

On se propose de montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe des nombres premiers strictement compris entre n et $2n$ (théorème de TCHEBYCHEV).

1. Montrer le résultat annoncé pour $2 \leq n \leq 4$.
2. En désignant par f la fonction définie sur $[e, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, montrer que pour tout réel $x \geq 2^5$, on a $f(x) < \frac{\ln(2)}{6}$.
3. On suppose qu'il existe un entier $n \geq 5$ tel que $]n, 2n[\cap \mathcal{P} = \emptyset$.
 - (a) Montrer que $f(\sqrt{2n}) \geq \frac{\ln(2)}{6}$, puis en déduire que $n < 512$.
 - (b) Connaissant la suite de nombres premiers :

$$(p_k)_{1 \leq k \leq 9} = (5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631)$$

et remarquant pour tout entier k compris entre 1 et 8, on a $p_k < p_{k+1} < 2p_k$, montrer que pour $5 \leq n \leq 512$, tout intervalle $]n, 2n[$ contient l'un de ces nombres premiers. Conclure.

4. On se propose de montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $n!$ n'est pas un carré.
 - (a) Montrer le résultat pour $n = 2$ et $n = 3$.
 - (b) Pour $n \geq 4$, justifier l'existence d'un nombre premier p strictement compris entre $\frac{n}{2}$ et n , vérifier que $\nu_p(n!) = 1$, puis en déduire le résultat annoncé.

(c) Que dire de l'entier $\binom{2n}{n}$?

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. En désignant pour $n \geq 4$ par p un nombre premier p strictement compris entre $\frac{n}{2}$ et n (question **III.4b**), montrer qu'il un entier a_n et un entier b_n premier avec p tels que $H_n = \frac{1}{p} + \frac{a_n}{b_n}$, puis en déduire que pour tout entier $n \geq 2$, le nombre rationnel H_n n'est pas entier.
6. Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique. En désignant pour $n \geq 4$ par p un nombre premier strictement compris entre $\frac{n}{2}$ et n (question **III.4b**), montrer qu'il existe dans $\mathcal{S}_n$ une permutation d'ordre p et que cette permutation est un p -cycle. On peut admettre le théorème de CAUCHY qui nous dit que pour tout diviseur premier p de l'ordre d'un groupe fini G , il existe un élément d'ordre p dans G .
7. On note $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite rangée dans l'ordre strictement croissant de tous les nombres premiers.
- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $p_n < p_{n+1} < 2p_n$, puis que pour tout entier $n \geq 2$, on a $p_n < 2^n$.
- (b) En notant $S_n = \sum_{k=1}^n p_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour tout entier $n \geq 5$, on a $p_{n+1} < S_n - 13$.
- (c) Pour tout entier $n \geq 5$, on désigne par A_n l'ensemble de tous les entiers qui peuvent s'écrire comme somme de nombres premiers distincts pris dans l'ensemble $\{p_1, \dots, p_n\}$. Montrer que A_n contient tous les entiers compris entre 7 et $S_n - 7$. On peut admettre que ce résultat est vrai pour $n = 5$ (vérification fastidieuse).
- (d) Montrer que tout entier $n \geq 7$ s'écrit comme somme de nombres premiers tous distincts.





PROBLÈME 2



Sous-groupes maximaux d'un groupe

Ce problème est l'occasion de revoir quelques notions de base sur les groupes. On s'intéresse à la notion de sous-groupe maximal d'un groupe ainsi qu'à l'intersection de tous ses sous-groupes que l'on appelle le sous-groupe de FRATTINI. En particulier, on s'intéresse au sous-groupe de FRATTINI d'un p -groupe.

2.1 Rappels de cours

Soit $(G, \cdot)$ un groupe multiplicatif.

Définition Si X est une partie de G , le sous-groupe de G engendré par X est l'intersection notée $\langle X \rangle$ de tous les sous-groupes de G qui contiennent X .

On a $\langle X \rangle = \left\{ \prod_{k=1}^r x_k^{\varepsilon_k}, r \in \mathbb{N}^*, x_k \in X \text{ et } \varepsilon_k \in \{-1, 1\} \text{ pour } 1 \leq k \leq r \right\}$. Dans le cas où les éléments de X sont en nombre fini et commutent, on a le résultat suivant.

Théorème Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout p -uplet $(g_k)_{1 \leq k \leq p}$ d'éléments de G qui commutent deux à deux, on a $\langle g_1, \dots, g_p \rangle = \left\{ \prod_{k=1}^p g_k^{\alpha_k}, (\alpha_k)_{1 \leq k \leq p} \in \mathbb{Z}^p \right\}$ et ce groupe est commutatif.

Définition Le *groupe dérivé* d'un groupe $(G, \cdot)$ est le sous-groupe $D(G)$ de G engendré par les *commutateurs*, c'est-à-dire par les éléments de G de la forme $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, où a, b sont dans G .

Le groupe dérivé $D(G)$ d'un groupe G est le plus petit sous-groupe distingué H de G tel que le groupe G/H soit commutatif.

Définition Si H est un sous-groupe de G , le cardinal de l'ensemble quotient G/H est noté $[G : H]$ et on l'appelle l'indice de H dans G .

Théorème Soient G un groupe fini d'ordre $n \geq 2$ et H un sous-groupe de G . Pour tout $g \in G$ on a $\text{card}(gH) = \text{card}(H)$ et $\text{card}(G) = [G : H] \text{card}(H)$, donc l'ordre de H divise celui de G .

Définition On dit qu'un sous-groupe H de G est distingué, si on a $gH = Hg$ pour tout $g \in G$.

Si H est un sous-groupe distingué de G , l'ensemble quotient G/H est alors un groupe.

Définition Le *centre* $Z(G)$ d'un groupe G est la partie de G formée des éléments de G qui commutent à tous les autres éléments de G , soit $Z(G) = \{h \in G, \forall g \in G, gh = hg\}$.

$Z(G)$ est un sous-groupe distingué et commutatif de G .

Théorème Soient G un groupe et H un sous-groupe distingué de G . Les sous-groupes du groupe quotient G/H sont de la forme K/H où K est un sous-groupe de G contenant H .

Définition On dit que G est *monogène* s'il existe un élément g de G tel que $G = \langle g \rangle$. Si de plus G est fini, on dit alors qu'il est *cyclique*.

Théorème Un groupe de cardinal premier est cyclique.

Théorème Un groupe commutatif d'ordre pq , où p et q sont deux nombres premiers distincts, est cyclique.

Théorème Les sous-groupes de $G = \langle a \rangle$ sont tous cycliques d'ordre divisant n . Réciproquement, pour tout diviseur positif d de n , il existe un unique sous-groupe d'ordre d de G . Ce sous-groupe est le groupe cyclique $H = \langle a^{\frac{n}{d}} \rangle$. C'est également l'ensemble de tous les éléments de G d'ordre divisant d et les générateurs de H sont tous les éléments d'ordre d de G .

Théorème (CAUCHY) Soit G un groupe fini d'ordre $n \geq 2$. Pour tout diviseur premier p de n , il existe dans G un élément d'ordre p (donc un sous-groupe d'ordre p).

Théorème Toute permutation $\sigma \in S_n \setminus \{Id_E\}$ se décompose en produit de cycles deux à deux disjoints (le groupe S_n est engendré par les cycles). Cette décomposition est unique à l'ordre près.

Théorème Toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ se décompose en produit de transpositions (le groupe $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions).

Théorème $\mathcal{S}_n$ est engendré par les $n - 1$ transpositions $(k, k + 1)$ où k est compris entre 1 et $n - 1$.

Théorème Pour $n \geq 5$, les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}(E)$ sont $\{Id\}$, $\mathcal{A}(E)$ et $\mathcal{S}(E)$.

2.2 Énoncé

Les groupes considérés dans ce problème sont *a priori* multiplicatifs de neutre noté 1 et ayant au moins deux éléments (*i. e.* non triviaux). Pour certains exemples, le groupe sera additif de neutre noté 0.

Le *centre* d'un groupe G est la partie de G formée des éléments de G qui commutent à tous les autres éléments de G , soit $Z(G) = \{h \in G, \forall g \in G, gh = hg\}$.

Pour toute partie non vide X d'un groupe G , on note $\langle X \rangle$ le sous-groupe de G qu'elle engendre, soit l'intersection de tous les sous-groupes de G qui contiennent X .

Soient H un sous-groupe d'un groupe G et $G/H = \{\bar{g} = gH, g \in G\}$ l'ensemble quotient correspondant :

- l'indice de H dans G est $[G : H] = \text{card}(G/H)$, dans le cas où G est fini, $\text{card}(H)$ divise $\text{card}(G)$ et on a $\text{card}(G/H) = \frac{\text{card}(G)}{\text{card}(H)}$;
- H est dit *distingué* dans G si pour tout $g \in G$, on a $gHg^{-1} = H$ (*i. e.* H est stable par automorphismes intérieurs).

Le *groupe dérivé* d'un groupe G est le sous-groupe $D(G)$ de G engendré par les *commutateurs*, c'est-à-dire par les éléments de G de la forme $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, où $(a, b) \in G^2$.

Pour tout nombre premier $p \geq 2$, un p -groupe est un groupe d'ordre p^n où $n \in \mathbb{N}^*$.

– I – Résultats préliminaires

1. Soient E, F deux ensembles non vides et $\pi : E \rightarrow F$ une application surjective. Montrer que pour toute partie Y de F , on a $\pi(\pi^{-1}(Y)) = Y$. En déduire que l'application Ψ qui associe à tout $Y \in \mathcal{P}(F)$ son image réciproque $\pi^{-1}(Y) \in \mathcal{P}(E)$ réalise une injection de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E)$.
2. Soient G un groupe, H un sous-groupe distingué de G et π_H la surjection canonique de G sur G/H .
 - (a) Soit $\bar{K}$ un sous-groupe de G/H . Montrer que $\pi_H^{-1}(\bar{K})$ est un sous-groupe de G qui contient H .
 - (b) Soit K un sous-groupe de G qui contient H . Montrer que $\pi_H(K) = K/H$ est un sous-groupe de G/H et que $\pi_H^{-1}(\pi_H(K)) = K$. Dans le cas où le groupe G est fini, montrer que $[G/H, \pi_H(K)] = [G : K]$.

- (c) Montrer que π_H induit une bijection de l'ensemble des sous-groupes de G contenant H sur l'ensemble des sous-groupes du groupe quotient G/H .
3. Soient $H \subset K$ deux sous-groupes d'un groupe G . Montrer que l'on peut définir une surjection $f : G/H \rightarrow G/K$ par $f(gH) = gK$ pour tout $g \in G$.
4. Montrer que :
- (a) le centre $Z(G)$ d'un groupe G est un sous-groupe distingué de G ;
 - (b) si le groupe quotient $G/Z(G)$ est cyclique, le groupe G est alors commutatif.
5. Soient G, G' deux groupes et $\varphi : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. Montrer que :
- (a) si H' est un sous-groupe distingué de G' , alors $\varphi^{-1}(H')$ est un sous-groupe distingué de G ;
 - (b) si φ est surjectif et H est un sous-groupe distingué de G , alors $\varphi(H)$ est un sous-groupe distingué de G' .
6. Si H et K sont deux sous-groupes de G , on leur associe alors l'ensemble :

$$HK = \{hk, h \in H, k \in K\}$$

- (a) Dans le cas où les deux sous-groupes H et K sont finis, montrer que :

$$\text{card}(HK) = \frac{\text{card}(H) \text{card}(K)}{\text{card}(H \cap K)}$$

- (b) Montrer que si l'un des deux sous-groupes H ou K est distingué, l'ensemble HK est alors un sous-groupe de G . Donner un contre-exemple pour H et K non distingués.
 - (c) Montrer que si les deux sous-groupes H et K sont distingués, il en est alors de même de HK . Dans le cas où $H \cap K = \{1\}$, montrer que HK est isomorphe à $H \times K$.
7. Soient $p \geq 2$ un nombre premier et G un groupe abélien fini tel que $g^p = 1$ pour tout $g \in G$ (on dit que G est d'exposant p). En notant $\mathbb{F}_p$ le corps fini $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$, montrer que l'application $(\bar{k}, g) \in \mathbb{F}_p \times G \mapsto g^{\bar{k}} \in G$ est bien définie et que cette loi confère à G une structure de $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel, puis en déduire que le groupe G est isomorphe au groupe additif $\mathbb{F}_p^n$ pour un certain entier $n \geq 0$.
8. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice m . Montrer que :
- (a) pour tout $g \in G$, l'application $\tau_g : \bar{a} \in G/H \mapsto g\bar{a} \in G/H$ est bien définie et bijective, puis que l'application $\tau : g \mapsto \tau_g$ est un morphisme de groupes de G dans le groupe $\mathcal{S}(G/H)$ des permutations de G/H ;
 - (b) $\ker(\tau)$ est contenu dans H ; $[G : \ker(\tau)]$ divise $m!$; $[H : \ker(\tau)]$ divise $(m-1)!$;
 - (c) tout sous-groupe d'indice 2 dans G est distingué ;
 - (d) si G est un p -groupe, alors tout sous-groupe d'indice p dans G est distingué ;

- (e) si G est fini d'ordre $n \geq 2$ et p est le plus petit diviseur premier de n , alors tout sous-groupe d'indice p dans G est distingué (un théorème de FROBENIUS).

– II – Sous-groupe dérivé d'un groupe

Soient G un groupe et $D(G)$ son groupe dérivé.

1. Montrer que G est commutatif si, et seulement si, $D(G) = \{1\}$.
2. Montrer que $D(G)$ est l'ensemble de tous les produits finis de commutateurs.
3. Montrer que le groupe dérivé $D(G)$ d'un groupe G est le plus petit sous-groupe distingué H de G tel que le groupe G/H soit commutatif.
4. Soit H un sous-groupe distingué de G . Montrer que le groupe quotient G/H est commutatif si, et seulement si, H contient $D(G)$.
5. Pour $n \geq 5$, que valent les groupes dérivés $D(\mathcal{S}_n)$ et $D(\mathcal{A}_n)$?
6. Montrer que l'ensemble $D(G)Z(G) = \{gh, g \in D(G), h \in Z(G)\}$ est un sous-groupe distingué de G , puis que $D(G/Z(G)) = \pi(D(G)Z(G))$ où π est la surjection canonique de G sur $G/Z(G)$.
7. Dans le cas où G est fini, montrer que :

$$\text{card}(D(G/Z(G))) = \frac{\text{card}(D(G)Z(G))}{\text{card}(Z(G))} = \frac{\text{card}(D(G))}{\text{card}(D(G) \cap Z(G))}$$

8. On se donne un nombre premier $p \geq 2$ et on désigne par G^p le sous-groupe de G engendré par les g^p où g décrit G . Montrer que le sous-groupe G^p est distingué dans G et que pour tout $g \in G$, on a $\bar{g}^p = \bar{1}$ dans le groupe quotient G/G^p . Montrer que le groupe quotient $G/(D(G)G^p)$ est commutatif. Dans le cas où G est fini, montrer que $G/(D(G)G^p)$ est isomorphe en tant que $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel et groupe à $\mathbb{F}_p^n$ pour un entier $n \geq 0$.

– III – p -groupes

Soit G un p -groupe d'ordre p^n où p est premier et $n \in \mathbb{N}^*$.

Le but de cette partie est de montrer les résultats suivants.

Théorème 2.1.

Il existe alors pour tout entier k compris entre 0 et n , un sous-groupe distingué H_k d'ordre p^k dans G et on $H_k \subset H_{k+1}$.

Théorème 2.2.

Tout sous-groupe strict de G est contenu dans un sous-groupe d'indice p .

1. Montrer que si H est un sous-groupe de G tel que $H \cap Z(G) \neq \{1\}$, il contient alors un élément d'ordre p . En déduire que le centre $Z(G)$ contient un élément d'ordre p .
2. Pour $n = 2$, montrer que G est commutatif.
3. Donner un exemple de groupe d'ordre p^3 non commutatif.
4. Montrer que le sous-groupe dérivé $D(G)$ est d'ordre p^k où k est un entier compris entre 0 et $n - 1$.
5. Montrer que, pour tout k compris entre 0 et n , il existe dans G un sous-groupe distingué H_k d'ordre p^k et qu'on $H_k \subset H_{k+1}$ pour $0 \leq k \leq n - 1$.
6. Soient H un sous-groupe de G tel que $H \cap Z(G) = \{1\}$ et $a \in Z(G)$ d'ordre p . Montrer que $\langle H, a \rangle = G$ si, et seulement si, $\text{card}(H) = p^{n-1}$ (i. e. H est d'indice p).
7. Montrer que tout sous-groupe strict de G est contenu dans un sous-groupe de G d'indice p (on peut raisonner par récurrence sur l'entier $n \geq 1$ tel que $\text{card}(G) = p^n$).

– IV – Sous-groupes maximaux

Soit $(G, \cdot)$ un groupe multiplicatif non réduit à $\{1\}$.

On dit qu'un sous-groupe M de G est *maximal* si $M \neq G$ et pour tout sous-groupe H de G , on a :

$$(M \subset H \subset G) \Rightarrow (H = M \text{ ou } H = G)$$

Autrement dit, M est maximal s'il est distinct de G et s'il n'existe aucun sous-groupe propre de G le contenant strictement.

On note $\mathcal{M}(G)$ l'ensemble des sous-groupes maximaux de G .

1. On suppose que le groupe G est fini et on se donne un sous-groupe strict H de G . Montrer qu'il existe au moins un sous-groupe maximal M de G contenant H . En déduire que $\mathcal{M}(G)$ est non vide.
2. Montrer que si G_1 et G_2 sont deux groupes admettant des sous-groupes maximaux, alors tout isomorphisme de groupes $f : G_1 \rightarrow G_2$ induit une bijection de $\mathcal{M}(G_1)$ sur $\mathcal{M}(G_2)$.
3. On suppose que le groupe G est fini. Montrer qu'une partie X de G engendre G si, et seulement si, il n'existe pas de sous-groupe maximal de G qui la contient.
4. Déterminer les sous-groupes maximaux des groupes additifs $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.
5. Montrer qu'un sous-groupe strict M de G est maximal, si et seulement si, pour tout $a \in G \setminus M$, on a $\langle M, a \rangle = G$.
6. Pour cette question, $n \geq 2$ est un entier et G est le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ des permutations de $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Montrer que pour tout entier k compris entre 1 et n le sous-groupe $\mathcal{S}_n(k)$ formé des permutations de I_n qui laissent k fixe est un sous-groupe maximal de $\mathcal{S}_n$.
7. Soient H un sous-groupe distingué de G et π_H la projection canonique de G sur G/H .

- (a) Montrer qu'un sous-groupe M de G contenant H est maximal si, et seulement si, $\pi_H(M)$ est un sous-groupe maximal de G/H .
 - (b) Montrer que π_H induit une bijection entre l'ensemble $\mathcal{M}(G, H)$ des sous-groupes maximaux de G contenant H et l'ensemble $\mathcal{M}(G/H)$ des sous-groupes maximaux du groupe quotient G/H .
8. Quels sont, pour $n \geq 2$ entier, les sous-groupes maximaux du groupe additif $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.
 9. Montrer qu'un sous-groupe strict de G d'indice p premier est maximal. La réciproque est-elle vraie ?
 10. Montrer que, pour $n \geq 3$ entier, le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est maximal dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.
 11. Donner un exemple de groupe fini qui possède deux sous-groupes maximaux non isomorphes.

– V – Sous-groupe de Frattini

Si G est un groupe admettant des sous-groupes maximaux, on désigne par $\Phi(G) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}(G)} M$ l'intersection de tous les sous-groupes maximaux de G (groupe de FRATTINI de G). Dans le cas où G n'admet pas de sous-groupe maximal, on note par convention $\Phi(G) = G$.

1. Déterminer $\Phi(\mathbb{Z})$, $\Phi(\mathbb{Q})$, $\Phi(\mathcal{S}_n)$ et $\Phi\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)$ pour $n \geq 2$ entier.
2. Soient G_1, G_2 deux groupes finis non triviaux et $f : G_1 \rightarrow G_2$ un isomorphisme de groupes.
 - (a) Montrer que $f(\Phi(G_1)) = \Phi(G_2)$.
 - (b) En déduire que pour G fini, $\Phi(G)$ est un sous-groupe distingué de G .
3. On suppose que G est fini, on note π la surjection canonique de G sur $G/\Phi(G)$ et on se donne une partie non vide X de G . Montrer que X engendre G si, et seulement si, $\pi(X)$ engendre $G/\Phi(G)$.
4. Soient p un nombre premier, $\mathbb{F}_p$ le corps fini $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ et $G = \mathbb{F}_p^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\Phi(G) = \{0_G\}$.
5. Soit H un sous-groupe distingué de G . On suppose que le groupe quotient G/H est isomorphe à $\mathbb{F}_p^n$ où p est premier et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $H = \bigcap_{M \in \mathcal{M}(G, H)} M$.

– VI – Sous-groupe maximaux d'un p -groupe

Pour cette partie G est un p -groupe d'ordre p^n où p est premier et $n \in \mathbb{N}^*$ et on s'intéresse à ses sous-groupes maximaux.

Pour $n = 1$, G est cyclique d'ordre p avec $\{1\}$ pour unique sous-groupe maximal et on a $\Phi(G) = \{1\}$. On suppose donc que $n \geq 2$.

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant.

Théorème 2.3.

Les sous-groupes maximaux de G sont les sous-groupes d'indice p et ils sont distingués dans G . Son sous-groupe de FRATTINI est :

$$\Phi(G) = \langle [a, b], g^p ; (a, b, g) \in G^3 \rangle$$

1. Montrer que les sous-groupes maximaux de G sont exactement les sous-groupes d'indice p et qu'ils sont distingués dans G .
2. On note $G^* = \langle [a, b], g^p ; (a, b, g) \in G^3 \rangle$, où $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.
 - (a) Montrer que G^* est un sous-groupe distingué de G , que G/G^* est abélien d'exposant p .
 - (b) Soit H un sous-groupe distingué de G tel que G/H soit abélien d'exposant p . Montrer que $G^* \subset H$.
3. Soient $M_1, \dots, M_r$ tous les sous-groupes maximaux de G . En utilisant l'application $f : g \in G \mapsto (gM_k)_{1 \leq k \leq r} \in \prod_{k=1}^r G/M_k$ montrer que le groupe $G/\Phi(G)$ est abélien d'exposant p .
4. Montrer que $\Phi(G) = G^*$.





PROBLÈME 3



Le groupe linéaire $GL(E)$

3.1 Rappels de cours

Un sous-groupe H d'un groupe G est dit distingué (ou normal) si on a $H = g^{-1}Hg$ pour tout $g \in G$.

Le centre (ou commutateur) $Z(G)$ d'un groupe G est la partie de G formée des éléments de G qui commutent à tous les autres éléments de G , soit $Z(G) = \{h \in G, \forall g \in G, gh = hg\}$.

La notion de déterminant et ses principales propriétés sont supposées acquises.

Pour E espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, le choix d'une base de E permet de réaliser un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et un isomorphisme de groupes de $GL(E)$ sur $GL_n(\mathbb{K})$.

L'adjoint de $u \in \mathcal{L}(E)$ est l'endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E^*)$ défini par :

$$\forall \varphi \in E^*, u^*(\varphi) = \varphi \circ u$$

Si E est un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, une isométrie (ou application orthogonale) de E est une application $u : E \rightarrow E$ qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Si u un endomorphisme d'un espace normé E , les assertions suivantes sont alors équivalentes :

- u est continue en 0 ;
- u est continue sur E ;
- u est bornée sur la sphère [resp. sur la boule] unité de $(E, \|\cdot\|)$;
- il existe une constante réelle c telle que $\|u(x)\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in E$;
- u est uniformément continue sur E .

En notant $\mathcal{L}(E)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans E , on peut alors le munir de la norme définie par :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \|u\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \quad (3.1)$$

On a $\|Id\| = 1$ et pour tous u, v dans $\mathcal{L}(E)$, on a $\|u \circ v\| \leq \|u\| \|v\|$, ce qui se traduit en disant que $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre normée.

3.2 Énoncé

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ou infinie, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est l'espace dual de E , $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E et $\text{GL}(E) = (\mathcal{L}(E))^\times$ est le groupe des automorphismes de E .

Pour E de dimension finie, on note $\text{SL}(E)$ le sous-ensemble de $\text{GL}(E)$ défini par $\text{SL}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E), \det(u) = 1\}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note Id [resp. I_n] l'endomorphisme [resp. la matrice] identité.

– I – Transvections et dilatations

Pour $1 \leq i, j \leq n$, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) (ligne i et colonne j) qui vaut 1. On rappelle que la famille $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit φ une forme linéaire non nulle sur E .

Une *transvection* d'hyperplan $\ker(\varphi)$ est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall x \in E, u(x) = x + \varphi(x)a \quad (3.2)$$

où $a \in \ker(\varphi)$.

Une *dilatation* d'hyperplan $\ker(\varphi)$ est un automorphisme $u \in \text{GL}(E)$ défini par :

$$\forall x \in E, u(x) = x + \varphi(x)a \quad (3.3)$$

où $a \in E \setminus \ker(\varphi)$.

On notera $\tau_{\varphi,a} = Id + \varphi \cdot a$ une transvection définie par (3.2), où $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ et $a \in \ker(\varphi)$ et $\delta_{\varphi,a} = Id + \varphi \cdot a$ une dilatation définie par (3.3) où $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ et $a \in E \setminus \ker(\varphi)$.

1. Montrer que :

- (a) une forme linéaire φ sur E non identiquement nulle est surjective ;
- (b) un hyperplan de E est un sous-espace de E supplémentaire d'une droite.

2. Montrer que :

- (a) un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie si, et seulement, il laisse stable toute droite de E ;
- (b) si $u \in \mathcal{L}(E)$ laisse stable tout hyperplan de E , son adjoint $u^* \in \mathcal{L}(E^*)$ laisse alors stable toute droite de E^* ;
- (c) un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie si, et seulement, il laisse stable tout hyperplan de E ;
- (d) le centre de $\mathcal{L}(E)$ est le groupe des homothéties.

3. Pour cette question, le corps $\mathbb{K}$ est infini et E est de dimension finie $n \geq 2$.

- (a) Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe une infinité de scalaires λ tels que $u - \lambda Id$ soit inversible.

- (b) En déduire que pour tous u et v dans $\mathcal{L}(E)$, $u \circ v$ et $v \circ u$ ont même polynôme caractéristique et même polynôme minimal.

4.

- (a) Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une transvection si, et seulement si, il existe un hyperplan H de E tel que $u|_H = Id_H$ et $\text{Im}(u - Id) \subset H$.
- (b) Montrer qu'une transvection $\tau_{\varphi, a}$ est un isomorphisme de E , son inverse étant la transvection $\tau_{\varphi, -a}$, puis que 1 est son unique valeur propre, l'espace propre associé étant $\ker(\varphi)$ si $u \neq Id$.
- (c) Montrer que le conjugué dans le groupe $\text{GL}(E)$ d'une transvection est une transvection.
- (d) Montrer que l'ensemble $T(H)$ des transvections d'hyperplan $H = \ker(\varphi)$ est un sous groupe commutatif de $\text{GL}(E)$ isomorphe au groupe additif $(H, +)$.
- (e) Montrer qu'une transvection u admet un polynôme minimal qui est $X - 1$ si $u = Id$ ou $(X - 1)^2$ si $u \neq Id$.

5. Pour cette question, E est de dimension finie $n \geq 2$.

- (a) Montrer qu'un isomorphisme $u \in \text{GL}(E) \setminus \{Id\}$ est une transvection si, et seulement si, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $T_n = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n + E_{n-1, n}$ avec $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Une transvection est donc dans $\text{SL}(E)$ et non diagonalisable si elle est différente de Id .
- (b) Montrer qu'un isomorphisme $u \in \text{GL}(E) \setminus \{Id\}$ est une transvection si, et seulement si, il existe une base dans laquelle la matrice de u est de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ où $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
- (c) Montrer qu'un isomorphisme $u \in \text{GL}(E) \setminus \{Id\}$ est une transvection si, et seulement si, $\text{rg}(u - Id) = 1$ et le polynôme caractéristique de u est $P_u(X) = (X - 1)^n$.
- (d) Pour $\mathbb{K}$ infini, montrer que toute transvection différente de Id s'écrit comme produit de deux matrices diagonalisables inversibles.

6.

- (a) Montrer que $u \in \text{GL}(E)$ est une dilatation si, et seulement si, il existe un hyperplan H de E tel que $u|_H = Id_H$ et u est diagonalisable de valeurs propres 1 et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ (donc $E = \ker(u - Id) \oplus \ker(u - \lambda Id)$). On dit que u est une dilatation de rapport λ . Pour $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2 et $\lambda = -1$, on dit que u est une réflexion d'hyperplan $H = \ker(\varphi)$.
- (b) Montrer que le conjugué dans le groupe $\text{GL}(E)$ d'une dilatation est une dilatation de même rapport.
- (c) Montrer qu'une dilatation u de rapport λ admet un polynôme minimal qui est $(X - 1)(X - \lambda)$.
- (d) Montrer que l'inverse d'une dilatation de rapport λ est une dilatation de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

7. Pour cette question, E est de dimension finie $n \geq 2$.

- (a) Montrer qu'un isomorphisme $u \in \mathrm{GL}(E)$ est une dilatation si, et seulement si, il existe une base dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = I_n + (\lambda - 1) E_{n,n}$$

avec $\lambda = \det(u) \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$.

- (b) Montrer que deux dilatations sont conjuguées dans $\mathrm{GL}(E)$ si, et seulement si, elles ont même rapport.

– II – Généralités sur les groupes $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$

Sauf précision contraire, E est de dimension finie $n \geq 2$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) $u \in \mathrm{GL}(E)$;
- (b) $\ker(u) = \{0\}$ (i. e. u injectif) ;
- (c) $\mathrm{Im}(u) = E$ (i. e. u surjectif) ;
- (d) il existe $v \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}$;
- (e) il existe $w \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $w \circ u = \mathrm{Id}$.

2. Le résultat de la question précédente est-il valable en dimension infinie ?

3.

- (a) Montrer que $\mathrm{SL}(E)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}(E)$.
- (b) On suppose que $n = 2$. Quels sont les éléments d'ordre 2 du groupe $\mathrm{SL}(E)$?¹
- (c) Montrer que, pour $n \geq 3$, toutes les transvections différentes de Id sont conjuguées dans $\mathrm{SL}(E)$.
- (d) Que se passe-t-il pour $n = 2$?

4.

- (a) Déterminer le centre de $\mathrm{GL}(E)$, pour E de dimension finie ou infinie.
- (b) Déterminer le centre de $\mathrm{GL}(E)$, pour E de dimension finie.

5. Les groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ peuvent-ils être isomorphes ?

6. En supposant que le corps $\mathbb{K}$ est infini, montrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ formée d'isomorphismes

7. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ est un corps fini à q éléments ($q = p^r$, où $p \geq 2$ est un nombre premier).

1. d'après Agrégation 2013, mathématiques générales

- (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\text{card}(\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)) = \prod_{k=1}^n (q^n - q^{k-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^n (q^j - 1)$$

$$\text{card}(\text{SL}_n(\mathbb{F}_q)) = q^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (q^n - q^{k-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=2}^n (q^j - 1)$$

- (b) Montrer qu'il existe un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ de cardinal égal à $q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
 (c) Montrer que si $\mathbb{L}$ est un corps tel que les groupes $\text{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ et $\text{SL}_n(\mathbb{L})$ soient isomorphes (pour $n \geq 2$), alors $\mathbb{L}$ est isomorphe à $\mathbb{F}_q$ (i. e. $\mathbb{L}$ est un corps fini à q éléments).

– III – Générateurs de $\text{SL}(E)$ et $\text{GL}(E)$

E est de dimension finie $n \geq 2$.

1. On se propose de montrer que, pour E de dimension $n \geq 2$, le groupe $\text{SL}(E)$ est engendré par l'ensemble des transvections.

- (a) Soient H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E et $a \in E \setminus (H_1 \cup H_2)$.
- Montrer que $H = H_1 \cap H_2 \oplus \mathbb{K}a$ est un hyperplan de E .
 - Montrer que $E = H + H_1 = H + H_2$.
 - Montrer qu'il existe une transvection u telle que $u(a) = a$ et $u(H_1) = H_2$ (pour $a_2 \in H_2 \setminus H$, on justifiera l'existence de $a_1 \in H_1 \setminus H$ et $b \in H$ tels que $a_2 = a_1 + b$, puis on peut considérer la transvection $\tau_{\varphi, b}$ où φ est une équation de H telle que $\varphi(a_1) = 1$).
- (b) Montrer que pour tous x, y non nuls dans E , il existe $u \in \text{SL}(E)$ produit de une ou deux transvections tel que $y = u(x)$.
- (c) Montrer que le groupe $\text{SL}(E)$ est engendré par l'ensemble des transvections.

2.

- (a) Montrer que, pour E de dimension $n \geq 2$, le groupe $\text{GL}(E)$ est engendré par l'ensemble des dilatations et des transvections.
 (b) Montrer que, pour $\mathbb{K}$ infini et E de dimension $n \geq 2$, le groupe $\text{GL}(E)$ est engendré par l'ensemble des matrices diagonalisables inversibles.

3.

- (a) On suppose que E est de dimension finie $n \geq 2$ sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ à $q = p^m$ éléments, où $p \geq 2$ est un nombre premier et on se donne un morphisme de groupes γ de $\text{GL}(E)$ dans $\mathbb{F}_q^*$.
 (b) Montrer qu'il existe un entier naturel r compris entre 0 et $q - 2$ tel que pour toute dilatation u de rapport, on ait $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$, $\gamma(u) = \lambda^r$.
 (c) Montrer que, pour toute transvection u , on a $\gamma(u) = 1$.

- (d) Dédurre de ce qui précède que pour tout $u \in \text{GL}(E)$, on a $\gamma(u) = (\det(u))^r$.

– IV – Sous-groupes de $\text{GL}(E)$

E est de dimension finie $n \geq 1$.

1. Montrer que si $(G, \cdot)$ est un groupe tel que tout ses éléments sont d'ordre au plus égal à 2, G est alors commutatif. Si de plus que G est fini, montrer qu'il existe alors un entier $p \geq 0$ tel que $\text{card}(G) = 2^p$.
2. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E diagonalisables (l'ensemble I ayant au moins deux éléments). Montrer qu'il existe une base commune de diagonalisation dans E pour la famille $(u_i)_{i \in I}$ si, et seulement si, ces endomorphismes commutent deux à deux.
3. On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2.
 - (a) Montrer que si G est un sous-groupe multiplicatif fini de $\text{GL}(E)$ tel que tout élément de G soit d'ordre au plus égal à 2, alors tous les éléments de G sont diagonalisables et G est commutatif de cardinal inférieur ou égal à 2^n .
 - (b) En déduire que, si F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, alors les groupes multiplicatifs $\text{GL}(E)$ et $\text{GL}(F)$ sont isomorphes si, et seulement si, $\dim(F) = \dim(E)$.
4. Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}(E)$ de cardinal $p \geq 2$.
 - (a) Montrer que $v = \frac{1}{p} \sum_{u \in G} u$ est un projecteur.
 - (b) Montrer que $\sum_{u \in G} \text{tr}(u)$ est un entier divisible par p .
 - (c) En supposant que $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, montrer que si $\sum_{u \in G} \text{tr}(u) = 0$, on a alors $\sum_{u \in G} u = 0$.
5. On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle.
 - (a) Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, 0 est alors l'unique valeur propre de u et $\text{Tr}(u) = 0$.
 - (b) Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si, et seulement si, $\text{Tr}(u^k) = 0$ pour tout k compris entre 1 et n .
 - (c) Pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, montrer que u est nilpotent si, et seulement si, 0 est la seule valeur propre de u .
 - (d) Pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, donner une deuxième démonstration du fait que $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si, et seulement si, $\text{Tr}(u^k) = 0$ pour tout k compris entre 1 et n .
 - (e) Soient G un sous-groupe de $\text{GL}(E)$, F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par G , $\mathcal{B} = (u_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de F extraite de G et l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow \mathbb{K}^p \\ u &\mapsto (\text{tr}(u \circ u_1), \dots, \text{tr}(u \circ u_p)) \end{aligned}$$

Montrer que si u, v dans G sont tels que $\varphi(u) = \varphi(v)$, on a alors :

$$\begin{cases} \forall w \in G, \operatorname{tr}(u \circ v^{-1} \circ w) = \operatorname{tr}(w) \\ \forall k \geq 1, \operatorname{tr}\left((u \circ v^{-1})^k\right) = n \end{cases}$$

et en déduire que $u \circ v^{-1} - Id$ est nilpotent.

- (f) En gardant les notations de la question précédente et en supposant que tous les éléments de G sont diagonalisables, montrer que φ est injective.
 - (g) Montrer que si G est un sous-groupe de $GL(E)$ tel que tous ses éléments sont diagonalisables et $\operatorname{tr}(G)$ est fini, il est alors fini.
 - (h) Pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, montrer qu'un sous-groupe G de $GL(E)$ est fini si, et seulement si, il est d'exposant fini (c'est-à-dire qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^m = Id$ pour tout $u \in G$). Ce résultat est un théorème de BURNSIDE.
6. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries de E .
- (a) Montrer qu'une application $u : E \rightarrow E$ est une isométrie si, et seulement si, elle est linéaire et conserve la norme, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, on a $\|u(x)\| = \|x\|$.
 - (b) Montrer que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. $\mathcal{O}(E)$ est le groupe orthogonal de E .
 - (c) Que se passe-t-il en dimension infinie.
 - (d) On note $\mathcal{O}^+(E) = \{u \in \mathcal{O}(E), \det(u) = 1\}$ l'ensemble des isométries positives (ou rotations vectorielles). Montrer que $\mathcal{O}^+(E)$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{O}(E)$ d'indice 2.
 - (e) On désigne par S la sphère unité de E . Montrer que l'application $(u, x) \in \mathcal{O}^+(E) \times S \mapsto u \cdot x = u(x)$ définit une action transitive de $\mathcal{O}^+(E)$ sur S .

– V – Topologie sur $GL(E)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Pour cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

$GL(E)$ désigne le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ ($u \in GL(E)$ signifie que u est linéaire, continue, bijective et d'inverse u^{-1} continu).

Dans le cas où l'espace E est de dimension finie, toutes les normes équivalentes et tout endomorphisme est continu.

1. Pour cette question, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de BANACH et $\mathcal{L}(E)$ est l'espace des applications linéaires continues de E dans E muni de la norme définie par (3.1).
 - (a) Montrer que $\mathcal{L}(E)$ est un espace de BANACH.
 - (b) Montrer que, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u\| < 1$, l'endomorphisme $Id - u$ est dans $GL(E)$ d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$.
 - (c) Montrer que $GL(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$.
 - (d) Montrer que l'application $u \mapsto u^{-1}$ est continue sur $GL(E)$.

- (e) Pour cette question, E est l'espace $\mathbb{C}[X]$ normé par :

$$\forall P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X], \quad \|P\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$$

- i. Montrer que l'application $u : P \in \mathbb{C}[X] \mapsto XP \in \mathbb{C}[X]$ est linéaire et continue.
- ii. Montrer que $B(u, 1) \cap \mathrm{GL}(E) = \emptyset$ et en déduire que $\mathrm{GL}(E)$ n'est pas dense dans $\mathcal{L}(E)$.

On suppose pour les questions qui suivent que E est de dimension finie $n \geq 1$.

2.

- (a) Montrer, en exploitant la dimension finie, que $\mathrm{GL}(E)$ est un ouvert dense de $\mathcal{L}(E)$ et que l'application $u \mapsto u^{-1}$ est continue de $\mathrm{GL}(E)$ dans $\mathrm{GL}(E)$.
- (b) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais fermé dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
- (c) Montrer, en utilisant la densité de $\mathrm{GL}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$, qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ formée d'isomorphismes.
- (d) Pour tout entier $n \geq 2$, toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tous i, j compris entre 1 et n , on note $A_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ déduite de A en supprimant la ligne i et la colonne j . Le scalaire $\det(A_{i,j})$ est le mineur d'indice (i, j) et le scalaire $(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$ est le cofacteur d'indice (i, j) . La comatrice de A est la matrice :

$$C(A) = \left(\left((-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \right) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(C(A)) = (\det(A))^{n-1}$$

- (e) Montrer que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad C(AB) = C(A)C(B)$$

- (f) Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors leurs comatrices le sont aussi.

3.

- (a) Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.
- (b) Montrer que, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathrm{GL}(E)$ est connexe par arcs.
- (c) Montrer que, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathrm{SL}(E)$ est connexe par arcs.
- (d) Montrer que, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathrm{GL}(E)$ n'est pas connexe, puis que ses composantes connexes sont les ouverts de $\mathcal{L}(E)$:

$$\mathrm{GL}^+(E) = \{u \in \mathrm{GL}(E), \det(u) > 0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{GL}^-(E) = \{u \in \mathrm{GL}(E), \det(u) < 0\}$$

Ce résultat permet de définir une orientation sur un espace vectoriel réel E de dimension n . On dit que deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E définissent la même orientation si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$.

4. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- (a) Montrer que si G est un sous-groupe borné de $\mathrm{GL}(E)$, alors toutes les valeurs propres des éléments de G sont de module égal à 1, puis que tous ses éléments sont diagonalisables.
 - (b) Montrer que :
 - i. si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $\lambda \neq 1$ et $|\lambda| = 1$, il existe alors un entier naturel p tel que $|1 - \lambda^p| > \sqrt{2}$;
 - ii. le seul sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ contenu dans la boule de centre Id et de rayon $\sqrt{2}$ est $\{Id\}$.





Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$

4.1 Rappels de cours

Soit $(G, \cdot)$ un groupe multiplicatif.

Définition Si X est une partie de G , le sous-groupe de G engendré par X est l'intersection notée $\langle X \rangle$ de tous les sous-groupes de G qui contiennent X .

En notant, pour X non vide, $X^{-1} = \{x^{-1}, x \in X\}$, les éléments de $\langle X \rangle$ sont de la forme $x_1 \cdots x_r$ où $r \in \mathbb{N}^*$ et les x_k pour $1 \leq k \leq r$ sont dans $X \cup X^{-1}$. On a aussi :

$$\langle X \rangle = \left\{ \prod_{k=1}^r x_k^{\varepsilon_k}, r \in \mathbb{N}^*, x_k \in X \text{ et } \varepsilon_k \in \{-1, 1\} \text{ pour } 1 \leq k \leq r \right\}$$

Dans le cas où les éléments de X sont en nombre fini et commutent, on a le résultat suivant.

Théorème Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout p -uplet $(g_k)_{1 \leq k \leq p}$ d'éléments de G qui commutent deux à deux, on a $H = \langle g_1, \dots, g_p \rangle = \left\{ \prod_{k=1}^p g_k^{\alpha_k}, (\alpha_k)_{1 \leq k \leq p} \in \mathbb{Z}^p \right\}$ et H est commutatif.

Définition L'ordre de $g \in G$ est $\theta(g) = \mathrm{card}(\langle g \rangle) \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, où $\langle g \rangle$ désigne le sous-groupe de G engendré par g .

Pour $g \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- g est d'ordre n ;
- $g^n = 1$ et $g^k \neq 1$ pour tout k est compris entre 1 et $n-1$ ($\theta(g)$ est le plus petit entier naturel non nul tel que $g^n = 1$) ;
- pour $k \in \mathbb{Z}$, on a $g^k = 1$ si, et seulement si, k est multiple de n .

Définition Si H est un sous-groupe de G , le cardinal de l'ensemble quotient G/H est noté $[G : H]$ et on l'appelle l'indice de H dans G .

Théorème (LAGRANGE) Soient G un groupe fini d'ordre $n \geq 2$ et H un sous-groupe de G . Pour tout $g \in G$ on a $\mathrm{card}(gH) = \mathrm{card}(H)$ et $\mathrm{card}(G) = [G : H] \mathrm{card}(H)$, donc l'ordre de H divise celui de G .

Définition On dit qu'un sous-groupe H de G est distingué, si on a $gH = Hg$ pour tout $g \in G$.

Si H est un sous-groupe distingué de G , l'ensemble quotient G/H est alors un groupe.

Théorème Pour tout nombre premier $p \geq 2$, on a en notant $\mathbb{F}_p = \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$:

$$\mathrm{card}(\mathrm{GL}(\mathbb{F}_p^n)) = \prod_{k=1}^n (p^n - p^{k-1}) = p^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^n (p^k - 1)$$

Un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^n$ est une application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto \varphi(x, y) \end{aligned}$$

telle que pour tout $y \in \mathbb{C}^n$ l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire, $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$ pour tous x, y dans $\mathbb{C}^n$ et $\varphi(x, x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

On note $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ un tel produit scalaire et $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Théorème (Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ) On a $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ pour tous x, y dans $\mathbb{C}^n$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, x et y sont liés.

Théorème (Inégalité de MINKOWSKI) On a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous x, y dans $\mathbb{C}^n$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, $x = \lambda y$ avec $\lambda \geq 0$ (on dit que x et y sont positivement liés).

La matrice adjointe d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est $A^* = (\overline{a_{ji}})_{1 \leq i, j \leq n}$. Elle est aussi définie par $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ pour tous x, y dans $\mathbb{C}^n$.

Définition On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est unitaire si $A^*A = I_n$.

On note $U_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices unitaires.

On peut également dire qu'une matrice unitaire est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à une base orthonormée où $\mathbb{C}^n$ est muni de sa structure hermitienne canonique. $U_n(\mathbb{C})$ est un sous groupe multiplicatif de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et l'application $A \mapsto \det(A)$ réalise un morphisme de groupe de $U_n(\mathbb{C})$ sur le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Les valeurs propres d'une matrice unitaire sont de module égal à 1.

Définition Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite normale si $A^*A = AA^*$.

Les matrices hermitiennes et unitaires sont des cas particuliers de matrices normales.

Théorème Les conditions suivantes sont équivalentes pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$:

- la matrice A est diagonalisable ;
- le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$ de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, chaque λ_k étant de multiplicité $\alpha_k = \dim(\ker(A - \lambda_k I_n))$;
- il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$;
- le polynôme minimal est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$.

Théorème Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est normale, elle se diagonalise alors dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une matrice unitaire U et une matrice diagonale D telles que $A = UDU^*$, les coefficients diagonaux de D étant les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de la matrice A .

Théorème Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que les A_i commutent deux à deux et sont diagonalisables. Il existe alors une base commune de diagonalisation. Pour les A_i normales, une telle base commune de diagonalisation est orthonormée.

4.2 Énoncé

Pour tout entier $n \geq 2$, l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est muni de sa structure hermitienne canonique, le produit scalaire et la norme associée étant respectivement notés $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$;
- $A^* = (\overline{a_{ji}})_{1 \leq i, j \leq n}$ la *matrice adjointe* de $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ le groupe multiplicatif des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;
- $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(A) = 1\}$;
- $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A^*A = I_n\}$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ formé des *matrices unitaires* complexes.

– I – Résultats préliminaires

1. Déterminer les sous-groupes finis du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.
2. Montrer que si G est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $G \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{I_n\}$, il est alors cyclique.
3. Soient G un groupe multiplicatif, a, b dans G et $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ leur commutateur. Montrer que $[a, b]^{-1}a = bab^{-1}$, puis que a commute à $[a, b]$ si, et seulement si, il commute à bab^{-1} .
4. Soit $\mathcal{B} = (v_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \langle Av_i, v_i \rangle$.

5. Pour toutes matrices A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\langle A, B \rangle_F = \mathrm{Tr}(AB^*)$.

- (a) Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- (b) Vérifier que la norme associée $A \mapsto \|A\|_F = \sqrt{\mathrm{Tr}(AA^*)}$ (norme de FROBENIUS) est sous-multiplicative (i. e. $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$ pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et invariante par multiplications à gauche et à droite par une matrice unitaire.
- (c) Calculer $\|A\|_F$ et $\|I_n - A\|_F$ pour toute matrice $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$.
- (d) Pour A, B unitaires, montrer que $|\mathrm{Tr}(AB)| \leq n$ en précisant le cas d'égalité.
- (e) Montrer que pour toute base orthonormée $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{C}^n$ et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\|A\|_F^2 = \sum_{k=1}^n \|Av_k\|^2$.

6. Soient A, B dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$. On se propose de montrer que :

$$\|BA - AB\|_F \leq \sqrt{2} \|I_n - A\|_F \|I_n - B\|_F \quad (4.1)$$

- (a) Montrer (4.1) pour $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ diagonale et $B \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$.
- (b) Montrer (4.1) pour A, B dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$.
- (c) En notant $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$ le commutateur de A, B dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\|I_n - [A, B]\|_F \leq \sqrt{2} \|I_n - A\|_F \|I_n - B\|_F$.

– II – Un théorème de BURNSIDE

Un groupe multiplicatif G est dit *d'exposant fini* s'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $g^m = 1$ pour tout $g \in G$.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $q \geq 1$ tel que $A^{q-1} \neq 0$ et $A^q = 0$. L'entier q ainsi défini est l'*indice de nilpotence* de A .

On note respectivement $\overline{D}(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$, $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ et $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le disque unité fermé, le disque unité ouvert et le cercle unité du plan complexe.

Le but de cette partie est de démontrer le :

Théorème 4.1. Burnside

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- G est fini ;
- G est d'exposant fini ;
- tous les éléments de G sont diagonalisables et $\mathrm{tr}(G)$ est fini.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) A est nilpotente ;
- (b) le polynôme minimal de A est X^q où q est un entier compris entre 1 et n ;

- (c) le polynôme caractéristique de A est X^n ;
 - (d) 0 est l'unique valeur propre complexe de A ;
 - (e) pour tout entier k compris entre 1 et n , on a $\text{Tr}(A^k) = 0$.
2. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est telle que $\text{tr}(A^{k+1}) = \text{tr}(A^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice $A - I_n$ est alors nilpotente.
 3. Soit G un sous-groupe d'exposant fini de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que tous les éléments de G sont diagonalisables de valeurs propres sur le cercle unité $\mathbb{U}$, puis que l'ensemble $\text{tr}(G) = \{\text{tr}(A), A \in G\}$ est fini.
 4. Soient G un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par G , $\mathcal{B} = (E_k)_{1 \leq k \leq p}$ une base de F extraite de G et φ l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \mathbb{C}^p \\ A &\longmapsto (\text{tr}(AE_k))_{1 \leq k \leq p} \end{aligned}$$

- (a) Soient A, B dans G telles que $\varphi(A) = \varphi(B)$. Montrer que pour toute matrice $M \in G$, on a $\text{tr}((AB^{-1} - I_n)M) = 0$, puis en déduire que pour tout entier $k \geq 0$, on a $\text{tr}((AB^{-1})^k) = n$ et conclure à la nilpotence de la matrice $AB^{-1} - I_n$ (on peut utiliser la question **II.2**).
 - (b) Dans le cas où de plus tous les éléments de G sont diagonalisables, montrer que l'application φ est injective.
5. Démontrer le théorème de BURNSIDE.

– III – Sous-groupes finis de $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$

Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ le sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{Z}$;
- $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, à savoir l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ qui sont inversibles d'inverse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ (c'est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$).

Le but de cette partie est de majorer le cardinal des sous-groupes finis de $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ par une quantité ne dépendant que de n .

1. Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), \det(A) = \pm 1\}$.
2. Soit $a = (a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{Z}^n$ où $n \geq 2$.
 - (a) Montrer que si a est l'une des colonnes d'une matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$, les entiers a_i pour $1 \leq i \leq n$ sont alors premiers entre eux dans leur ensemble.
 - (b) Réciproquement, montrer que si les entiers a_i pour $1 \leq i \leq n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble, il existe alors pour tout entier j compris entre 1 et n , une matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ dont la colonne numéro j est a .
3. Pour cette question, on se donne une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ dans le groupe multiplicatif $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ (i. e. $A^m = I_2$ et $A^{m-1} \neq I_2$).

- (a) Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de valeurs propres complexes dans le cercle unité, puis que $\mathrm{Tr}(A) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
 - (b) Dans le cas où les deux valeurs propres de A sont réelles, préciser les valeurs possibles de son ordre m . Donner des exemples de telles matrices pour chaque valeur de m .
 - (c) Dans le cas où les deux valeurs propres de A ne sont pas réelles, préciser les valeurs possibles de son ordre m . Donner des exemples de telles matrices pour chaque valeur de m .
4. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ dans le groupe multiplicatif $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ (pour $n \geq 2$). On suppose que les coefficients de la matrice $A - I_n$ sont tous divisibles par un même entier $p \geq 3$.
- (a) Montrer que la matrice $B = \frac{1}{p}(A - I_n)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres complexes dans le disque unité ouvert $D(0, 1)$, puis qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $B^k = 0$.
 - (b) En déduire que $A = I_n$.
5. On se donne un nombre premier $p \geq 3$ et on désigne par $\mathbb{F}_p$ le corps fini $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$. Pour tout entier relatif a , on note $\tilde{a}$ sa classe d'équivalence modulo p dans $\mathbb{F}_p$.
- (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ et toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, la matrice $\varphi(A) = (\tilde{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.
 - (b) Montrer que l'application $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ est un morphisme de groupes et préciser son noyau.
 - (c) Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que la restriction du morphisme φ à G est un morphisme de groupes injectif dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ (lemme de SERRE). En déduire que $\mathrm{card}(G) \leq \prod_{k=1}^n (3^n - 3^{k-1})$.
6. Soient $p \geq 3$ un entier et $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$ dont toutes les racines complexes sont non nulles dans $\overline{D}(0, 1)$ et tel que $P(pX + 1) = p^n Q(X)$ où $Q \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que :
- (a) $Q(0) = P(1) = 0$;
 - (b) $P(X) = (X - 1)^n$ où $a_n \in \mathbb{Z}^*$.
7. En utilisant le résultat de la question précédente, retrouver celui de la question **III.4** à savoir : la matrice I_n est l'unique matrice d'ordre fini dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ telle que les coefficients de $A - I_n$ sont tous divisibles par un même entier $p \geq 3$.

– IV – Un théorème de JORDAN-SCHUR

Le but de cette partie est de démontrer le :

Théorème 4.2. Jordan-Schur

Tous sous-groupe fini G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ admet un sous-groupe H distingué et commutatif tel que $[G : H] \leq (2\sqrt{2n} + 1)^{2n^2} - (2\sqrt{2n} - 1)^{2n^2}$.

La question qui suit nous dit qu'il nous suffit de montrer ce théorème pour les sous-groupes finis de $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'application :

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle_G = \frac{1}{\mathrm{card}(G)} \sum_{A \in G} \langle Ax, Ay \rangle$$

définit un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^n$, puis que le groupe G est contenu dans le groupe unitaire relatif à ce produit scalaire.

2. Soient A, B dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$ leur commutateur. On suppose que A commute à $[A, B]$.

- (a) Montrer que A commute à $C = BAB^{-1}$.
- (b) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{C}^n$, une suite $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ de nombres complexes dans le cercle unité $\mathbb{U}$ et une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ telles que $Av_k = \lambda_k v_k$ et $Cv_k = \lambda_{\sigma(k)} v_k$ pour tout entier k compris entre 1 et n .
- (c) On suppose que $C \neq A$. Justifier l'existence d'un indice k compris entre 1 et n tel que $\lambda_{\sigma(k)} \neq \lambda_k$. Montrer que les vecteurs v_k et Bv_k sont orthogonaux et que $\|(I_n - B)v_k\| = \|(I_n - B)B^{-1}v_k\| = \sqrt{2}$. En déduire que $\|I_n - B\|_F \geq 2$.
- (d) Dans le cas où la matrice B est telle que $\|I_n - B\|_F < 2$, montrer que les matrices A et B commutent.

3. Soient G un sous-groupe fini de $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et A, B deux matrices dans G telles que $\|I_n - A\|_F < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\|I_n - B\|_F < 2$. On associe à ces matrices, la suite de matrices $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $B_0 = B$ et $B_{k+1} = [A, B_k]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- (a) Montrer que $\|I_n - B_k\|_F < 2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que la suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers I_n .
- (b) En déduire que la suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire sur I_n à partir d'un certain rang, puis que A commute à B .

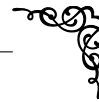
4. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension n^2 sur $\mathbb{C}$ est aussi un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $2n^2$. En identifiant une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à un vecteur de $\mathbb{R}^{2n^2}$, on désigne pour tout réel $R > 0$, respectivement par $B(X, R)$, $\overline{B}(X, R)$ et $S(X, R)$ la boule ouverte, la boule fermée et la sphère de centre X et de rayon R dans $\mathbb{R}^{2n^2}$ euclidien. Le volume d'une boule fermée $\overline{B}(X, R)$ est noté $V(X, R)$ et on a $V(R) = R^{2n^2} V_n$ où V_n est le volume de la boule unité $\overline{B}(0, 1)$. On se donne un sous-groupe fini G de $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et on lui associe le sous-groupe H de G engendré par l'ensemble $\Gamma = \left\{ M \in G, \|I_n - M\|_F < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$.

- (a) Montrer que le sous-groupe H est commutatif et distingué dans G .
- (b) En notant $\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_r$ les éléments distincts du groupe quotient G/H , montrer que pour $1 \leq j \neq k \leq r$, on a $\|A_k - A_j\|_F \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. En déduire que les boules ouvertes $B\left(A_k, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ dans $\mathbb{R}^{2n^2}$, pour $1 \leq k \leq r$, sont deux à deux disjointes.
- (c) En déduire que $[G : H] \leq (2\sqrt{2n} + 1)^{2n^2} - (2\sqrt{2n} - 1)^{2n^2}$.





PROBLÈME 5



Valeurs propres de matrices particulières

5.1 Rappels de cours

Ce problème ne nécessite pas beaucoup de connaissances. Les théorèmes essentiels sont les suivants.

Théorème Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si, et seulement si, il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$.

Théorème (Spectral) Une matrice symétrique réelle A a toutes ses valeurs propres réelles et se diagonalise dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice tPAP soit diagonale.

À toute permutation $\sigma \in S_n$, on associe la matrice de passage P_σ de la base canonique $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}_\sigma = (e_{\sigma(j)})_{1 \leq j \leq n}$ (matrice de permutation associée à σ). Pour tout vecteur $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a $P_\sigma x = (x_{\sigma^{-1}(i)})_{1 \leq i \leq n}$.

Théorème L'application $P : \sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes injectif de S_n dans $GL_n(\mathbb{R})$ et pour toute permutation $\sigma \in S_n$, on a $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ (signature de σ).

Une matrice de permutation est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et ses valeurs propres sont des racines de l'unité.

5.2 Énoncé

L'objet de ce problème est de calculer les valeurs propres de certaines matrices réelles tridiagonales en utilisant les théorèmes de GERSCHGORIN-HADAMARD et de RAYLEIGH-RITZ.

Pour tout entier $n \geq 2$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ [resp. $\mathbb{C}^n$] est muni de sa structure euclidienne [resp. hermitienne] usuelle, le produit scalaire et la norme associée étant respectivement notés $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$ dans les deux cas.

– I – Disques de GERSCHGORIN-HADAMARD

Pour tout nombre complexe z_0 et tout réel $R \geq 0$, on désigne par :

$$\overline{D}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq R\}$$

le disque fermé de centre z_0 et de rayon R dans le plan complexe $\mathbb{C}$.

Pour tout entier $n \geq 2$ et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\text{Sp}(A)$ l'ensemble de toutes ses valeurs propres complexes.

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant et de l'utiliser pour calculer les valeurs propres de certaines matrices réelles tridiagonales.

Théorème 5.1.

Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A . Il existe un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$.

1. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En notant $R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$ pour tout entier i

compris entre 1 et n , montrer que $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{D}(a_{ii}, R_i)$. Les disques fermés

$\overline{D}(a_{ii}, R_i)$ sont les *disques de GERSCHGORIN-HADAMARD*.

2. On se donne $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $bc > 0$ et on lui associe la matrice d'ordre $n \geq 2$:

$$A_n(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que le rang de la matrice $A_n(a, b, c)$ est égal à $n - 1$ ou n .
 (b) En supposant que $c = b$, montrer que la matrice $A_n(a, b, b)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ses valeurs propres étant réelles et simples.

- (c) Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale de termes diagonaux réels strictement positifs, donner une expression de $D^{-1}A_n(a, b, c)D$.
- (d) Montrer que $A_n(a, b, c)$ est semblable à $A_n(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc})$, puis qu'elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres réelles et simples.
- (e) Calculer le déterminant de $A_n(a, 1, 1)$, puis celui de $A_n(a, b, c)$.
- (f) Montrer que toutes les valeurs propres de la matrice :

$$A_n = A_n(0, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont contenues dans $] -2, 2[$, les calculer et donner une base orthonormée de vecteurs propres correspondants dans $\mathbb{R}^n$.

- (g) En déduire les valeurs de $\sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ et de $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.
- (h) Calculer les valeurs propres de $A_n(a, b, c)$.

3. On se donne deux réels a et $b \neq 0$ et on leur associe la matrice d'ordre $n \geq 4$:

$$B_n(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & b \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & b \\ b & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que $\lambda_n = a + 2b$ est une valeur propre simple de $B_n(a, b)$ en précisant l'espace propre associé.
- (b) Pour $n = 2p$ pair, montrer que $\lambda_p = a - 2b$ est une valeur propre simple de $B_n(a, b)$ en précisant l'espace propre associé. Pour n impair, montrer que $a - 2b$ n'est pas valeur propre de $B_n(a, b)$.
- (c) Calculer les valeurs propres de la matrice $B_n(a, b)$ en précisant une base orthonormée de vecteurs propres dans $\mathbb{R}^n$.

– II – Matrices de permutation et matrices circulantes

On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^t\Omega\Omega = I_n\}$ le groupe multiplicatif des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 2$.

On désigne par $\mathcal{S}_n$ le *groupe symétrique* d'indice $n \geq 2$, à savoir le groupe des permutations de l'ensemble $I_n = \{1, \dots, n\}$ et pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $\varepsilon(\sigma)$ sa signature.

À tout entier $n \geq 2$ et toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on associe la matrice de passage $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}_\sigma = (e_{\sigma(j)})_{1 \leq j \leq n}$. On dit que P_σ est la *matrice de permutation* associée à σ .

En désignant par Γ_n la matrice de permutation associée à $\gamma_n = (1, 2, \dots, n)$, le but de cette partie est de montrer le résultat suivant.

Théorème 5.2.

L'ensemble $\mathbb{C}[\Gamma_n]$ des matrices circulantes est une sous-algèbre unitaire et commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension n dont tous les éléments se diagonalisent dans une même base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.

1. Montrer que l'application $P : \sigma \mapsto P_\sigma$ réalise un morphisme de groupes injectif du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ dans le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, puis que pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$:
 - la trace de P_σ est égal au nombre de points fixes de σ ;
 - $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}} = {}^t P_\sigma$;
 - $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.
2. Montrer qu'une matrice de permutation est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ses valeurs propres étant des racines de l'unité.
3. Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par Γ_n la matrice de permutation associée au cycle $\gamma_n = (1, 2, \dots, n) \in \mathcal{S}_n$, à savoir :

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{1,n-1} & 1 \\ I_{n-1} & 0_{n-1,1} \end{pmatrix}$$

Montrer que :

- (a) $\Gamma_n^n = I_n$; $\Gamma_n^{n-1} = \Gamma_n^{-1} = {}^t \Gamma_n$;
 - (b) pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, on a $\Gamma_n^k = \begin{pmatrix} 0_{k,n-k} & I_k \\ I_{n-k} & 0_{n-k,k} \end{pmatrix}$;
 - (c) le polynôme $P_n(X) = X^n - 1$ est le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de Γ_n ;
 - (d) Γ_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} = (\omega_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ où $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, une base orthonormée de vecteurs propres correspondants dans $\mathbb{C}^n$ hermitien étant $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} u_k \right)_{1 \leq k \leq n}$ où $u_k = (\overline{\lambda_k^j})_{1 \leq j \leq n}$.
4. Avec les notations de la question **I.3d**, en notant $v_k = \operatorname{Re}(u_k)$ et $w_k = \operatorname{Im}(u_k)$ pour $1 \leq k \leq n$, montrer que :
 - (a) pour $1 \leq k < \frac{n}{2}$, les vecteurs v_k et w_k sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\|v_k\| = \|w_k\| = \sqrt{\frac{n}{2}}$;

- (b) pour $n = 2p + 1$, la famille de vecteurs $\mathcal{B}_{2p+1} = (f_1, g_1, \dots, f_p, g_p, f_{2p+1})$ où $f_{2p+1} = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}u_{2p+1}$ et $f_k = \sqrt{\frac{2}{2p+1}}v_k$, $g_k = \sqrt{\frac{2}{2p+1}}w_k$ pour $1 \leq k \leq p$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$;
 pour $n = 2p$, la famille de vecteurs $\mathcal{B}_{2p} = (f_1, g_1, \dots, f_{p-1}, g_{p-1}, f_p, f_{2p})$ où $f_k = \sqrt{\frac{1}{p}}v_k$, $g_k = \sqrt{\frac{1}{p}}w_k$ pour $1 \leq k \leq p-1$, $f_p = \frac{1}{\sqrt{2p}}u_p$ et $f_{2p} = \frac{1}{\sqrt{2p}}u_{2p}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$;
 (c) pour $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma_n(v_k) &= \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)v_k - \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)w_k \\ \Gamma_n(w_k) &= \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)v_k + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)w_k\end{aligned}$$

- (d) pour $n = 2p + 1$, Γ_n est semblable à la matrice diagonale par blocs :

$$D_{2p+1} = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & R_p & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $R_k = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{2p+1}\right) & \sin\left(\frac{2k\pi}{2p+1}\right) \\ -\sin\left(\frac{2k\pi}{2p+1}\right) & \cos\left(\frac{2k\pi}{2p+1}\right) \end{pmatrix}$ pour $1 \leq k \leq p$ et pour $n = 2p$,
 la matrice Γ_n est semblable à la matrice diagonale par blocs :

$$D_{2p} = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & R_{p-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $R_k = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{k\pi}{p}\right) & \sin\left(\frac{k\pi}{p}\right) \\ -\sin\left(\frac{k\pi}{p}\right) & \cos\left(\frac{k\pi}{p}\right) \end{pmatrix}$ pour $1 \leq k \leq p-1$.

5. On reprend la matrice d'ordre $n \geq 4$ étudiée avec la question **I.3** :

$$B_n(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & b \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & b \\ b & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

où a, b sont deux réels avec $b \neq 0$. Montrer que :

$$B_n(a, b) = aI_n + b(\Gamma_n + {}^t\Gamma_n) = aI_n + b(\Gamma_n + \Gamma_n^{n-1})$$

puis retrouver le fait que cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en précisant ses valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres dans $\mathbb{R}^n$.

6. On note $\mathcal{C}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[\Gamma_n]$ l'ensemble des matrices de la forme $P(\Gamma_n)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que :

- (a) $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre unitaire et commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension égale à n en précisant une base ;
- (b) $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & a_3 & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = (a_{i-j \bmod n})_{1 \leq i, j \leq n}$$

où $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont des nombres complexes. Les matrices de $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ sont appelées *matrices circulantes* ;

- (c) tous les éléments de $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ se diagonalisent dans une même base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ que l'on précisera.

7. Retrouver les résultats de la question **I.3c** en utilisant la question précédente.

– III – Quotient de RAYLEIGH-RITZ

On se donne une matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ d'ordre $n \geq 2$.

La matrice A se diagonalise dans une base orthonormée $\mathcal{B}_1 = (f_k)_{1 \leq k \leq n}$ associée aux valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ (i. e. $Af_k = \lambda_k f_k$ pour $1 \leq k \leq n$).

Le *quotient de RAYLEIGH-RITZ* associé à la matrice A est l'application :

$$\begin{aligned} R_A : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} \end{aligned}$$

Le but de cette partie est de montrer que $\lambda_1 = \min_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} R_A(x)$ et $\lambda_n = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} R_A(x)$.

1. Calculer $R_A(x)$ pour tout vecteur propre non nul de la matrice A .
2. Donner une expression dans la base $\mathcal{B}_1$ de $R_A(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
3. Montrer que $\lambda_1 = \min_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} R_A(x)$ et $\lambda_n = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} R_A(x)$, la borne inférieure λ_1 [resp. la borne supérieure λ_n] étant atteinte si, et seulement si, x est un vecteur propre non nul associé à cette valeur propre (théorème de RAYLEIGH-RITZ).

4. Pour cette question, on donne un vecteur $y = (y_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ auquel on associe la matrice $A = y {}^t y$. En utilisant le quotient de RAYLEIGH-RITZ.
- (a) Montrer que A est de rang égal à 1, puis en déduire ses valeurs propres.
 - (b) Déduire l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ du théorème de RAYLEIGH-RITZ.

– IV – Inégalités de WIRTINGER

Le but de cette partie est d'utiliser les quotients de RAYLEIGH-RITZ pour montrer le résultat suivant.

Théorème 5.3.

Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, on a alors $\int_0^1 (f')^2(t) dt \geq \pi^2 \int_0^1 f^2(t) dt$.

1. En posant $x_0 = x_{n+1} = 0$, montrer que pour tout $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$ où $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k)^2 = \langle Ax, x \rangle$$

où $A = A_n(2, -1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, puis en déduire que :

$$4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2(n+1)} \right) \|x\|^2 \leq \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k)^2 \leq 4 \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2(n+1)} \right) \|x\|^2$$

en précisant les cas d'égalité (inégalités discrètes de WIRTINGER).

2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. En utilisant des sommes de RIEMANN, montrer que $\int_0^1 (f')^2(t) dt \geq \pi^2 \int_0^1 f^2(t) dt$ (inégalité faible de WIRTINGER). L'égalité peut-elle être réalisée ?
En utilisant l'égalité de PARSEVAL dans le cadre des séries de FOURIER, on peut en fait montrer que $\int_0^1 (f')^2(t) dt \geq 4\pi^2 \int_0^1 f^2(t) dt$.
3. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que :
- (a) la fonction φ définie sur $]0, 1[$ par $\varphi(t) = f(t) \cotan(\pi t)$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$;

- (b) $\int_0^1 f(t) f'(t) \cotan(\pi t) dt = \frac{\pi}{2} \int_0^1 f^2(t) (1 + \cotan^2(\pi t)) dt$, puis retrouver l'inégalité faible de WIRTINGER.





PROBLÈME 6



Commutant d'un endomorphisme en dimension finie

6.1 Rappels de cours

$\mathbb{K}$ est un corps commutatif, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et u est un endomorphisme de E .

On note $u^0 = \text{Id}$ et on définit les puissances successives de u par la relation de récurrence $u^{k+1} = u \circ u^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui permet de définir, pour tout polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$

dans $\mathbb{K}[X]$, l'endomorphisme $P(u) = \sum_{k=0}^p a_k u^k$. On note $\mathbb{K}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\}$ et cet ensemble est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau commutatif de $\mathcal{L}(E)$. On définit de manière analogue la sous algèbre $\mathbb{K}[A]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendrée par une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'idéal annulateur de u est l'idéal I_u des polynômes qui annulent u et le *polynôme minimal* de u est le générateur unitaire de cet idéal. On le note π_u .

On définit de manière analogue l'idéal annulateur et le polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème Les valeurs propres de u sont les racines de son polynôme minimal.

Théorème Soient $p \geq 2$ un entier, $P_1, \dots, P_p$ des polynômes non nuls dans $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux et $P = \prod_{k=1}^p P_k$. On a $\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}(P_k(u))$ et pour tout k compris entre 1 et p , le projecteur $\pi_k : \text{Ker}(P(u)) \longrightarrow \text{Ker}(P_k(u))$ est un élément de $\mathbb{K}[u]$.

En notant $\pi_u = \prod_{k=1}^p P_k^{\beta_k}$ la décomposition du polynôme minimal π_u en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$, on déduit du théorème de décomposition des noyaux que $E = \bigoplus_{k=1}^p \text{Ker} \left(P_k^{\beta_k}(u) \right)$, chaque sous-espace vectoriel $E_k = \text{Ker} \left(P_k^{\beta_k}(u) \right)$ étant stable par u .

Théorème (CAYLEY-HAMILTON) Si χ_u est le polynôme caractéristique de u , on a alors $\chi_u(u) = 0$.

Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique, donc $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\pi_u) \leq n$.
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe un entier $q \geq 1$ tel que $u^{q-1} \neq 0$ et $u^q = 0$ (q est l'indice de nilpotence de u), ce qui équivaut à dire que $\pi_u(X) = X^q$.

Du théorème de BÉZOUT, on déduit le théorème de décomposition des noyaux.

Théorème (Décomposition des noyaux) Soient $(P_j)_{1 \leq j \leq p}$ une famille de $p \geq 2$ polynômes deux à deux premiers entre eux dans $\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ et $P = \prod_{k=1}^p P_k$. On a $\ker(P(u)) = \bigoplus_{k=1}^p \ker(P_k(u))$ et les projecteurs $\pi_k : \ker(P(u)) \rightarrow \ker(P_k(u))$ pour $1 \leq k \leq p$, sont des éléments de $\mathbb{K}[u]$.

6.2 Énoncé

Pour ce problème, $\mathbb{K}$ est un corps commutatif de caractéristique nulle et E, F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives $n \geq 1$ et $m \geq 1$.

Pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $\mathbb{K}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\}$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par u et π_u le polynôme minimal de u .

On définit de manière analogue la sous-algèbre $\mathbb{K}[A]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendrée par une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et le polynôme minimal π_A de A .

– I – Résultats préliminaires

1. Montrer qu'un polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ est sans facteurs carrés dans sa décomposition en facteurs irréductibles si, et seulement si, P et P' sont premiers entre eux.
2. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, l'espace vectoriel $\mathbb{K}[u]$ est de dimension égale au degré du polynôme minimal π_u . En donner une base.

– II – Endomorphismes et sous-espaces cycliques

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit *cyclique*, s'il existe un vecteur $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que la famille de vecteurs $\mathcal{B}_0 = (u^k(x_0))_{0 \leq k \leq n-1}$ soit une base de E . Un sous-espace vectoriel F de E stable par u est dit *cyclique* s'il n'est pas réduit à $\{0\}$ et si la restriction de u à F est cyclique.

On se donne $u \in \mathcal{L}(E)$ et pour tout $x \in E$, on note $E_{u,x} = \text{Vect} \{u^k(x), k \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, l'ensemble $I_{u,x} = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x) = 0\}$ est un idéal non trivial de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ (i. e. distinct de $\{0\}$ et de $\mathbb{K}[X]$). On note $\pi_{u,x}$ le générateur unitaire de cet idéal.
2. Montrer qu'un endomorphisme nilpotent $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique si, et seulement si, son indice de nilpotence vaut n .
3. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F de E est cyclique si, et seulement si, il existe un vecteur $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que $F = E_{u,x_0}$.
4. Le but de cette question est de montrer par récurrence sur la dimension $n \geq 1$ de E le théorème de réduction de JORDAN suivant : pour tout endomorphisme nilpotent $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un entier $r \geq 1$ et des sous-espaces cycliques

$$F_1, \dots, F_r \text{ tels que } E = \bigoplus_{k=1}^r F_k.$$

- (a) Étudier le cas où $u = 0$.

Pour la suite de cette question, on suppose que u est nilpotent non nul, donc d'ordre de nilpotence $q \geq 2$.

Pour $n = 1$, un endomorphisme nilpotent est nul et le cas est traité. En supposant le résultat acquis jusqu'au rang $n-1 \geq 1$, on se donne $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.

- (b) Montrer que $\text{Im}(u)$ est un sous-espace strict de E .

- (c) Justifier l'existence de $r \geq 1$ vecteurs non nuls $x_1, \dots, x_r$ dans E tels que

$$\text{Im}(u) = \bigoplus_{k=1}^r E_{u,u(x_k)}.$$

- (d) Montrer que $E = \ker(u) + \sum_{k=1}^r E_{u,x_k}$.

- (e) En désignant par H un supplémentaire de $\ker(u) \cap \text{Im}(u)$ dans $\ker(u)$, montrer que $E = H + \sum_{k=1}^r E_{u,x_k}$.

- (f) Montrer que la somme précédente est directe, soit que $E = H \oplus \bigoplus_{k=1}^r E_{u,x_k}$.

- (g) Conclure.

5. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent et $E = \bigoplus_{k=1}^r F_k$ une décomposition

en sous-espaces cycliques (question II.4). Pour tout entier k compris entre 1 et r , on se donne une base $\mathcal{B}_k = (u^j(x_k))_{0 \leq j \leq p_k-1}$ de F_k en notant $p_1 \leq \dots \leq p_r$

les dimensions respectives de $F_1, \dots, F_r$. On note $\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^r \mathcal{B}_k$ la base de E correspondante. Montrer que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_r \end{pmatrix}, \text{ où } C_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est dans } \mathcal{M}_{p_k}(\mathbb{K})$$
 pour $1 \leq k \leq r$ (théorème de réduction de JORDAN pour les endomorphismes nilpotents).

– III – Commutant et bicommutant

Le *commutant* de $u \in \mathcal{L}(E)$ est $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u\}$ et le *com-mutant* d'une partie non vide U de $\mathcal{L}(E)$ est

$$\mathcal{C}(U) = \{v \in \mathcal{L}(E), \forall u \in U, u \circ v = v \circ u\}$$

On définit de manière analogue les commutants $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou d'une partie non vide $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le *bicommutant* d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ [resp. de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$] est l'ensemble $\mathcal{CC}(u) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(u))$ [resp. $\mathcal{CC}(A) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(A))$].

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

- (a) $\mathcal{C}(\mathbb{K}[u]) = \mathcal{C}(u)$;
- (b) $\mathcal{C}(u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ qui contient $\mathbb{K}[u]$;
- (c) $\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{CC}(u)$.

2. On se propose de montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique, on a alors $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u]$ et $\dim(\mathcal{C}(u)) = n$. On se donne $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique et $x_0 \in E$ tel que la famille $\mathcal{B}_0 = (u^k(x_0))_{0 \leq k \leq n-1}$ soit une base de E .

- (a) Montrer que pour $v \in \mathcal{L}(E)$, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v(x_0) = P(u)(x_0)$.
- (b) En déduire que, pour tout $v \in \mathcal{C}(u)$, on a $v = P(u)$ et conclure.

3. Soient F_0, F_1 deux sous-espaces vectoriels de E non réduits à $\{0\}$ et tels que $E = F_0 \oplus F_1$. Pour $k = 0, 1$, on note p_k le projecteur de E sur F_k parallèlement à F_{1-k} , on se donne $u_k \in \mathcal{L}(F_k)$ et u est l'endomorphisme $u = u_0 \circ p_0 + u_1 \circ p_1$.

- (a) Montrer que $p_0 \in \mathcal{C}(u)$.
- (b) Montrer que $\mathcal{C}(p_0) = \mathcal{L}(F_0) \circ p_0 \oplus \mathcal{L}(F_1) \circ p_1$.
- (c) Montrer que $\mathcal{CC}(u) \subset \mathcal{CC}(u_0) \circ p_0 \oplus \mathcal{CC}(u_1) \circ p_1$.
- (d) Donner une expression du polynôme minimal π_u en fonctions des polynômes minimaux π_0 de u_0 et π_1 de u_1 .
- (e) En supposant que les polynômes minimaux π_0 et π_1 sont premiers entre eux et que $\mathcal{CC}(u_k) = \mathbb{K}[u_k]$ pour $k = 0, 1$, montrer que $\mathcal{CC}(u) = \mathbb{K}[u]$.

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. On se propose de montrer que $\mathcal{CC}(u) = \mathbb{K}[u]$ en raisonnant par récurrence sur l'entier $r \in \mathbb{N}^*$ qui intervient dans une décomposition

en sous-espaces cycliques $E = \bigoplus_{k=1}^r F_k$ (question II.4). On note $p_1 \leq \cdots \leq p_r$ les dimensions respectives de $F_1, \dots, F_r$ et pour tout k compris entre 1 et r , on se donne une base $\mathcal{B}_k = (u^j(x_k))_{0 \leq j \leq p_k-1}$ de F_k .

- (a) Montrer le résultat pour $r = 1$.
- (b) On suppose que $r \geq 2$ et on note $F_0 = \bigoplus_{k=1}^{r-1} F_k$, de sorte que $E = F_0 \oplus F_r$.
Montrer que l'endomorphisme $w \in \mathcal{L}(E)$ défini par $w(u^j(x_r)) = u^j(x_{r-1})$ pour tout j compris entre 0 et $n_r - 1$ et $w(x) = 0$ pour tout $x \in F_0$, est dans $\mathcal{C}(u)$.
- (c) Montrer le résultat pour $r \geq 2$.
5. Pour cette question, on suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que l'endomorphisme $v = u - \lambda I_d$ soit nilpotent. Montrer que $\mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(v)$, $\mathcal{CC}(u) = \mathcal{CC}(v)$ et $\mathcal{CC}(u) = \mathbb{K}[u]$.
6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que le polynôme minimal de u est scindé sur $\mathbb{K}$, soit que $\pi_u(X) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$, où les $\lambda_k \in \mathbb{K}$ sont deux à deux distincts et les α_k sont dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{CC}(u) = \mathbb{K}[u]$.

– IV – Décomposition de DUNFORD

On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est *semi-simple*, si tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable par u .

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *semi-simple*, si l'endomorphisme qu'elle définit dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est semi-simple.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme minimal π_u est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.
- (a) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et distinct de E . Montrer que pour tout $x \in E \setminus F$, on a $F \cap E_{u,x} = \{0\}$.
- (b) Montrer que u est semi-simple.
2. Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple si, et seulement si, son polynôme minimal est sans facteur carré dans sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.
3. Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable est semi-simple.
4. On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple si, et seulement si, il est diagonalisable.
5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de polynôme minimal $\pi_u = \prod_{k=1}^p P_k^{\beta_k}$ et de polynôme caractéristique $P_u = \prod_{k=1}^p P_k^{\alpha_k}$, les P_k étant irréductibles deux à deux distincts dans $\mathbb{K}[X]$ et $1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$ pour tout entier k compris entre 1 et p .
On note $P = \prod_{k=1}^p P_k$.
- (a) Montrer que $P = \frac{\pi_u}{\pi_u \wedge \pi'_u} = \frac{P_u}{P_u \wedge P'_u}$.

- (b) Justifier l'existence de A et B dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $AP + BP' = 1$.
- (c) Justifier, pour tout polynôme $R \in \mathbb{K}[X]$, l'existence de S dans $\mathbb{K}[X, Y]$ tel que $R(X + Y) = R(X) + YR'(X) + Y^2S(X, Y)$.
- (d) Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite d'endomorphismes de E définie par $u_0 = u$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} = u_k - P(u_k)B(u_k)$$

Montrer que :

- i. il existe une suite $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P(u_k) = P^{2^k}(u)Q_k(u)$;
- ii. il existe un entier $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $P(u_\ell) = 0$ et u_ℓ est semi-simple;
- iii. pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme $u_k - u$ est nilpotent.
- iv. u s'écrit de manière unique $u = d + v$ avec d semi-simple qui commute à v nilpotent.

– V – Produit tensoriel de matrices

Pour n et m entiers naturels non nuls, on note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes, m colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{B}_{n,m} = (E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ en est la base canonique (E_{ij} a tous ses coefficients nuls, sauf celui d'indice (i, j) qui vaut 1).

Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ on note $A \otimes B$ dans $\mathcal{M}_{np,mq}(\mathbb{K})$ la matrice définie par blocs comme suit :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nm}B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np,mq}(\mathbb{K})$$

La matrice $A \otimes B$ est le *produit tensoriel* (ou le produit de *KRONECKER*) de A et B .

On admet que l'opérateur $\otimes$ ainsi défini est associatif et que l'application $(A, B) \mapsto A \otimes B$ est bilinéaire.

On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \otimes \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{np,mq}(\mathbb{K})$ engendré par l'ensemble des matrices de la forme $A \otimes B$, où A décrit $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et B décrit $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

1. En désignant par $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $(F_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ celle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, montrer que $(E_{ij} \otimes F_{k,\ell})_{\substack{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq p, 1 \leq \ell \leq q}}$ est une base de $\mathcal{M}_{np,mq}(\mathbb{K})$ et donc que :

$$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \otimes \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{np,mq}(\mathbb{K})$$

2. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $P \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $(P \otimes Q)(A \otimes B) = (PA) \otimes (QB)$.

3. Montrer que pour toutes matrices $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$, la matrice $P \otimes Q$ est inversible d'inverse $P^{-1} \otimes Q^{-1}$ dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
4. Soient $A' \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ équivalente à A et $B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ équivalente à B . Montrer que $A' \otimes B'$ est équivalente à $A \otimes B$ dans $\mathcal{M}_{np,mq}(\mathbb{K})$.
5. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer que $A \otimes B$ est nilpotente si, et seulement si, l'une des deux matrices A ou B est nilpotente.
6. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de décompositions de DUNFORD $A = D + N$ avec D diagonalisable qui commute à N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = D' + N'$ avec D' diagonalisable qui commute à N' dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Quelle est la décomposition de DUNFORD de $A \otimes B$ dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$?
7. Montrer que pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on a :

$$\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A) \text{Tr}(B)$$

8. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ deux matrices triangulaires. Calculer $\det(A \otimes B)$.
9. Pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, calculer $\det(A \otimes B)$ pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A \otimes B$ soit inversible.
10. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Pour tout couple (n, m) d'entiers naturels non nuls, on note $\mathcal{B}_{n,m} = (E_{11}, \dots, E_{1m}, E_{21}, \dots, E_{2m}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{nm})$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ ainsi ordonnée. Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de lignes $L_1, \dots, L_n$ dans $\mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{K})$ est donc identifiée par le choix de cette base au vecteur $\begin{pmatrix} {}^t L_1 \\ \vdots \\ {}^t L_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{nm}$. Montrer que :

(a) la matrice de l'application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \psi : \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$

dans les bases $\mathcal{B}_{m,q}$ et $\mathcal{B}_{n,q}$ est $A \otimes I_q$;

(b) la matrice de l'application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \chi : \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M {}^t B \end{array}$$

$$\text{dans les bases } \mathcal{B}_{n,q} \text{ et } \mathcal{B}_{n,p} \text{ est } \begin{pmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B \end{pmatrix};$$

(c) la matrice de l'application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM {}^t B \end{array}$$

dans les bases $\mathcal{B}_{m,q}$ et $\mathcal{B}_{n,p}$ est $A \otimes B$;

(d) les matrices $A \otimes B$ et $B \otimes A$ sont équivalentes dans $\mathcal{M}_{np,mq}(\mathbb{K})$.

11. Montrer que l'application $\tau_{n,m} : A \mapsto (M \mapsto \text{Tr}(AM))$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sur $(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}))^*$.

On définit le produit tensoriel de $\varphi \in (\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}))^*$ et $\psi \in (\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}))^*$ par :

$$\varphi \otimes \psi = \tau_{np,mq}(A \otimes B) \in (\mathcal{M}_{np,mq}(\mathbb{K}))^*$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ sont telles que $\varphi = \tau_{n,m}(A)$ et $\psi = \tau_{p,q}(B)$.

12. Avec les notations qui précèdent, montrer que la forme linéaire $\varphi \otimes \psi$ est aussi définie par $\varphi \otimes \psi(U \otimes V) = \varphi(U) \psi(V)$ pour toutes matrices $U \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $V \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.





Un théorème de BURNSIDE

7.1 Rappels de cours

$\mathbb{K}$ est un corps commutatif, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et u est un endomorphisme de E .

Le *dual* E^* de E est l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires sur E . Il est de dimension n , de base $\mathcal{B}^* = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$, où les p_i sont les projections relativement à une base $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ donnée de E .

On note $e_i^* = p_i$, pour i compris entre 1 et n et on dit que $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ est la *base duale* de $\mathcal{B}$. Elle est caractérisée par :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

et toute forme linéaire ℓ sur E s'écrit de manière unique $\ell = \sum_{j=1}^n \ell(e_j) e_j^*$.

Réciproquement, si $\mathcal{B}' = (\ell_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E^* , il existe alors une base $\mathcal{B} = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E telle que $\mathcal{B}'$ soit la base duale de $\mathcal{B}$. On dit que $\mathcal{B}$ est la *base anté-duale* de $\mathcal{B}'$.

On dit qu'une forme linéaire $\varphi \in E^*$ et un vecteur $x \in E$ sont *orthogonaux* si $\varphi(x) = 0$.

L'*orthogonal* dans E^* d'une partie non vide X de E est l'ensemble :

$$X^\perp = \{\varphi \in E^*, \forall x \in X, \varphi(x) = 0\}$$

L'*orthogonal* dans E d'une partie non vide Y de E^* est l'ensemble :

$$Y^\circ = \{x \in E, \forall \varphi \in Y, \varphi(x) = 0\}$$

Théorème Soient A, B des parties non vides de E et U, V des parties non vides de l'espace dual E^* .

- Si $A \subset B$, on a alors $B^\perp \subset A^\perp$, si $U \subset V$, on a alors $V^\circ \subset U^\circ$.
- $A \subset (A^\perp)^\circ$, l'égalité n'étant pas réalisée en général.
- $U \subset (U^\circ)^\perp$, l'égalité n'étant pas réalisée en général.
- $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$, $U^\circ = (\text{Vect}(U))^\circ$.
- $\{0\}^\perp = E^*$, $E^\perp = \{0\}$, $\{0\}^\circ = E$ et $(E^*)^\circ = \{0\}$.

Théorème

- Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$.
- Pour tout sous-espace vectoriel G de E^* , on a $\dim(G) + \dim(G^\circ) = \dim(E)$.
- Pour tout sous-espace vectoriel F de E et tout sous-espace vectoriel G de E^* , on a $F = (F^\perp)^\circ$ et $G = (G^\circ)^\perp$.
- Pour toute partie X de E , on a $(X^\perp)^\circ = \text{Vect}(X)$.
- Pour tous sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E , on a :

$$(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp \text{ et } (F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$$

- Pour tous sous-espaces vectoriels G_1 et G_2 de E^* , on a :

$$(G_1 + G_2)^\circ = G_1^\circ \cap G_2^\circ \text{ et } (G_1 \cap G_2)^\circ = G_1^\circ + G_2^\circ$$

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, La *transposée* de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est l'application ${}^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ définie par ${}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$ pour tout $\varphi \in F^*$.

Théorème Soient u dans $\mathcal{L}(E, F)$ et v dans $\mathcal{L}(F, G)$. On a :

- L'application de transposition $u \mapsto {}^t u$ est linéaire et injective de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F^*, E^*)$;
- ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$ et pour $F = E$, ${}^t Id_E = Id_{E^*}$;
- si u est un isomorphisme de E sur F , alors ${}^t u$ est un isomorphisme de F^* sur E^* et $({}^t u)^{-1} = {}^t u^{-1}$;
- $\ker({}^t u) = (\text{Im}(u))^\perp$;
- u est surjective si, et seulement si, ${}^t u$ est injective;
- $\text{Im}({}^t u) = (\ker(u))^\perp$;
- u est injective si, et seulement si, ${}^t u$ est surjective;
- si E et F sont de dimension finie, alors u et ${}^t u$ ont même rang;
- si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors la matrice de ${}^t u$ dans les bases $\mathcal{B}'^*$ et $\mathcal{B}^*$ est la transposée ${}^t A$.

7.2 Énoncé

Pour tout corps commutatif $\mathbb{K}$ et tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$, on note E^* l'espace dual de E , $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E et $\text{GL}(E)$ le groupe des automorphismes de E .

On note Id [resp. I_n] l'endomorphisme identité dans $\mathcal{L}(E)$ [resp. la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$].

Une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ [resp. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$] est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ [resp. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$] qui contient Id [resp. I_n] et qui est stable par composition [resp. par le produit].

Un sous-espace vectoriel strict de E est un sous-espace vectoriel de dimension comprise entre 1 et $n - 1$ (i. e. autre que $\{0\}$ et E).

Le sous-espace vectoriel de E engendré par une partie non vide X de E est l'ensemble noté $\text{Vect}(X)$ de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de X .

On rappelle que le *transposé* d'un endomorphisme u de E est l'endomorphisme ${}^t u$ de E^* défini par ${}^t u(\ell) = \ell \circ u$ pour tout $\ell \in E^*$.

Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{L}(E)$:

- la sous-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ est la plus petite (pour l'inclusion) sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ qui contient $\mathcal{A}$;
- le *commutant* de $\mathcal{A}$ est l'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ de tous les endomorphismes de E qui commutent à tous les éléments de $\mathcal{A}$ (c'est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$) ;
- un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par $\mathcal{A}$, s'il est stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$ (i. e. si on a $u(F) \subset F$ pour tout $u \in \mathcal{A}$) ;
- $\mathcal{A}$ est dite *irréductible*, si les seuls sous-espaces vectoriels de E qui sont stables par $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E (il n'y pas de sous-espace strict de E stable par $\mathcal{A}$).

Pour $n \geq 2$ et tout entier k compris entre 1 et n , on désigne par E_k le $\mathbb{K}$ -sous-espace vectoriel de l'espace produit E^n défini par :

$$E_k = \{0\} \times \cdots \times \{0\} \times E \times \{0\} \times \cdots \times \{0\} = \prod_{j=1}^n E_{j,k}$$

où $E_{j,k} = \{0\}$ pour $j \neq k$ et $E_{k,k} = E$. On a alors $E^n = \bigoplus_{k=1}^n E_k$. Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$

est une base de E , elle détermine alors de manière naturelle une base de chaque E_k et une base $\mathcal{B}_n$ de E^n . Tout élément de $\mathcal{L}(E^n)$ a pour matrice dans la base $\mathcal{B}_n$ une matrice dans $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{K})$ formée de n^2 blocs tous dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note ρ le morphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E^n)$ qui associe à tout $f \in \mathcal{L}(E)$ l'application linéaire $\rho(f) \in \mathcal{L}(E^n)$ définie par $\rho(f)(v) = (f(v_k))_{1 \leq k \leq n}$ pour $v = (v_k)_{1 \leq k \leq n} \in E^n$.

– I – Résultats préliminaires

$\mathbb{K}$ est un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

1. Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v .
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est de rang 1 si, et seulement si, il existe $y \in E \setminus \{0\}$ et $\ell \in E^* \setminus \{0\}$ tels que $u(x) = \ell(x)y$ pour tout $x \in E$.
3. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$. En notant $\mathcal{A}(x) = \{u(x), u \in \mathcal{A}\}$ pour $x \in E$, que vaut $\mathcal{A}(x)$?
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si L est un sous-espace vectoriel de E^* stable par ${}^t u$, son orthogonal $L^\circ = \{x \in E ; \forall \ell \in L, \ell(x) = 0\}$ est alors stable par u .
5. Soit $\mathcal{A}$ une partie irréductible de $\mathcal{L}(E)$. Montrer que ${}^t \mathcal{A} = \{{}^t u, u \in \mathcal{A}\}$ est irréductible dans $\mathcal{L}(E^*)$.
6. Soient $\mathcal{A}$ une partie irréductible de $\mathcal{L}(E)$ et W un sous-espace vectoriel de E^n stable par $\rho(\mathcal{A})$ (i. e. par tous les $\rho(f)$ pour f décrivant $\mathcal{A}$). On se propose de montrer que W admet un supplémentaire dans E^n qui est stable par $\rho(\mathcal{A})$.

- (a) Montrer que, pour tout k compris entre 1 et n , on a soit $W \cap E_k = \{0\}$, soit $W \cap E_k = E_k$.
 - (b) Montrer que $W_2 = W + E_1$ est stable par $\rho(\mathcal{A})$ et que $W_2 = W \oplus E_1$ si $W \cap E_1 = \{0\}$ et $W_2 = W$ si $W \cap E_1 = E_1$. Que vaut $W_2 \cap E_2$?
 - (c) Construire une suite croissante $W_1 = W \subset W_2 \subset \dots \subset W_n \subset W_{n+1} = E^n$ de sous-espaces vectoriels de E^n tous stables par $\rho(\mathcal{A})$, puis en déduire l'existence d'un supplémentaire W' de W dans E^n stable par $\rho(\mathcal{A})$.
 - (d) Montrer que la projection $p : E^n \rightarrow E^n$ sur W parallèlement à W' appartient au commutant $\mathcal{C}$ de $\rho(\mathcal{A})$.
7. Soient G un sous groupe de $\text{GL}(E)$ et $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par G . Montrer que $\mathcal{A} = \text{Vect}(G)$ et qu'il existe une base de $\mathcal{A}$ formée d'éléments de G .
8. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & (\mathcal{L}(E))^* \\ u & \longmapsto & \varphi(u) : v \mapsto \text{Tr}(u \circ v) \end{array}$$

est un isomorphisme.

9. Soient $(u_k)_{1 \leq k \leq n^2}$ une base de $\mathcal{L}(E)$ et $(\ell_k)_{1 \leq k \leq n^2}$ la famille de formes linéaires sur $\mathcal{L}(E)$ définie par $\ell_k(v) = \text{Tr}(u_k \circ v)$ pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $(\ell_k)_{1 \leq k \leq n^2}$ est une base de $(\mathcal{L}(E))^*$. En déduire qu'il existe une base $(v_k)_{1 \leq k \leq n^2}$ de $\mathcal{L}(E)$ telle que, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, on ait $v = \sum_{k=1}^{n^2} \text{Tr}(u_k \circ v) v_k$.
10. Soient G un groupe et G_1, G_2 deux sous-groupes distingués de G d'indice fini. Montrer le sous-groupe $G_1 \cap G_2$ de G est aussi d'indice fini.
11. Soit $(\ell_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de formes linéaires sur E de rang $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le sous-espace vectoriel $F = \bigcap_{i=1}^p \ker(\ell_i)$ de E est de dimension $n - r$.

– II – Un théorème de BURNSIDE

On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E et $\mathcal{B}_n$ est la base de E^n qui lui est naturellement associée (voir l'introduction du problème).

1. Soient $\mathcal{A}$ une partie (non vide) irréductible de $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\rho(\mathcal{A}))$ le commutant de $\rho(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{L}(E^n)$.
 - (a) Montrer que le commutant $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est l'ensemble de toutes les homothéties de E . Montrer que ce résultat n'est pas valable pour $\mathbb{K}$ non algébriquement clos.
 - (b) Décrire dans la base $\mathcal{B}_n$ de E^n la matrice par blocs d'un élément de $\mathcal{C}$.
 - (c) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\rho(f)$ commute à tous les éléments de $\mathcal{C}$.
2. On se donne une sous-algèbre irréductible $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ et on se propose de montrer qu'elle est nécessairement égale à $\mathcal{L}(E)$ (théorème de BURNSIDE).

- (a) Montrer que $W = \left\{ \rho(u)(\mathcal{B}) = (u(e_k))_{1 \leq k \leq n}, u \in \mathcal{A} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E^n stable par $\rho(\mathcal{A})$.
- (b) Montrer que, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $v(e_k) = u(e_k)$ pour tout entier k compris entre 1 et n . Conclure que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.
3. On se donne une sous-algèbre irréductible $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ et on se propose de donner une deuxième démonstration du théorème de BURNSIDE en utilisant la dualité.
- (a) Montrer que, si l'algèbre $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme de rang 1, elle les contient alors tous. En déduire que, dans ce cas, on a $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.
- (b) On suppose que $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme u de rang $r \geq 2$ et on se propose de montrer qu'il existe $u' \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ de rang strictement plus petit que r .
- Montrer qu'il existe x, y dans $E \setminus \{0\}$ et v dans $\mathcal{A}$ tels que le couple de vecteurs $(u(x), u(y))$ soit libre et que l'on ait $v \circ u(x) = y$.
 - Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que la restriction de l'endomorphisme $u \circ v - \lambda Id$ à $\text{Im}(u)$ ne soit ni injective ni nulle.
 - Vérifier que l'endomorphisme $u' = u \circ v \circ u - \lambda u$ est de rang strictement plus petit que r et dans $\mathcal{A} \setminus \{0\}$.
- (c) Montrer finalement que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

– III – Sur les hypothèses du théorème de BURNSIDE

1. Une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est identifiée à l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ qu'elle définit dans la base canonique. Soit $\mathcal{A} = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$.
- (a) Montrer que tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont nilpotents.
- (b) Montrer que la sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ engendrée par $\mathcal{A}$ contient l'ensemble des matrices diagonales.
- (c) Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^3$ stables par $\mathcal{A}$. Que peut-on en déduire sur les hypothèses du théorème de BURNSIDE?
2. Soit $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^3)$ engendrée par u de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{Q}^3$.
- (a) Montrer que le polynôme caractéristique P_u de u est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
- (b) Donner une base de $\mathcal{A}$ en fonction de u .
- (c) Montrer que $\mathcal{A}$ est un corps.
- (d) Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{Q}^3$ stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$. Que peut-on en déduire sur les hypothèses du théorème de BURNSIDE?

– IV – Quelques applications du théorème de BURNSIDE

Pour cette partie, E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

1. On suppose que E est hermitien et on note $\mathcal{U}(E)$ le groupe unitaire correspondant.
 - (a) Soient x, y deux vecteurs unitaires dans E . Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{U}(E)$ tel que $y = u(x)$.
 - (b) Montrer que $\text{Vect}(\mathcal{U}(E)) = \mathcal{L}(E)$.
2. Soit G un sous-groupe irréductible de $\text{GL}(E)$ dont tous les éléments sont de valeurs propres de module égal à 1. On se propose de montrer que G est borné.
 - (a) Montrer qu'il existe une base $(u_k)_{1 \leq k \leq n^2}$ de $\mathcal{L}(E)$ formée d'éléments de G .
 - (b) Montrer que, pour tout entier k compris entre 1 et n^2 et tout automorphisme $u \in G$, on a $|\text{Tr}(u_k \circ u)| \leq n$. En déduire que G est borné.
3.
 - (a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Que vaut sa trace ?
 - (b) Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ admet 1 comme unique valeur propre si, et seulement si, $u - \text{Id}$ est nilpotent. On dit alors dans ce cas, que u est unipotent.
 Pour la suite de cette question, on se donne un sous-groupe G de $\text{GL}(E)$ dont tous les éléments sont unipotents et on se propose de montrer que tous les éléments de G sont co-trigonalisables, c'est-à-dire trigonalisables dans une même base de E (théorème de KOLCHIN).
 - (c) On suppose que $n \geq 2$ et que la sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par G est irréductible. Montrer que pour tous u, v dans G , on a $\text{Tr}((u - \text{Id}) \circ v) = 0$. En déduire que $u = \text{Id}$, puis que l'hypothèse $\mathcal{A}$ irréductible est absurde.
 - (d) Déduire de ce qui précède que tous les éléments de G sont co-trigonalisables.
4. Soit G un sous-groupe de $\text{GL}(E)$ d'exposant fini, c'est-à-dire pour lequel il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^m = \text{Id}$ pour tout $u \in G$. On se propose de montrer que G est fini (un autre théorème de BURNSIDE). On note $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par G .
 - (a) Montrer que tous les éléments de G sont diagonalisables et que l'ensemble $\text{tr}(G) = \{\text{tr}(u), u \in G\}$ est fini.
 - (b) Dans le cas où $n \geq 2$ et l'algèbre $\mathcal{A}$ est irréductible, montrer que G est fini.
 - (c) On suppose que $n \geq 2$ et que $\mathcal{A}$ n'est pas irréductible. Montrer que :
 - i. il existe un entier p compris entre 1 et $n-1$ et une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de chaque élément u de G dans cette base est de la forme

$$A(u) = \begin{pmatrix} B(u) & C(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix} \text{ où } B(u) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \text{ et } D(u) \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C}).$$
 - ii. $G_1 = \{u \in G, B(u) = I_p\}$ et $G_2 = \{u \in G, D(u) = I_{n-p}\}$ sont deux sous-groupes distingués de G . Préciser $G_1 \cap G_2$.
 - (d) Conclure.

– V – Matrices magiques et matrices de permutation

Pour cette partie, $\mathbb{K}$ est un corps commutatif de caractéristique nulle, $n \geq 2$ est un entier et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

À toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, on associe l'automorphisme p_σ de $\mathbb{K}^n$ défini par $p_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$ pour tout entier j compris entre 1 et n et P_σ est la matrice de p_σ dans la base $\mathcal{B}$. On dit que p_σ est un automorphisme de permutation et que P_σ est une matrice de permutation.

On appelle matrice magique toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la somme des termes de chaque ligne et de chaque colonne est égale à une même constante. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble de ces matrices. On vérifie facilement que c'est une sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $\mathcal{D}$ la droite de $\mathbb{K}^n$ dirigée par le vecteur $e = \sum_{k=1}^n e_k$ et par $\mathcal{H}$ l'hyperplan

de $\mathbb{K}^n$ d'équation $\sum_{k=1}^n x_k = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par l'ensemble des matrices de permutations est contenu dans $\mathcal{M}$.
2. Pour tout entier i [resp. j] compris entre 1 et n , on note ℓ_i [resp. c_j] la forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui associe à toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la somme des termes de sa ligne i [resp. de sa colonne j]. Montrer que la famille $(\ell_1, \dots, \ell_n, c_1, \dots, c_n)$ est liée et que la famille $(\ell_1, \dots, \ell_n, c_1, \dots, c_{n-1})$ est libre.
3. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{M}_0$ de $\mathcal{M}$ formé des matrices dont la somme des termes de chaque ligne et de chaque colonne est constante égale à 0. En déduire la dimension de $\mathcal{M}$.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ de matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $A \in \mathcal{M}$ si, et seulement si, la droite $\mathcal{D}$ et l'hyperplan $\mathcal{H}$ sont stables par u .
5. Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels stricts de $\mathbb{K}^n$ stables par tous les automorphismes de permutation sont la droite $\mathcal{D}$ et l'hyperplan $\mathcal{H}$.
Pour la suite de cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

6. Montrer que tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ peut s'écrire $u = \sum_{k=1}^m \lambda_k p_k$, où $m \in \mathbb{N}^*$, les λ_k sont des nombres complexes et les p_k sont les restrictions d'automorphismes de permutation à l'hyperplan $\mathcal{H}$.

7. On désigne par u_0 l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ a tous ses coefficients égaux à 1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ de matrice $A \in \mathcal{M}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$, des nombres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ et des permutations $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ tels que $u = \alpha u_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k p_{\sigma_k}$.

8. Montrer que $u_0 = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} p_\sigma$, puis que $\mathcal{P} = \mathcal{M}$, c'est-à-dire les matrices magiques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont les combinaisons linéaires de matrices de permutation.





PROBLÈME 8



Diamètre transfini d'une partie du plan euclidien

8.1 Rappels de cours

Ce problème ne nécessite pas beaucoup de connaissances. Il est nécessaire de savoir manipuler de façon efficace les produits et d'avoir une bonne intuition géométrique. Les notions de base sur bornes supérieures et inférieures ainsi que sur les suites réelles sont supposées acquises. Il en est de même pour la géométrie du plan affine euclidien et du plan complexe ainsi que la géométrie du triangle.

L'inégalité de Jensen pour les fonctions concaves nous sera utile.

Théorème Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I vers $\mathbb{R}$. Si f est concave, alors pour tous points $a_1, \dots, a_n$ de I et tous réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme égale à 1, on a $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i)$.

Il est bon de connaître une méthode de calcul d'un déterminant de Vandermonde :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

8.2 Énoncé

On note $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien orienté et la distance $d(A, B)$ entre deux points A, B de $\mathcal{P}$ est notée AB .

À tout sous-ensemble infini E de $\mathcal{P}$, on associe pour chaque entier $n \geq 2$, son diamètre d'ordre n , noté $d_n(E)$, défini comme suit : $A = (A_k)_{1 \leq k \leq n}$ désignant une

suite de n points de E et $\delta_n(A) = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j \right)^{\frac{2}{n(n-1)}}$ la moyenne géométrique de leurs distances mutuelles, $d_n(E) \in \overline{\mathbb{R}}_+^* = [0, +\infty]$ est la borne supérieure des nombres $\delta_n(A)$ lorsque les n points $A_1, \dots, A_n$ varient arbitrairement dans E . Ainsi $d_2(E)$ est le diamètre au sens usuel.

– I – Généralités et exemples

On se donne un sous-ensemble infini E de $\mathcal{P}$.

1. Pour tout entier $n \geq 2$, montrer que :
 - (a) pour toute partie F de $\mathcal{P}$ contenant E , on a $0 < d_n(E) \leq d_n(F)$;
 - (b) si E est bornée, $d_n(E)$ est alors fini majoré par $d_2(E)$;
 - (c) si E est non bornée, il existe alors tout réel $R > 0$, une suite $A = (A_k)_{1 \leq k \leq n}$ de points de E telle que $A_i A_j > R$ pour $1 \leq i < j \leq n$, puis en déduire que $d_n(E)$ est infini ;
 - (d) $d_n(\overline{E}) = d_n(E)$ où $\overline{E}$ désigne l'adhérence de E .
2. Pour cette question, A, B sont deux points distincts de $\mathcal{P}$ et $E = [A, B]$ est le segment d'extrémités A et B de longueur $a = AB > 0$ muni du repère $(A, \vec{e}_1)$ où $\vec{e}_1 = \frac{1}{a} \overrightarrow{AB}$. Montrer que :

$$d_3(E) = \sup_{0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq a} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

puis que $d_3(E) = \delta(A, C, B) = \frac{a}{\sqrt[3]{4}}$ où C est le milieu du segment $[A, B]$.

3. Pour cette question, on se donne un repère orthonormé $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan $\mathcal{P}$, un réel $R > 0$ et E est l'arc de cercle de centre Ω et de rayon R défini par les points $A = \Omega + R\vec{e}_1$ et $B = \Omega + R \cos(\theta) \vec{e}_1 + R \sin(\theta) \vec{e}_2$ où $\theta \in]0, 2\pi]$. Montrer que :

$$d_3(E) = 8R^3 \sup_{0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3 \leq \theta} \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_3 - \theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2}\right)$$

puis que :

$$d_3(E) = \begin{cases} 2\sqrt[3]{2}R \sin\left(\frac{\theta}{4}\right) \sqrt[3]{\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)} & \text{si } \theta \in \left]0, \frac{4\pi}{3}\right] \\ R\sqrt{3} & \text{si } \theta \in \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right] \end{cases}$$

4. Pour cette question, E est un disque fermé de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rayon $R > 0$. Montrer que $d_3(E) = d_3\left(\overset{\circ}{E}\right) = d_3(\partial E) = R\sqrt{3}$.
5. Calculer $d_3(E)$ dans le cas E est la réunion des trois cotés d'un triangle équilatéral.

6. Soit E une partie infinie et bornée du plan $\mathcal{P}$.

(a) Montrer que pour toute suite $(A_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ de points de E , on a :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \left(\prod_{\substack{(i,j) \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{k\} \\ i < j}} A_i A_j \right) = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} A_i A_j \right)^{n-1}$$

(b) Montrer que la suite $(d_n(E))_{n \geq 2}$ est décroissante et convergente vers un réel $d(E)$ positif ou nul. Cette limite est appelée *diamètre transfini* de E .

– II – Diamètre transfini d'un cercle

Pour cette partie, on se propose de calculer $d_n(E)$ et $d(E)$ dans le cas où E est un cercle de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rayon égal à 1.

On identifie le plan euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ au plan complexe et à tout point $M = \Omega + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \in \mathcal{P}$, on associe son affixe $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

1. En notant $(z_k)_{1 \leq k \leq n} = \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)_{1 \leq k \leq n}$ la suite des racines n -ièmes de l'unité,

montrer que pour tout entier h compris entre 1 et n , on a $\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n (z_h - z_k) = nz_h^{n-1}$.

2. Montrer que pour toute suite $(x_k)_{1 \leq k \leq m}$ de $m \geq 2$ points de $]0, \pi[$, on a :

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln(\sin(x_k)) \leq \ln \left(\sin \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k \right) \right)$$

3. On se donne une suite $A = (A_k)_{1 \leq k \leq n}$ de $n \geq 3$ points distincts du cercle E et pour tout entier k compris entre 1 et n , $z_k = e^{i\theta_k}$ est l'affixe du point A_k où $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_n < 2\pi$.

(a) Dans le cas où les A_k , pour $1 \leq k \leq n$, sont les sommets d'un polygone régulier convexe à n cotés inscrit dans le cercle E , calculer $\delta_n(A)$. En déduire un encadrement de $d(E)$.

(b) On prolonge la définition des réels θ_k et des affixes z_k en posant $\theta_{n+j} = \theta_j$ et $z_{n+j} = e^{i\theta_{n+j}} = z_j$ pour j entier compris entre 1 et n , ce qui permet de

définir les produits $Q_h(A) = \prod_{k=1}^n |z_{k+h} - z_k|$ pour h entier compris entre

1 et $n-1$. Calculer les $Q_h(A)$ pour $1 \leq h \leq n-1$ dans le cas où les A_k sont les sommets d'un polygone régulier convexe à n cotés inscrit dans E .

(c) Montrer que pour $1 \leq h \leq n-1$ et $1 \leq k \leq n$, on a :

$$|z_{k+h} - z_k| = \begin{cases} 2 \sin \left(\frac{\theta_{k+h} - \theta_k}{2} \right) & \text{si } k+h \leq n \\ 2 \sin \left(\frac{\theta_{k+h} - \theta_k}{2} + \pi \right) & \text{si } k+h > n \end{cases}$$

puis que pour $1 \leq h \leq \frac{n}{2}$, on a $Q_h(A) \leq \left(2 \sin\left(\frac{h\pi}{n}\right)\right)^n$.

(d) Montrer que pour $n = 2p + 1 \geq 3$, on a $\prod_{1 \leq i < j \leq 2p+1} A_i A_j = \prod_{h=1}^p Q_h(A)$ et

pour $n = 2p \geq 4$, on a $\prod_{1 \leq i < j \leq 2p} A_i A_j = \left(\prod_{h=1}^{p-1} Q_h(A)\right) \sqrt{Q_p(A)}$.

(e) Dédurre de ce qui précède que $d_n(E) = n^{\frac{1}{n-1}}$ et $d(E) = 1$.

– III – Une méthode de calcul du diamètre transfini

On étudie ici une méthode de détermination du diamètre transfini d'une partie bornée E du plan.

À tout point du plan, on associe son affixe dans un repère orthonormé donné.

P étant un polynôme unitaire, on désigne par $\mu(P)$ la borne supérieure de $|P(z)|$ lorsque le point d'affixe z décrit E .

Pour toute partie bornée E du plan et tout entier $n \geq 1$, on note $\mu_n(E)$ la borne inférieure des $\mu(P)$ lorsque P décrit l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des polynômes unitaires de degré n . On pose $m_n(E) = \sqrt[n]{\mu_n(E)}$.

1.

- (a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{U}_n$, $\mu(P)$ est fini et non nul.
- (b) Montrer que $m_n(E)$ ne dépend que de E et de n et pas du repère choisi.
- (c) Comparer $m_1(E)$ et $d_2(E)$.

2. Pour alléger les notations, on note m_n pour $m_n(E)$. Montrer que :

- (a) pour tout couple (p, q) d'entiers naturels non nuls, on a $m_{p+q} \leq m_p^{\frac{p}{p+q}} m_q^{\frac{q}{p+q}}$;
- (b) pour tout couple (p, q) d'entiers naturels non nuls, on a $m_{qp} \leq m_p$;
- (c) la suite $(m_n(E))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $m(E) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} m_n(E)$.

3. À toute suite $(A_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ de $n+1$ points de E d'affixes respectives $z_1, \dots, z_{n+1}$, on associe le déterminant :

$$V(z_1, \dots, z_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_{n+1}^{n-1} \\ z_1^n & z_2^n & \dots & z_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

(a) Démontrer que pour tout $P \in \mathbb{U}_n$, on a l'égalité :

$$V(z_1, \dots, z_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_{n+1}^{n-1} \\ P(z_1) & P(z_2) & \dots & P(z_{n+1}) \end{vmatrix}$$

- (b) En utilisant le développement de ce dernier déterminant et un polynôme P convenablement choisi en fonction des points, établir l'encadrement suivant où $d_k = d_k(E)$ et $m_k = m_k(E)$:

$$d_n^{\frac{n(n-1)}{2}} m_n^n \leq d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \leq (n+1) d_n^{\frac{n(n-1)}{2}} m_n^n$$

4. Dédurre de ce qui précède :

- (a) l'inégalité $d_{n+1}(E) \geq m_n(E)$ pour tout entier $n \geq 1$;
 (b) une majoration de $d_{n+1}(E)$ faisant intervenir $m_1(E), \dots, m_n(E)$ et n ;
 (c) l'égalité $m(E) = d(E)$ (on rappelle que si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet la limite u , la suite $\left(\frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet alors la limite $\frac{u}{2}$).

– IV – Diamètre transfini d'un segment

On se propose de calculer le diamètre transfini d'un segment par la méthode précédente.

E désigne le segment $[-1, 1]$ de l'axe réel (le plan euclidien est identifié au plan complexe) et x est une variable décrivant E .

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\tau_n : x \mapsto \frac{\cos(n \arccos(x))}{2^{n-1}}$ est la restriction à E d'un polynôme T_n unique de degré n , unitaire et à coefficients réels. Quelle est la borne supérieure de son module sur E ?
2. Démontrer, en considérant la différence $P - T_n$, que si le polynôme unitaire P est de degré n et à coefficients réels, alors la borne supérieure sur E du module de P ne peut être strictement inférieure à $\frac{1}{2^{n-1}}$.
3. Quels sont pour E , les nombres μ_n définis dans la partie **III** ? En déduire la valeur de $d(E)$ et, plus généralement, le diamètre transfini d'un segment de longueur a .
4. Démontrer qu'une condition suffisante pour que le diamètre transfini d'une partie bornée E du plan soit non nul est que E contienne un arc de courbe continu non réduit à un point. Donner un exemple d'ensemble infini dénombrable borné dont le diamètre transfini est non nul.

– V – Derniers exemples

E étant une partie infinie bornée du plan complexe et $H \in \mathbb{U}_q$ un polynôme fixé, unitaire de degré $q \geq 1$, on note E_H l'ensemble $H^{-1}(E)$.

1. Montrer que $d(E) = (d(E_H))^q$. À l'aide de cette formule, retrouver, en supposant que ces diamètres sont non nuls, les diamètres transfinis d'un segment et d'un cercle.
2. Calculer les diamètres transfinis d'un disque et d'une ovale de CASSINI définie comme l'ensemble $E = \{M \in \mathcal{P}, MA \cdot MB = R\}$ (figures 18.1, 18.2 et 18.3).





Formes quadratiques réelles et ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$

9.1 Rappels de cours

Une conique à centre dans $\mathbb{R}^2$ euclidien est une courbe algébrique d'équation :

$$\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

telle que la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^2$ par $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ soit non dégénérée et son centre est la solution du système linéaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 2ax + 2by + d = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 2bx + 2cy + e = 0 \end{cases}$$

L'aire du triangle de sommets A, B, C dans $\mathbb{R}^2$ euclidien est $\frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|}{2}$.

On rappelle que :

- les *mineurs principaux* d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les déterminants des matrices carrées extraites $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ où l'entier k est compris entre 1 et n ;
- une forme quadratique $q \in Q(E)$, où E est un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$, est dite positive [resp. définie positive] si elle est telle que $q(x) \geq 0$ [resp. $q(x) > 0$] pour tout $x \in E$ [resp. $x \in E \setminus \{0\}$] ;
- une matrice symétrique réelle A est dite *positive* [resp. *définie positive*] si elle est telle que ${}^tXAX \geq 0$ pour tout $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ [resp. ${}^tXAX > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$] ;
- une forme quadratique réelle sur un espace vectoriel réel E de dimension $n \geq 1$ est dite positive si $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ ou définie positive si $q(x) > 0$ pour tout $x \in E$.

On rappelle l'inégalité arithmético-géométrique : $\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ pour $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^n$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, les x_i sont tous égaux.

Théorème Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles.

Théorème (Spectral) Une matrice symétrique réelle A a toutes ses valeurs propres réelles et se diagonalise dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice tPAP soit diagonale.

Du théorème spectral, on déduit l'existence d'une racine carrée pour une matrice symétrique réelle positive.

Théorème Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, il existe alors une unique $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

On peut déduire l'existence de la décomposition polaire d'une matrice réelle inversible.

Théorème Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique $A = \Omega S$ où Ω est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique définie positive.

Du théorème spectral, on peut aussi déduire le théorème de réduction de GAUSS d'une forme quadratique réelle.

Théorème Il existe un entier r compris entre 1 et n , des réels non nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ et des formes linéaires indépendantes $\ell_1, \dots, \ell_r$ tels que $q = \sum_{j=1}^r \lambda_j \ell_j^2$.

Il est bon de connaître l'*inégalité arithmético-géométrique* $\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ pour tout $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, les x_i sont tous égaux.

Une partie $\mathcal{C}$ d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est *convexe*, si pour tout couple (a, b) d'éléments de $\mathcal{C}$, le segment $[a, b] = \{(1-t)a + tb, t \in [0, 1]\}$ est contenu dans $\mathcal{C}$.

On peut utiliser la version suivante du théorème de FUBINI-TONELLI que l'on admet :

Soient I, J deux intervalles réels non réduits à un point. Si f est une fonction continue de $I \times J$ dans $\mathbb{R}_+$, on a alors l'égalité dans $\overline{\mathbb{R}_+}$:

$$\int_J \left(\int_I f(x, y) dx \right) dy = \int_I \left(\int_J f(x, y) dy \right) dx$$

Cette égalité se généralise aux fonctions continues définies sur un pavé $I = \prod_{k=1}^n I_k$ de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles positives où les I_k sont des intervalles réels :

$$\int_{I_n} \left(\int_{\prod_{k=1}^{n-1} I_k} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_{n-1} \right) dx_n = \int_{\prod_{k=1}^{n-1} I_k} \left(\int_{I_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

Dans le cas où $f = \prod_{k=1}^n f_k$, les f_k étant des fonctions continues de I_k dans $\mathbb{R}_+$, on a l'égalité dans $\overline{\mathbb{R}_+}$:

$$\int_{\prod_{k=1}^n I_k} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \prod_{k=1}^n \int_{I_k} f_k(x_k) dx_k$$

9.2 Énoncé

– I – Ellipse d'aire minimale circonscrite à un triangle équilatéral

Pour cette partie, on se place sur le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer qu'il existe une unique ellipse de centre $O = (0, 0)$ contenant les points $I = (1, 0)$, $J = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $K = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
2. Soient R un réel strictement positif fixé et $\alpha < \beta$ des réels dans $]0, 2\pi[$; $\mathcal{T}(\alpha, \beta)$ le triangle de sommets $A = (R, 0)$, $B = (R \cos(\alpha), R \sin(\alpha))$ et $C = (R \cos(\beta), R \sin(\beta))$; $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, R)$ le cercle de centre O et de rayon R circonscrit à ce triangle.
 - (a) Donner une expression $f(\alpha, \beta)$ de l'aire du triangle $\mathcal{T}(\alpha, \beta)$.
 - (b) Déterminer le triangle $\mathcal{T}(\alpha_0, \beta_0)$ d'aire maximale, en précisant la valeur de cette aire maximale.
3. Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Omega, R)$ un cercle de centre Ω et de rayon $R > 0$ circonscrit à un vrai triangle $\mathcal{T} = ABC$. En notant respectivement $m(\mathcal{C})$ et $m(\mathcal{T})$ l'aire de $\mathcal{C}$ et celle de $\mathcal{T}$, montrer que $\frac{m(\mathcal{C})}{m(\mathcal{T})} \geq \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, le triangle $\mathcal{T}$ est équilatéral.
4. Montrer que parmi les ellipses circonscrites au triangle $\mathcal{T}_0 = IJK$, il en existe une et une seule d'aire minimale.

– II – Formes quadratiques réelles définies positives

Pour cette partie, E est un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$ et on se donne une base $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de E .

Étant donnée une norme $\|\cdot\|$ sur E , on note $\mathcal{B}_n = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$ la boule unité correspondante.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $Q(E)$, $Q^+(E)$ et $Q^{++}(E)$ les ensembles respectivement formés des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, des matrices symétriques réelles d'ordre n , des matrices symétriques réelles positives d'ordre n , des matrices symétriques réelles définies positives d'ordre n , des formes quadratiques réelles sur E , des formes quadratiques réelles positives sur E et des formes quadratiques réelles définies positives sur E .

Pour tous réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, on note :

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme N' définie par $N'(A) = \sup_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$ pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $Q(E)$ est muni de la norme N définie par $N(q) = \sup_{x \in \mathcal{B}_n} |q(x)|$ pour toute forme quadratique q .

On note $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe multiplicatif des matrices réelles carrées d'ordre $n \geq 1$ qui sont inversibles.

1. Soient $q_0 \in Q^{++}(E)$ une forme quadratique définie positive de forme polaire φ_0 . On se propose de montrer le *théorème de réduction simultanée* qui nous dit que : pour toute forme quadratique $q \in Q(E)$, il existe une base de E qui est q_0 -orthonormée et q -orthogonale. Pour ce faire, on raisonne par récurrence sur la dimension $n \geq 1$ de E . Pour $n = 1$, le résultat est évident. Supposant le résultat acquis au rang $n - 1 \geq 2$, on se donne une forme quadratique q sur E de forme polaire φ .
 - (a) Justifier l'existence d'un vecteur $f_1 \in S(q_0) = \{x \in E, q_0(x) = 1\}$ tel que $q(f_1) = \sup_{x \in S(q_0)} q(x)$.
 - (b) En posant $\lambda_1 = q(f_1)$, montrer que la forme quadratique $q_1 = \lambda_1 q_0 - q$ est positive et que le vecteur f_1 est dans le noyau de q_1 .
 - (c) En désignant par H_1 l'orthogonal de la droite $\mathbb{R}f_1$ relativement à φ_0 , montrer que $E = \mathbb{R}f_1 \oplus H_1$ et conclure.
2. Soient $A_0 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que ${}^t P A_0 P = I_n$ et ${}^t P A P$ est diagonale (*théorème de réduction simultanée*). Pour $A_0 = I_n$, la matrice P est orthogonale et on retrouve le classique *théorème spectral*.
3. Soit q une forme quadratique sur E de matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (a) la forme quadratique q est définie positive ;
 - (b) la matrice A est définie positive ;
 - (c) toutes les valeurs propres de A sont réelles strictement positives ;
 - (d) tous les mineurs principaux de A sont strictement positifs ;
 - (e) il existe une matrice $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^t B B$;
 - (f) il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$ (la matrice B est la *racine carrée* de A notée $\sqrt{A}$).
4. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres (réelles) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que pour toute fonction convexe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on a $\sum_{i=1}^n f(a_{ii}) \leq \sum_{i=1}^n f(\lambda_i)$. En déduire que pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $\det(A) \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}$. Ce résultat est-il encore valable pour $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$?
5. Montrer que :
 - (a) $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ [resp. $Q^{++}(E)$] est un ouvert convexe de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N')$ [resp. de $(Q(E), N)$] ;

- (b) $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ [resp. $Q^+(E)$] est un fermé convexe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N')$ [resp. de $(Q(E), N)$] et que son intérieur est $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ [resp. est $Q^{++}(E)$].

6. Soient A, B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- (a) Montrer que pour tout $t \in]0, 1[$, on a :

$$\det(tA + (1-t)B) \geq (\det(A))^t (\det(B))^{1-t}$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, $A = B$. Cela se traduit en disant que la fonction $\det$ est strictement logarithmiquement concave sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- (b) En déduire que la fonction $\frac{1}{\det}$ est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

7. Montrer que pour toutes matrices A, B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a :

$$(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}}$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, A et B sont positivement liées (on peut utiliser l'inégalité arithmético-géométrique). Retrouver la stricte convexité de la fonction $\frac{1}{\det}$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

8. Connaissant la valeur de l'intégrale de GAUSS $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, calculer $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx$ pour tout entier $n \geq 2$ où $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Plus généralement, calculer $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} dx$ pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Retrouver la stricte convexité de la fonction $\frac{1}{\det}$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

– III – Ellipsoïdes dans $\mathbb{R}^n$

Pour cette partie on se donne un entier $n \geq 2$ et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure usuelle d'espace euclidien, $\mathcal{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$ est la boule unité correspondante et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

À toute forme quadratique positive $q \in Q^+(\mathbb{R}^n)$, on associe l'ensemble :

$$\mathcal{E}(q) = \{x \in \mathbb{R}^n, q(x) \leq 1\}$$

Dans le cas où q est définie positive, on dit que $\mathcal{E}(q)$ est un *ellipsoïde* (ou plus précisément l'intérieur d'un ellipsoïde).

1. Soit $q \in Q^{++}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\mathcal{E}(q)$ est convexe, compact et symétrique (*i. e.* stable par la symétrie $x \mapsto -x$).
2. Montrer qu'un ellipsoïde est l'image de la boule unité $\mathcal{B}_n$ par un isomorphisme et que réciproquement, l'image de la boule unité $\mathcal{B}_n$ par un isomorphisme est un ellipsoïde (on peut utiliser le théorème de décomposition polaire).

3. Soient q, q' deux formes quadratiques définies positives de matrices respectives A, A' dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.
- (a) Montrer que les valeurs propres de $A^{-1}A'$ sont strictement positives.
 - (b) On suppose que $q' \leq q$. Montrer que $\mathcal{E}(q) \subset \mathcal{E}(q')$, les valeurs propres de $A^{-1}A'$ sont dans l'intervalle $]0, 1]$ et $\det(A') \leq \det(A)$.
 - (c) Montrer que $\mathcal{E}(q) = \mathcal{E}(q')$ si, et seulement si, $q = q'$.
4. Pour tout entier $n \geq 2$, on note V_n le volume de la boule euclidienne $\mathcal{B}_n$ de $\mathbb{R}^n$. Pour $n = 0$ et $n = 1$, on note $V_0 = 1$ et $V_1 = 2$.
- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $R \in \mathbb{R}^{+,*}$, le volume $V_n(R)$ de la boule $B_n(0, R)$ de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{R}^n$ est $V_n(R) = R^n V_n$.
 - (b) En désignant par $(W_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des intégrales de WALLIS, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $V_n = 2V_{n-1}W_n$.
 - (c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a $\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2}$, puis en déduire que $V_{n+2} = \frac{2\pi}{n+2}V_n$ et :

$$V_n = \begin{cases} \frac{\pi^p}{p!} & \text{si } n = 2p \\ \frac{2^{2p+1}p!}{(2p+1)!}\pi^p & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

5. Soient $q \in Q^{++}(\mathbb{R}^n)$ de matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{E}(q)$ l'ellipsoïde correspondant.

- (a) Montrer que le volume de $\mathcal{E}(q)$ est $V(q) = \frac{V_n}{\sqrt{\det(A)}} = \frac{V_n}{\sqrt{\prod_{1 \leq i \leq n} \lambda_i}}$, où

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres distinctes ou confondues de A .

- (b) En utilisant le résultat de la question précédente, retrouver le fait que si $q' \in Q^{++}(\mathbb{R}^n)$ de matrice $A' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{B}$ est telle que $q' \leq q$, on a alors $\det(A') \leq \det(A)$.
- (c) En utilisant une expression réduite de q dans une base orthonormée de la forme $q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{a_i^2}$, donner une expression de $V(q)$.
- (d) Montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)} dx = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}$ et $V(q) = \frac{V_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)} dx$.
- (e) Montrer que l'application $V : q \in Q^{++}(\mathbb{R}^n) \mapsto V(q) \in \mathbb{R}^{+,*}$ est continue et strictement convexe. Retrouver la stricte convexité de $\frac{1}{\det}$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

– IV – Ellipsoïde de C. LOEWNER

Étant donné un compact K d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$, on désigne par $\mathcal{Q}(K)$ l'ensemble des formes quadratiques positives q telles que $K \subset \mathcal{E}(q)$.

1. Montrer que $\mathcal{Q}(K)$ contient des formes quadratiques définies positives.
2. Montrer que $\mathcal{Q}(K)$ est convexe et compact dans l'espace normé $(\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n), N)$.
3. Montrer qu'il existe un unique ellipsoïde $\mathcal{E}(q_0)$ de volume minimum qui contient K (théorème de LOEWNER).
4. Vérifier que l'ensemble $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq 1 \text{ et } y = 0\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ d'intérieur vide. Existe-t-il une ellipse d'aire minimale contenant K ?

– V – Jauge d'un convexe compact

Pour cette partie, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé réel et on se donne un convexe compact K dans E qui contient 0 dans son intérieur et pour tout $x \in E$, on note $I_K(x) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^{+,*}, \frac{1}{\lambda}x \in K \right\}$.

On dit qu'une partie non vide A de E est symétrique, si elle est stable par la symétrie $x \mapsto -x$.

1. Montrer que $I_K(0) = \mathbb{R}^{+,*}$ et que, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, l'ensemble $I_K(x)$ est un intervalle fermé non majoré de $\mathbb{R}^{+,*}$. On peut donc définir la fonction $j_K : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ par $j_K(x) = \inf(I_K(x))$. Cette fonction j_K est la *jauge* de K .
2. Expliciter j_K dans les cas suivants :
 - (a) $E = \mathbb{R}^n$ et $K = \mathcal{E}(q)$ est un ellipsoïde ;
 - (b) $\|\cdot\|'$ est une norme sur E et K est la boule unité de $(E, \|\cdot\|')$;
 - (c) $E = \mathbb{R}^2$ et K est un parallélogramme de centre 0.
3. En notant $\partial K = K \setminus \overset{\circ}{K}$ la frontière de K , montrer que $K = \{x \in E, j_K(x) \leq 1\}$ et $\partial K = \{x \in \mathbb{R}^n, j_K(x) = 1\}$.
4. Montrer que, pour tous x, y dans E et tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on a $j_K(\lambda x) = \lambda j_K(x)$ et $j_K(x + y) \leq j_K(x) + j_K(y)$.
5. Dans l'hypothèse où K est symétrique, montrer que j_K est une norme sur E .
6. Montrer qu'un convexe compact d'intérieur non vide et symétrique dans E contient 0 en son intérieur, puis que c'est la boule unité de E pour une certaine norme, sa frontière étant la sphère unité.
7. Pour cette question, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et on note $K^* = \{y \in E, \forall x \in K, \langle x, y \rangle \leq 1\}$. On rappelle que l'adjoint d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ est l'application linéaire $u^* \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$ pour tous x, y dans E .
 - (a) Montrer que K^* est un convexe compact qui contient 0 dans son intérieur.
 - (b) Montrer que $j_{K^*}(y) = \max_{x \in K} \langle x, y \rangle$ pour tout $y \in E$.
 - (c) Montrer que pour tout $u \in GL(E)$, on a $(u(K))^* = (u^*)^{-1}(K^*)$.

(d) Expliciter K^* et j_{K^*} pour chacun des cas suivants :

- i. K est la boule unité de $E = \mathbb{R}^n$ et $K = \mathcal{E}(q)$ est un ellipsoïde ;
- ii. $E = \mathbb{R}^n$ et $K = \left\{ (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n, \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq 1 \right\}$;
- iii. $E = \mathbb{R}^2$ et K est un parallélogramme de centre 0.

(e) Dans l'hypothèse où K est symétrique dans E , montrer que j_{K^*} est une norme sur E . Que dire des espaces normés (E, j_K) et (E, j_{K^*}) ?

– VI – Ellipsoïde de F. JOHN

Pour cette partie on se donne un entier $n \geq 2$ et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure usuelle d'espace euclidien, $\mathcal{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$ est la boule unité correspondante.

On se donne un convexe compact symétrique K d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$ et pour tout réel $\mu > 0$, on désigne par $\mathcal{Q}(K, \mu)$ l'ensemble des formes quadratiques définies positives q telles que $\mathcal{E}(q) \subset K$ et $V(q) \geq \mu$, où $V(q)$ est le volume de l'ellipsoïde $\mathcal{E}(q)$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A(\mathcal{B}_n) \subset K\}$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (on peut utiliser les questions **V.5** et **V.6**).
2. Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$, l'ensemble :

$$\mathcal{M}(K, \lambda) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A(\mathcal{B}_n) \subset K \text{ et } \det(A) \geq \lambda\}$$

est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que pour tout réel $\mu > 0$, l'ensemble $\mathcal{Q}(K, \mu)$ est un compact de $Q^{++}(\mathbb{R}^n)$.
4. Dédire de ce qui précède qu'il existe un unique ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ inclus dans K et de volume maximum (théorème de JOHN).





Transformations de CESÀRO, d'EULER et de TOEPLITZ

10.1 Rappels de cours

Ce problème ne nécessite que quelques connaissances de base sur les suites dans un espace normé et les suites numériques (*i. e.* à valeurs réelles ou complexes). Il est bon aussi de connaître les principaux résultats sur les séries numériques.

Une suite de CAUCHY est bornée. Une suite convergente est de CAUCHY. Pour deux normes équivalentes, une suite est de CAUCHY pour l'une si, et seulement si, elle l'est pour l'autre.

Une suite périodique converge si, et seulement si, elle est constante.

Une suite numérique est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy.

Connaître la notion de développement asymptotique est aussi utile.

On désigne par a un élément de $\mathbb{R}$. On appelle échelle de comparaison au voisinage de a une famille $(\varphi_k)_{k \in K}$ de fonctions définies au voisinage de a éventuellement privé de a telles que :

- pour tout $k \in K$ et tout voisinage $\mathcal{V}$ de a , il existe x dans $\mathcal{V} \setminus \{a\}$ tel que $\varphi_k(x) \neq 0$;
- pour tous j, k dans K , on a $\varphi_j = o(\varphi_k)$ ou $\varphi_k = o(\varphi_j)$.

On peut considérer par exemple les familles de fonctions suivantes :

- $((x-a)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ou $((x-a)^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$;
- $(x^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ au voisinage de $+\infty$ ou $(|x|^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ au voisinage de $\pm\infty$ ou de 0 ;
- $(x^\alpha \ln^\beta(x))_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2}$ ou $(x^\alpha e^{\beta x} \ln^\gamma(x))_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3}$ au voisinage de $+\infty$.

On dit qu'une fonction f à valeurs réelles (ou complexes) définie sur un intervalle réel I non réduit à un point admet un développement asymptotique au voisinage d'un point a de l'adhérence de I relativement à l'échelle de comparaison $(\varphi_k)_{k \in K}$, si au voisinage de a éventuellement privé de a , on a une écriture de la forme $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j \varphi_{k_j}(x) + o(\varphi_{k_n}(x))$, où les a_j sont des constantes

réelles (ou complexes) et $\varphi_{k_{j+1}} = o(\varphi_{k_j})$ pour tout j compris entre 0 et $n-1$.

10.2 Énoncé

$(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé réel ou complexe non réduit à $\{0\}$.

– I – Un théorème de CESÀRO

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ d'éléments de E converge au sens de Cesàro vers $\ell \in E$, si la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} u_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de ses moyennes arithmétiques converge vers ℓ . Dans la pratique, on aura $n_0 = 0$ et $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ ou $n_0 = 1$ et $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$.

1. On se donne une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et à toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E , on associe la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de ses moyennes pondérées définie par $v_n = \frac{1}{A_n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k$ où $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$. Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente d'éléments de E [resp. une suite réelle divergente vers $-\infty$ ou $+\infty$], la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alors convergente de même limite que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [resp. divergente vers $-\infty$ ou vers $+\infty$] (théorème de CESÀRO).
- (b) Réciproquement, montrer que si pour toute suite convergente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E , la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la même limite, on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$.

2. Montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E convergente est convergente au sens de CESÀRO. La réciproque est-elle vraie ?
3. Soient $\theta \in]0, 2\pi[$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite complexe définie par $u_n = e^{in\theta}$. Étudier la convergence au sens usuel et au sens de CESÀRO de cette suite.
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$. Étudier la convergence au sens usuel et au sens de CESÀRO de cette suite.
5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

- (a) la suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n u_k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des moyennes géométriques converge vers ℓ ;
- (b) si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \ell$, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{u_n}) = \ell$;

(c) la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des moyennes harmoniques converge vers ℓ .

6. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$.

- (a) Montrer que si $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell$, on a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \ell$ (version continue du théorème de CESÀRO). La réciproque est-elle vraie ?
- (b) Dans le cas où la fonction f est dérivable, montrer que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \ell$, on a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$.

– II – « Réciproques » du théorème de CESÀRO

1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle monotone. Montrer que :

- (a) la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de ses moyennes de CESÀRO est monotone de même sens de variation que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$;
- (b) si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de CESÀRO vers $\ell \in \mathbb{R}$, elle converge alors vers ℓ .

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de E telle que $u_n - u_{n-1} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

- (a) En notant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de ses moyennes de CESÀRO, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n - v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k(u_k - u_{k-1})$.
- (b) Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge au sens de CESÀRO vers ℓ , elle converge alors vers ℓ (théorème de HARDY faible).

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de E telle que $u_n - u_{n-1} = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

- (a) En notant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de ses moyennes de CESÀRO, montrer que tous pour $m > n$ dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$u_m - v_m = \frac{n}{m-n} (v_m - v_n) + \frac{1}{m-n} \sum_{k=n}^{m-1} (u_m - u_k)$$

- (b) Justifier l'existence du réel $M = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} n \|u_n - u_{n-1}\|$, puis montrer que pour tous $m > n$ dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\|u_m - v_m\| \leq \frac{n}{m-n} \|v_m - v_n\| + M \frac{m-n}{n+1}$$

- (c) Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge au sens de CÉSÀRO vers ℓ , elle converge alors vers ℓ (théorème de HARDY fort).

– III – Quelques applications du théorème de CÉSÀRO

1.

- (a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} u_n = \ell$.

- (b) Soient α un réel strictement positif et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1}^{\alpha+1} - u_n^{\alpha+1}) = \alpha + 1$, puis donner un équivalent de u_n à l'infini.

- (c) Soit $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle strictement croissante et non majorée avec $\gamma_0 > 0$. Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\gamma_{n+1} - \gamma_n} (u_{n+1} - u_n) \right) = \ell$, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\gamma_n} u_n \right) = \ell$ (théorème de STOLZ).

- (d) En notant $S_\alpha(n) = \sum_{k=1}^n k^\alpha$ pour tout réel $\alpha > -1$ et tout entier $n \geq 1$, montrer que $S_\alpha(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de E . Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} u_k = \ell$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge alors au sens de CÉSÀRO vers 0.

3. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques convergentes respectivement vers ℓ et ℓ' . Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \ell'$.

4. Soit $f : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$ une fonction continue admettant au voisinage de 0 un développement asymptotique de la forme $f(x) = x - ax^{\alpha+1} + o_{x \rightarrow 0^+}(x^{\alpha+1})$ où a et α sont deux réels strictement positifs. On désigne par $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $x_0 \in [0, 1[$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Montrer qu'il existe un réel $\eta \in]0, 1[$ tel que pour tout $x_0 \in]0, \eta[$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.

- (b) Montrer que pour tout $x_0 \in]0, \eta[$, on a $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha a)^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$.

- (c) On suppose que l'on a le développement asymptotique :

$$f(x) = x - ax^{\alpha+1} - bx^{2\alpha+1} + o_{x \rightarrow 0^+}(x^{2\alpha+1})$$

où $b \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\frac{1}{x_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{x_n^\alpha} - \alpha a \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{n}$, où $c = \frac{b}{a} + \frac{\alpha+1}{2}a$, puis justifier le développement asymptotique :

$$x_n = \frac{1}{(\alpha a)^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} - \frac{c}{\alpha} \frac{1}{(\alpha a)^{1+\frac{1}{\alpha}}} \frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{\alpha}}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{\alpha}}}\right)$$

- (d) Pour $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que :

$$x_n = \frac{2}{n} + \frac{2}{3} \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

et pour $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $x_{n+1} = \sin(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que :

$$x_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$$

– IV – Fonctions conservant la convergence au sens de CESÀRO

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ conserve la convergence au sens de CESÀRO, si pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge au sens de Cesàro vers ℓ , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro vers $f(\ell)$.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est *mid-convexe* [resp. *mid-concave*] si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \text{ [resp. } f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}]$$

Une fonction convexe [resp. concave] est mid-convexe [resp. mid-concave].

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et concave.

- Montrer que $g = f - f(0)$ est aussi convexe et concave, puis qu'elle est impaire.
- En notant $a = g(1)$, montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g(t) = at$ et conclure.

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mid-convexe.

- En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_n = \left\{ \lambda_{n,k} = \frac{k}{2^n}, 0 \leq k \leq 2^n \right\}$, montrer que pour tout $\lambda \in \Sigma_{n+1}$, il existe μ et ν dans Σ_n tels que $\lambda = \frac{\mu + \nu}{2}$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in \Sigma_n$, on a :

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

- Montrer que l'ensemble $\Sigma = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \Sigma_n$ est dense dans $[0, 1]$.
- Montrer que si f est continue, elle est alors convexe.

3. Montrer qu'une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est concave si, et seulement si, elle est mid-concave.
4. Montrer que les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solutions de l'équation fonctionnelle de JENSEN $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sont les fonctions affines.
5. Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui conservent la convergence au sens de CÉSÀRO.

– V – Convergence au sens d'EULER

On se donne deux réels a et b strictement positif et on associe à toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E , la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses moyennes d'EULER définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{(a+b)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} u_k$$

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors vers la même limite.
2. Le résultat de la question précédente est-il valable dans le cas où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle qui converge vers $+\infty$ [resp. vers $-\infty$] ?
3. On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente.

(a) En désignant par $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ définie par $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et par $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la transformée d'EULER correspondante, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sigma_{n+1} - \sigma_n = \frac{a}{a+b} v_n$.

(b) En déduire que la série $\sum v_n$ converge vers $\frac{a+b}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

4. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière sur $] -R, R[$, où $R \in \mathbb{R}^{+,*}$.

(a) En utilisant la transformation d'EULER avec $a = \frac{R}{x}$ pour $x \in]0, R[$ et

$$b = R, \text{ montrer que } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{x^n}{(1+x)^{n+1}} \text{ où } b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k.$$

(b) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}}, \quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n} x^{2n+1}}{(2n+1) \binom{2n}{n} (1+x^2)^{n+1}}$$

– VI – Transformation de TOEPLITZ

On se donne une suite double $(a_{n,k})_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n}$ de réels telle que :

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,k} = 0$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_{n,k} = 1$;
- il existe un réel $C > 0$ tel que $\sum_{k=0}^n |a_{n,k}| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans le cas où les $a_{n,k}$ sont tous positifs, la troisième condition est inutile car conséquence de la deuxième.

On associe à toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E , la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^n a_{n,k} u_k$$

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E , la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors vers la même limite (théorème de TOEPLITZ).
2. Dans le cas où la suite $(a_{n,k})_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n}$ est à valeurs strictement positives, montrer que le résultat de la question précédente est valable pour une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $+\infty$ [resp. vers $-\infty$]. Qu'en est-il sans hypothèse de positivité des $a_{n,k}$?
3. Retrouver le théorème de CESÀRO de la question **I.1a** en utilisant celui de TOEPLITZ.
4. Retrouver le résultat de la question **II.1** en utilisant le théorème de TOEPLITZ.
5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergente vers $\ell \in E$. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k u_k = \frac{1}{2} \ell$$

6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergente vers $\ell \in E$. Montrer que, pour tout réel $\alpha > -1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^n k^\alpha u_k = \frac{1}{\alpha+1} \ell$. Que peut-on dire pour $\alpha = -1$?
7. Soit $(b_{n,k})_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n}$ une suite double de réels telle que :

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n,k} = b_k$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n b_{n,k} = B$;
- il existe un réel $D > 0$ tel que $\sum_{k=0}^n |b_{n,k}| \leq D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On associe à toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E , la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n b_{n,k} u_k$$

- (a) Montrer que la série $\sum b_k$ est convergente. On notera S sa somme.
- (b) Dans le cas où $S \neq B$, montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E vers ℓ , la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors convergente vers une limite à préciser.
- (c) Dans le cas où $S = B$, montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E vers ℓ , la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors convergente vers une limite à préciser.





Autour de la formule de STIRLING

11.1 Rappels de cours

Définition Deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

Théorème Deux suites réelles adjacentes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ , avec $u_n \leq \ell \leq v_m$ pour tous n, m dans $\mathbb{N}$.

Définition Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques. On dit que :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe un entier $n_0 \geq 0$ et une suite bornée $(\varphi_n)_{n \geq n_0}$ tels que $u_n = \varphi_n v_n$ pour tout $n \geq n_0$;
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, s'il existe un entier $n_0 \geq 0$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq n_0}$ convergente vers 0 tels que $u_n = \varepsilon_n v_n$ pour tout $n \geq n_0$;
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, s'il existe un entier $n_0 \geq 0$ et une suite $(\varphi_n)_{n \geq n_0}$ convergente vers 1 tels que $u_n = \varphi_n v_n$ pour tout $n \geq n_0$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites numériques équivalentes, elles sont alors de même nature. En cas de convergence, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Dans le cas où les deux suites sont à valeurs réelles strictement positive l'équivalence revient à dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(v_n) - \ln(u_n)) = 0$.

Théorème (Convergence dominée) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ qui converge simplement vers une fonction f continue par

morceaux. S'il existe une fonction φ continue par morceaux à valeurs réelles positives telle $|f_n| \leq \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

On peut utiliser la version suivante du théorème de FUBINI-TONELLI que l'on admet :

Soient I, J deux intervalles réels non réduits à un point. Si f est une fonction continue de $I \times J$ dans $\mathbb{R}_+$, on a alors l'égalité dans $\mathbb{R}_+$:

$$\int_J \left(\int_I f(x, y) dx \right) dy = \int_I \left(\int_J f(x, y) dy \right) dx$$

Pour tout réel $\lambda > 0$, on définit une unique probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ avec $\mathbb{P}(\{k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est la loi de POISSON de paramètre λ . On note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et ses moments sont $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de POISSON de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors $\sum_{k=1}^n X_k$ suit une loi de POISSON de paramètre $\sum_{k=1}^n \lambda_k$.

Le théorème de la limite centrale nous dit que la plupart des phénomènes probabilistes suivent approximativement une loi normale.

Théorème Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi X d'espérance μ et d'écart type σ . En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^n X_k - n\mu \right)$$

la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, c'est-à-dire que, pour tout réel x , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

11.2 Énoncé

– I – Quelques résultats préliminaires

- Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels tous strictement positifs. Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$, alors les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers un même réel ℓ strictement positif.
- Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par $\varphi(x) = (2x+1) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$.
 - Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, on a $0 < \varphi(x) - 2 < \frac{1}{6x(x+1)}$.
 - Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, on a :

$$\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)(2x+1)^{2k+1}}$$

et retrouver l'encadrement $0 < \varphi(x) - 2 < \frac{1}{6x(x+1)}$ pour tout $\mathbb{R}^{+,*}$.

3. Montrer pour tout $t \in]-1, 1[$, on a $\ln(1+t) - t \leq -(1 - \ln 2)t^2$ et que pour tout $t \geq 1$, on a $\ln(1+t) \leq \ln(2)t$.

4.

- (a) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de GAUSS).

- (b) Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\int_0^{+\infty} F(x) dx$.

5. On rappelle que la fonction ζ de RIEMANN est définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Pour tout réel $\alpha > 1$ et tout entier naturel n , on note

$$R_n(\alpha) = \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^\alpha} \text{ le reste d'ordre } n \text{ de la série } \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^\alpha}.$$

- (a) En utilisant la fonction ζ de RIEMANN, donner pour tout réel $\alpha > 1$, une expression de $R_0(\alpha) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^\alpha}$.

- (b) Montrer que pour tout réel $\alpha > 1$, on a :

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)2^\alpha} \frac{1}{n^{\alpha-1}} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)$$

- (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{R_n(2k)}{2k+1}$ est convergente, puis

$$\text{que pour tout } p \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{R_n(2k)}{2k+1} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{2p-2}} \right).$$

– II – Intégrales de WALLIS

On note $(W_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des intégrales de WALLIS.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.
- Calculer W_0 et W_1 .
- Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$, puis en déduire que $W_{n+1} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(n+1)W_n}$. Il suffit donc de calculer W_n pour n pair ou pour n impair.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\cos(t))^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((2k-n)t)$$

puis en déduire que $W_{2n} = \frac{\binom{2n}{n} \pi}{2^{2n} 2}$ et $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}}{(2n+1) \binom{2n}{n}}$.

6. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n+1} W_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, soit que $\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_n = \sqrt{n} W_{2n+1}$, puis en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(b) Montrer que l'on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et retrouver ainsi la valeur de l'intégrale de GAUSS.

– III – Formule de STIRLING

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites réelles définies par $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ et $v_n = u_n e^{\frac{1}{12n}}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers un même réel ℓ strictement positif, puis que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\ell} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

2. Montrer que pour tout entier $p \geq 3$ et tout réel $x \in [0, 1]$, on a $e^x \leq (1+x)^p$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{\sqrt{n}}{\ell} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \frac{\sqrt{n}}{\ell} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

4. En utilisant la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des intégrales de WALLIS, montrer que $\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

On a donc $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (formule de STIRLING) et l'encadrement :

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

– IV – Une démonstration probabiliste de la formule de STIRLING

1. Soient $X_1, \dots, X_n$ une suite de $n \geq 2$ variables aléatoires indépendantes suivant une loi de POISSON de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que la variable

aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ suit une loi de POISSON de paramètre $\sum_{k=1}^n \lambda_k$.

2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une même loi de POISSON de paramètre 1. On lui associe les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies par $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

(a) Justifier pour tout réel x , l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_n \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

(b) En exploitant la question précédente, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$.

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > t) dt = \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) dx$ et en déduire la formule de STIRLING.

– V – Fonction Γ et formule de STIRLING

On rappelle que la fonction gamma est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

- Justifier la définition de $\Gamma(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, puis montrer que l'on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$. Que vaut $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$?
-

(a) Montrer, que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, on a :

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}\theta} \left(1 + \frac{\theta}{\sqrt{x}}\right)^x d\theta$$

(b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}\theta} \left(1 + \frac{\theta}{\sqrt{x}}\right)^x d\theta = 0$.

(c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}\theta} \left(1 + \frac{\theta}{\sqrt{x}}\right)^x d\theta = \sqrt{2\pi}$.

(d) Dédurre de ce qui précède que $\Gamma(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$ (formule de STIRLING). En se restreignant aux entiers, on retrouve la formule de STIRLING sur les entiers : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

– VI – Un raffinement de la formule de STIRLING

On reprend la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie en partie **III** par $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. On sait que cette suite converge vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et on se propose d'en donner un développement asymptotique en $\frac{1}{n}$.

1. On se fixe un entier $n \geq 2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $R_n(2k) = \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^{2k}}$ le reste d'ordre n de la série $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^{2k}}$ (notations de la question **I.5**).

(a) Montrer que :

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_1}\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\left(j + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right) - 1 \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R_1(2k)}{2k+1} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R_n(2k)}{2k+1}$$

- (b) Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R_1(2k)}{2k+1} = 1 + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$, puis en déduire qu'on a l'égalité

$$\ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R_n(2k)}{2k+1}.$$

- (c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si chaque suite $(R_n(2k))_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour $1 \leq k \leq p$, admet un développement limité en $\frac{1}{n}$ à l'ordre $2p$, la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ en possède alors un égal à celui de la suite $\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \sum_{k=1}^p \frac{R_n(2k)}{2k+1}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- (d) Montrer que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ possède un développement limité en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 2. En déduire celui de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à cet ordre, puis que :

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

- (e) Pour les courageux¹, donner le développement limité en $\frac{1}{n}$ de u_n à l'ordre 3.

– VII – Polynômes de BERNOULLI et formule d'EULER-MACLAURIN

On rappelle la formule d'intégration par parties itérée :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f^{(n)}(x) g(x) dx = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(n-1-k)} g^{(k)} \right]_{\alpha}^{\beta} + (-1)^n \int_{\alpha}^{\beta} f(x) g^{(n)}(x) dx$$

1. On peut ignorer cette question, dans un premier temps.

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un segment $[\alpha, \beta]$.

On reprend la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie en partie **III** par $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

1. Montrer que toute fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ admet une unique primitive F telle que $\int_0^1 F(x) dx = 0$.

On peut donc définir la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des polynômes de BERNOULLI par $B_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 1, B'_n = nB_{n-1} \text{ et } \int_0^1 B_n(x) dx = 0 \quad (11.1)$$

On vérifie facilement que chaque B_n est un polynôme unitaire de degré n . À cette suite de polynômes, on associe la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (B_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ des nombres de BERNOULLI.

2. Calculer les B_n et b_n pour $n \in \{0, 1, 2\}$.

3. Montrer que l'on a :

$$(a) \quad B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x) \text{ et } (-1)^k B_n^{(k)}(1-x) = (-1)^n B_n^{(k)}(x) \text{ pour tous } n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k \leq n;$$

$$(b) \quad B_n(1) = B_n(0) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\};$$

$$(c) \quad b_{2p+1} = 0 \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}^*;$$

$$(d) \quad B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k} \text{ pour tous } n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k \leq n, \text{ avec en particulier, } B_n^{(n)} = n!;$$

$$(e) \quad B_n^{(n-1)}(1) = -B_n^{(n-1)}(0) = \frac{n!}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*;$$

$$(f) \quad B_n^{(k)}(0) = B_n^{(k)}(1) = \frac{n!}{(n-k)!} b_{n-k} \text{ pour tous } n \geq 2 \text{ et } 0 \leq k \leq n-2.$$

4. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{2p}$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \sum_{k=1}^p \frac{b_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0) \right) + \int_0^1 \frac{B_{2p}(t)}{(2p)!} f^{(2p)}(t) dt$$

5. Soient n, p deux entiers naturels non nuls et $f : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{2p}$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_0^n f(t) dt + \frac{f(n) - f(0)}{2} + \sum_{j=1}^p \frac{b_{2j}}{(2j)!} \left(f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(0) \right) - \int_0^n \frac{\widetilde{B_{2p}}(t)}{(2p)!} f^{(2p)}(t) dt$$

où $\widetilde{B_{2p}}$ est la fonction 1-périodique qui coïncide avec B_{2p} sur $[0, 1]$ (on a $B_{2p}(1) = B_{2p}(0)$). C'est la formule d'EULER-MACLAURIN.

6. Pour cette question, f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \ln(1+x)$.

- (a) Calculer les dérivées $f^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $\int_0^{n-1} f(t) dt$ pour $n \geq 2$.
- (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante réelle λ_p telle que :

$$\ln(u_n) = \lambda_p - \sum_{j=1}^p \frac{b_{2j}}{(2j)(2j-1)} \frac{1}{n^{2j-1}} - \frac{1}{2p} \int_0^{n-1} \frac{\widetilde{B_{2p}}(t)}{(1+t)^{2p}} dt$$

- (c) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\widetilde{B_{2p}}(t)}{(1+t)^{2p}} dt$ est absolument convergente et que :

$$\int_{n-1}^{+\infty} \frac{\widetilde{B_{2p}}(t)}{(1+t)^{2p}} dt = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{2p-2}} \right)$$

- (d) Montrer que pour tout $p \geq 2$, on a le développement asymptotique en $\frac{1}{n}$ à l'ordre $2p-2$:

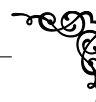
$$\ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \sum_{j=1}^{p-1} \frac{b_{2j}}{(2j)(2j-1)} \frac{1}{n^{2j-1}} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{2p-2}} \right)$$

- (e) Préciser ces développements asymptotiques pour $p=2$ et $p=3$, en admettant que $b_4 = -\frac{1}{30}$.





PROBLÈME 12



Fonctions absolument monotones

12.1 Rappels de cours

Pour f, g fonctions de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n fois dérivables en $\alpha \in I$, on a la formule de LEIBNIZ :

$$(fg)^{(n)}(\alpha) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(\alpha) g^{(n-k)}(\alpha).$$

Du théorème de ROLLE on déduit la formule de TAYLOR-LAGRANGE qui est une généralisation du théorème des accroissements finis.

Théorème Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, de classe $\mathcal{C}^n$ sur cet intervalle et $n+1$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

La formule de TAYLOR avec reste intégral permet d'obtenir des résultats plus fins que celle formule de TAYLOR-LAGRANGE. Cette formule nécessite une hypothèse supplémentaire de continuité de la dernière dérivée.

Théorème Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction à valeurs réelles (ou dans un espace de BANACH) définie et de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, on a alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt$$

Définition On dit qu'une fonction f définie sur un disque ouvert $D(a, R)$ de centre a et de rayon $R > 0$ du plan complexe est *développable en série entière* s'il existe une suite de nombres complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ pour tout $z \in D(a, R)$.

On se place sur un intervalle réel $[a, b[$ où $-\infty < a < b \leq +\infty$.

Théorème (Convergence dominée) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux. S'il existe une fonction φ continue par morceaux à valeurs réelles positives telle $|f_n| \leq \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Théorème Soit $f : X \times [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que :

- pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est localement RIEMANN-intégrable sur $[a, b[$;
- pour tout $t \in [a, b[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur X ;
- il existe une fonction φ localement RIEMANN-intégrable sur $[a, b[$ à valeurs réelles positives telle l'intégrale $\int_a^b \varphi(x) dx$ soit convergente et $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $(x, t) \in X \times [a, b[$.

Dans ces conditions, la fonction $F : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ est bien définie et continue sur X .

12.2 Énoncé

– I – Fonctions absolument monotones

On se donne $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On dit qu'une fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est *absolument monotone* sur $]a, b[$, si elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$ et telle que $f^{(n)}(x) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]a, b[$. Dans le cas où a est fini, on dit que f est absolument monotone sur $[a, b[$, si elle est absolument monotone sur $]a, b[$ et continue à droite en a . On définit de façon analogue une fonction absolument monotone sur $]a, b]$ pour b fini et une fonction absolument monotone sur $[a, b]$ pour a et b finis.

On note pour tout intervalle réel I non réduit à un point, $\mathcal{A}(I)$ l'ensemble des fonctions absolument monotones sur I .

1. Soient I un intervalle réel ouvert non vide et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est absolument monotone sur I si, et seulement si, elle est à valeurs positives et dérivable de dérivée absolument monotone sur I .
2. Sur quels intervalles réels les fonctions de la variable réelle x prenant respectivement les valeurs e^x , $-\frac{1}{x}$, $-\ln(-x)$, $\arcsin(x)$ sont-elles absolument monotones ?

3.

- (a) Montrer que la somme et le produit de deux fonctions absolument monotones sur un même intervalle réel I sont absolument monotones sur I .
- (b) Montrer que si une fonction f est absolument monotone sur un intervalle ouvert I et si g est une fonction absolument monotone sur un intervalle ouvert J qui contient $f(I)$, la composée $g \circ f$ est alors absolument monotone sur I .

– II – Prolongement de fonctions absolument monotones

Pour cette partie, $a < b$ sont finis.

1. Soit $f \in \mathcal{A}([a, b])$.

- (a) Montrer que f peut être prolongée sur $[a, b[$ en une fonction absolument monotone sur $[a, b[$.
- (b) Montrer que cette dernière fonction est indéfiniment dérivable en a .
- (c) À quelle condition nécessaire et suffisante peut-on prolonger f en une fonction absolument monotone sur $[a, b]$? La fonction obtenue est-elle nécessairement dérivable en b ?

2. On se donne une fonction $f \in \mathcal{A}([a, b])$ et on lui associe la suite de fonctions $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $[a, b[$ par :

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

- (a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a, b[$, on a :

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \quad (12.1)$$

puis que la fonction $x \mapsto \frac{R_n(x)}{(x-a)^n}$ est croissante sur $]a, b[$.

- (b) Montrer que f peut être prolongée en une fonction F développable en série entière sur le disque complexe ouvert $D(a, b-a) = \{z \in \mathbb{C}, |z-a| < b-a\}$ (théorème de BERNSTEIN).
- (c) Soit $x_0 \in]a, b[$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [x_0, b[$, on a $f(x) \geq \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$.
- (d) Montrer que la fonction f est identiquement nulle si, et seulement si, elle s'annule en un point $x_0 \in]a, b[$. Que peut-on dire s'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$ pour un entier $n \geq 1$?

3. Pour cette question, $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f = \tan$.

- (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $f^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$,
puis en déduire que $f \in \mathcal{A}\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

(b) En déduire que pour tout $z \in D\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, on a $\tan(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^{2n+1}$ où

$$\alpha_0 = 1 \text{ et } \alpha_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \alpha_{n-k} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

4. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions absolument monotones sur $[a, b[$ telle que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, b[$ vers une fonction f . Montrer que :

- (a) la série de fonctions $\sum f_n$ est uniformément convergente sur tout segment $[a, \beta]$ où $\beta \in]a, b[$;
- (b) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ est uniformément convergente sur tout segment $[a, \beta]$ où $\beta \in]a, b[$;
- (c) la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est absolument monotone sur $[a, b[$.

– III – Fonction absolument monotones sur $\mathbb{R}_*$

Pour cette partie, f est une fonction absolument monotone et non constante sur $\mathbb{R}_*$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_*$, on a $f^{(n)}(x) > 0$.
- 2.

- (a) Montrer que la fonction f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$ en $-\infty$.
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_*$, on a :

$$0 < f^{(n)}(x) < \frac{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{|x|^n} \left(f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) \right) \quad (12.2)$$

- (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n f^{(n)}(x) = 0$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_*$, on a :

$$f(x) = \ell + \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (12.3)$$

3. Dans le cas où la fonction f est de plus majorée, montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^n f^{(n)}(x) = 0$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule (12.3) est encore valable pour $x = 0$, c'est-à-dire que l'on a :

$$f(0) = \ell + \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^0 t^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (12.4)$$

4. On se donne un réel $a < 0$ et on définit les fonctions f_1 et f_2 sur $\mathbb{R}_-^*$ par $f_1(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right) f'(x)$ et $f_2(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right) f'_1(x)$. Montrer que pour tout réel $x \in [a, 0[$ et tout réel t on a $f(x) + 2tvf_1(x) + t^2f_2(x) \geq 0$ (on pourra utiliser le développement de $f(x)$ en série de TAYLOR suivant les puissances de $x - a$).
5. Montrer que pour tout réel $x < 0$ et tout réel t on a $f(x) + 2tf'(x) + t^2f''(x) \geq 0$. En déduire que $\delta = f \cdot f'' - (f')^2 \geq 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$, puis que la fonction $\ln(f)$ est convexe sur $\mathbb{R}_-^*$.
6. On se donne une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ soit croissante et on lui associe la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_k a_{n-k+2} - a_{k+1} a_{n-k+1})$$

- (a) Montrer que les réels b_0 et b_1 sont positifs.
 (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$b_n = c_0 + \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} \left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} \right) c_k$$

où $c_k = a_k a_{n-k+2} - a_{k+1} a_{n-k+1}$ pour $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$, puis en déduire que les réels b_n sont tous positifs.

7.

- (a) Montrer que la suite de fonctions $\left(\frac{f^{(n+1)}}{f^{(n)}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
 (b) Montrer que la fonction $\delta = f \cdot f'' - (f')^2$ est absolument monotone sur $\mathbb{R}_-^*$.
 (c) Quelle forme a la fonction f si δ s'annule en un point de $\mathbb{R}_-^*$?
8. On suppose que la fonction f admet une limite $\ell_0 > 0$ quand x tend vers 0^- et que la fonction f' admet une limite $\ell_1 \geq 0$ quand x tend vers 0^- . Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, on a $f(x) \geq \ell_0 e^{\frac{\ell_1}{\ell_0} x}$.

– IV – Un théorème de BERNSTEIN-WIDDER

Pour cette partie, on pourra utiliser le résultat suivant : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}_+$ et croissantes sur cet intervalle. S'il existe une constante réelle M telle que $0 \leq u_n(t) \leq M$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on peut alors extraire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite qui converge sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction croissante.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, croissante et majorée.

- (a) Justifier la définition de $\ell = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, de la fonction

$$\Phi_n : x \in \mathbb{R}_-^* \mapsto \int_0^{+\infty} t^n e^{xt} \varphi(t) dt, \text{ puis vérifier que pour tous } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R}_-^*, \text{ on a } 0 \leq \Phi_n(x) \leq \ell \frac{n!}{|x|^{n+1}}.$$

- (b) Montrer que, pour tout réel $a < 0$, la fonction Φ_0 est uniformément continue sur $] -\infty, a]$.
- (c) Montrer que la fonction Φ_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\Phi_0^{(n)} = \Phi_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (d) Montrer que la fonction $f : x \mapsto -x \int_0^{+\infty} e^{xt} \varphi(t) dt$ est majorée et absolument monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soient K un compact d'un espace normé (ou métrique) F , $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ (i. e. pour tout $x \in K$, la suite réelle $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante) qui converge simplement vers une fonction continue $f : K \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que :
- (a) la suite réelle $(\|f - f_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée ;
- (b) la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur K (théorème de DINI).
3. Montrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ par $\varphi_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0, n]}(x)$ est croissante et converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $\varphi : x \mapsto e^{-x}$.
4. Soit f une fonction non constante, majorée et absolument monotone sur $\mathbb{R}_+^*$. Une telle fonction se prolonge par continuité en 0 d'après la question **III.3** et $\ell = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$ est finie d'après la question **III.2a**.
- (a) Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ la définition de la fonction :

$$\psi_n : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_{\frac{n}{t}}^{+\infty} u^n f^{(n+1)}(-u) du$$

puis vérifier que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, croissante, qu'elle se prolonge par continuité en 0 et que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi_n(t) = \int_0^{+\infty} u^n f^{(n+1)}(-u) du = n! (f(0) - \ell)$$

- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f(x) = \ell + \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} \varphi_n(-xt)^n \psi_n'(t) dt$$

où φ_n est la fonction considérée à la question **IV.3**.

- (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} (e^{xu} - \varphi_n(-xu)) \frac{\psi_n'(u)}{n!} du = 0$$

puis en déduire que :

$$f(x) = -x \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{xu} \left(\frac{\psi_n(u)}{n!} + \ell \right) du$$

- (d) Montrer qu'il existe une fonction Φ croissante sur $\mathbb{R}_+$, positive et majorée telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, on a $f(x) = -x \int_0^{+\infty} e^{xt} \Phi(t) dt$.





PROBLÈME 13



Fonctions à variation bornée

13.1 Rappels de cours

Définition Si D est une partie non vide d'un espace métrique et E est un espace métrique, une fonction $f : D \rightarrow E$ est dite *lipschitzienne* s'il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que $d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ pour tous x, y dans D . Une telle fonction est uniformément continue sur D .

On dispose de la version suivante de l'inégalité des accroissements finis.

Théorème Soient f définie sur $[a, b]$, à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et g définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, ces fonctions étant continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Si $\|f'(x)\| \leq g'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, on a alors $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

Dans le cas où f' est majorée par M sur $]a, b[$, en prenant $g(x) = Mx$, on retrouve l'inégalité classique des accroissements finis.

Théorème Si f est une fonction monotone de l'intervalle ouvert I dans $\mathbb{R}$, elle admet alors une limite à gauche et droite en tout point. Dans le cas où f est croissante, on a $f(x^-) = \sup_{a < t < x} f(t) \leq f(x) \leq f(x^+) = \inf_{x < t < b} f(t)$ pour tout $x \in I$. De plus pour $x < y$ dans I , on a $f(x^+) \leq f(y^-)$.

Théorème Si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ [resp. $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$] est une fonction croissante [resp. décroissante] et majorée [resp. minorée], elle admet alors une limite finie en b [resp. en a]. Cette limite est la borne supérieure [resp. inférieure] de f sur $[a, b[$ [resp. sur $]a, b]$ soit $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \sup_{x \in [a, b[} f(x)$ [resp. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \inf_{x \in]a, b] } f(x)$].

Théorème L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dénombrable.

13.2 Énoncé

Pour ce problème, I est un intervalle réel non vide, non réduit à un point.

– I – Fonctions à variation bornée

Soient $a < b$ dans I et f une fonction de I dans un espace métrique (E, d) .

Une *subdivision* du segment $[a, b]$ est une suite réelle finie strictement croissante $\sigma = (\sigma_k)_{0 \leq k \leq p}$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_0 = a$, $\sigma_p = b$. On note $\Sigma_{a,b}$ l'ensemble de toutes les subdivisions du segment $[a, b]$.

Pour toute subdivision σ de $[a, b]$, on appelle *variation totale* de f sur σ le réel :

$$V(\sigma, f) = \sum_{k=1}^p d(f(\sigma_k), f(\sigma_{k-1}))$$

On dit que la fonction f est à *variation bornée* sur le segment $[a, b]$ s'il existe un réel M tel que pour toute subdivision σ de $[a, b]$, on ait $V(\sigma, f) \leq M$ et dans ce cas, on définit la *variation totale* de f sur $[a, b]$ par :

$$V_a^b(f) = \sup_{\sigma \in \Sigma_{a,b}} V(\sigma, f)$$

On pose également $V_b^a(f) = -V_a^b(f)$ et $V_a^a(f) = 0$.

1. Montrer qu'une fonction λ -lipschitzienne sur I est à variation bornée sur tout segment $[a, b] \subset I$ et telle que $V_a^b(f) \leq \lambda(b-a)$.
2. Soient $f : I \rightarrow E$ une fonction λ -lipschitzienne, $\alpha < \beta$ deux réels et une fonction $g : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ à variation bornée. Montrer que la fonction $f \circ g$ est à variation bornée sur $[\alpha, \beta]$.
3. On suppose que $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. Montrer que :
 - (a) une fonction $f : I \rightarrow E$ à variation bornée sur $[a, b] \subset I$ est bornée sur $[a, b]$;
 - (b) une fonction $f : I \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^1$ est à variation bornée sur tout segment de I ;
 - (c) si f et g sont deux fonctions à variation bornée sur $[a, b] \subset I$, il en est alors de même de $f+g$ et λf pour tout réel λ et on a $V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$ et $V_a^b(\lambda f) = |\lambda| V_a^b(f)$;
 - (d) si $f : I \rightarrow E$ et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions à variation bornée sur un segment $[a, b] \subset I$, la fonction φf est alors à variation bornée sur $[a, b]$ et on a $V_a^b(\varphi f) \leq \|\varphi\|_\infty V_a^b(f) + \|f\|_\infty V_a^b(\varphi)$, où $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |\varphi(x)|$ et $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} \|f(x)\|$.

4. On se donne $c \in]a, b[$ et on suppose que la fonction f est à variation bornée sur les segments $[a, c]$ et $[c, b]$.
 - (a) On se donne une subdivision $\sigma = (\sigma_k)_{0 \leq k \leq p}$ de $[a, b]$, on désigne par q l'unique entier compris entre 0 et $p-1$ tel que $\sigma_q < c \leq \sigma_{q+1}$ et on lui associe la subdivision $\sigma' = (\sigma'_k)_{0 \leq k \leq q+1} = (a, \sigma_1, \dots, \sigma_q, c)$ de $[a, c]$ et la subdivision σ'' de $[c, b]$ définie par $\sigma'' = (\sigma''_k)_{0 \leq k \leq p-q} = (c, \sigma_{q+1}, \dots, \sigma_{p-1}, b)$ si $c < \sigma_{q+1}$ ou $\sigma'' = (\sigma''_k)_{0 \leq k \leq p-q-1} = (c, \sigma_{q+2}, \dots, \sigma_{p-1}, b)$ si $c = \sigma_{q+1}$. Montrer que $V(\sigma, f) \leq V(\sigma', f) + V(\sigma'', f)$.
 - (b) Montrer que la fonction f est à variation bornée sur $[a, b]$ et que l'on a $V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$.
5. On se donne $c \in]a, b[$ et on suppose que f est à variation bornée sur $[a, b]$.
 - (a) Soient σ' une subdivision de $[a, c]$ et σ'' une subdivision de $[c, b]$. Montrer qu'il existe une subdivision σ de $[a, b]$ telle que $V(\sigma, f) = V(\sigma', f) + V(\sigma'', f)$.
 - (b) Montrer que f est à variation bornée sur les segments $[a, c]$ et $[c, b]$, puis que l'on a $V_a^b(f) \geq V_a^c(f) + V_c^b(f)$.
6. On suppose que f est à variation bornée sur tout segment de I et pour tout a fixé dans I , on note V_a la fonction définie sur I par $V_a(x) = V_a^x(f)$. Montrer que :
 - (a) pour tous réels α, β, γ dans I , on a $V_\alpha^\beta(f) + V_\beta^\gamma(f) = V_\alpha^\gamma(f)$ (relation de CHASLES);
 - (b) pour $x < y$ dans I , on a $d(f(x), f(y)) \leq V_a(y) - V_a(x)$;
 - (c) la fonction V_a est croissante sur I ;
 - (d) la fonction f est continue à gauche [resp. à droite] en $x_0 \in I$ si, et seulement si, V_a est continue à gauche [resp. à droite] en x_0 (pour la continuité à gauche [resp. à droite], on suppose que x_0 n'est pas la borne inférieure [resp. supérieure] de I).
7. Pour cette question, on suppose que $I = [a, \beta[$ avec $a < \beta \leq +\infty$, que l'espace métrique (E, d) est complet et que f est à variation bornée sur tout segment de I .
 - (a) Justifier la définition de $L = \lim_{x \rightarrow \beta} V_a(x)$ dans $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
 - (b) Montrer que si cette limite L est finie, la fonction f admet alors une limite $\ell \in E$ en β . La réciproque est-elle vraie?
 - (c) On suppose maintenant que β est fini, que f est définie en β et que la limite L de V_a en β est finie. Montrer que :
 - i. pour tout $x \in I$, on a $d(f(\beta), f(x)) \leq d(f(\beta), \ell) + L - V_a(x)$;
 - ii. f est à variation bornée sur $[a, \beta]$ avec $V_a^\beta(f) \leq d(f(\beta), \ell) + L$;
 - iii. pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $b \in]a, \beta[$ tel que :

$$d(f(\beta), \ell) + L - \varepsilon \leq d(f(\beta), f(b)) + V_a(b)$$
 - iv. pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision, σ de $[a, \beta]$ telle que $d(f(\beta), \ell) + L - 2\varepsilon \leq V(\sigma, f)$;

$$v. V_a^\beta(f) = d(f(\beta), \ell) + L.$$

- (d) Dans le cas où β est fini, montrer que la fonction f est à variation bornée sur $[a, \beta]$ si, et seulement si, la limite L est finie.

– II – Cas des fonctions à valeurs réelles

Pour cette partie, f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et on se donne $a < b$ dans I .

1. Montrer que f est monotone sur $[a, b]$ si, et seulement si, elle est à variation bornée sur $[a, b]$ avec $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.
2. Montrer que si f est à variation bornée sur $[a, b]$ et telle que $\inf_{x \in [a, b]} |f(x)| > 0$, la fonction $\frac{1}{f|_{[a, b]}}$ est alors à variation bornée sur $[a, b]$.
3. Montrer que f est à variation bornée sur tout segment de I si, et seulement si, il existe deux fonctions croissantes g, h de I dans $\mathbb{R}$ telles que $f = g - h$ (théorème de JORDAN).
4. Montrer que si f est à variation bornée sur tout segment de I , elle admet alors une limite à droite en tout point de I distinct de sa borne supérieure et une limite à gauche en tout point de I distinct de sa borne inférieure.
5. On suppose que f est à variation bornée sur $[a, b]$. Montrer que la fonction φ définie sur $[a, b]$ par $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$ est à variation bornée sur $[a, b]$.
6. Pour cette question, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . Montrer que f est à variation bornée sur tout segment $[a, b] \subset I$ et qu'on a $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)| dt$.
7. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que ces deux fonctions sont à variation bornée sur $[0, 1]$ et que la composée $h = g \circ f$ ne l'est pas.
8. Pour tous réels α, β avec $\beta > 0$, on désigne par $f_{\alpha, \beta}$ la fonction définie sur $I = \mathbb{R}^+$ par $f_{\alpha, \beta}(0) = 0$ et $f_{\alpha, \beta}(x) = x^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{x^\beta}\right)$ pour $x > 0$. Montrer que :
 - (a) pour $\alpha > \beta + 1$, la fonction $f_{\alpha, \beta}$ est à variation bornée sur tout segment de I ;
 - (b) pour $\alpha \leq \beta$, la fonction $f_{\alpha, \beta}$ n'est pas à variation bornée sur $[0, 1]$;
 - (c) la fonction $f_{\alpha, \beta}$ est à variation bornée sur $[0, 1]$ si, et seulement si, on a $\alpha > \beta$.

– III – Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Pour cette partie, $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne

$$x = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \mapsto \|x\| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad f \text{ est une fonction de } I \text{ dans } \mathbb{R}^n \text{ et on se}$$

donne $a < b$ dans I . Pour tout $x \in I$, on note $f(x) = (f_j(x))_{1 \leq j \leq n}$. On note $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que f est à variation bornée sur $[a, b]$ si, et seulement, chaque fonction f_j est à variation bornée sur $[a, b]$.
2. Soit R un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si f est à variation bornée sur $[a, b]$, alors $R \circ f$ l'est aussi sur $[a, b]$ et on a $V_a^b(R \circ f) = V_a^b(f)$.
3. Pour cette question, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour $a \in I$ fixé, on note toujours V_a la fonction définie sur I par $V_a(x) = V_a^x(f)$. On se fixe $x_0 \in I$. Montrer que :
 - (a) il existe un automorphisme orthogonal R tel que $R(f'(x_0)) = \|f'(x_0)\| e_1$;
 - (b) la fonction $g = R \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que $g'(x_0) = \|f'(x_0)\| e_1$;
 - (c) la fonction $g = R \circ f$ est à variation bornée sur tout segment de I , puis en notant $g = (g_j)_{1 \leq j \leq n}$, que pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x_0 + h \in I$, on a :

$$\frac{1}{h} V_{x_0}^{x_0+h}(g_1) \leq \frac{1}{h} V_{x_0}^{x_0+h}(f) \leq \frac{1}{h} \sum_{j=1}^n V_{x_0}^{x_0+h}(g_j)$$

- (d) la fonction V_a est dérivable en x_0 avec $V_a'(x_0) = \|f'(x_0)\|$ (cela est valable pour f à valeurs dans un espace de BANACH) ;
- (e) pour tout $x \in I$, on a $V_a(x) = \int_a^x \|f'(t)\| dt$. En particulier, $\int_a^b \|f'(t)\| dt$ est la longueur de l'arc paramétré $t \in [a, b] \mapsto f(t)$.
4. Pour cette question, on suppose que $I = [a, \beta]$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, \beta]$. Montrer que la fonction f est à variation bornée sur $[a, \beta]$ si, et seulement si, l'intégrale $\int_a^\beta f'(t) dt$ est absolument convergente et dans ce cas, on a :

$$V_a^\beta(f) = \|f(\beta) - \ell\| + \int_a^\beta \|f'(t)\| dt$$

où $\ell = \lim_{x \rightarrow \beta} f(x)$.

– IV – Cas des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$

Pour cette partie, $I = \mathbb{R}$ et les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Pour tout réel x , on note $[x]$ sa partie entière.

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction 2π -périodique et RIEMANN-intégrable sur tout segment, on lui associe la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right)_{n \in \mathbb{Z}}$ de ses coefficients de FOURIER exponentiels. On désigne par $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série de FOURIER de f et par $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des moyennes de FEJÉR de f respectivement définies par :

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \text{ et } F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(x).$$

1. Soit f une fonction T -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec $T \in \mathbb{R}_+^*$ telle que sa restriction $f|_{[0,T]}$ à $[0, T]$ est à variation bornée. Dans ce cas, il existe deux fonctions croissantes g, h de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f = g - h$. On peut de plus imposer que $g(0) = 0$. On définit alors la fonction φ sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = g\left(x - \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T\right)$.
 - (a) Justifier la définition de la fonction φ , puis montrer que pour tout réel x , on a $0 \leq \varphi(x) \leq g(T)$.
 - (b) Montrer que pour tous réels $x < y$, on a $\varphi(x) - \varphi(y) \leq \left(\left\lfloor \frac{y}{T} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor\right) g(T)$.
 - (c) Montrer que f est à variation bornée sur tout segment de $\mathbb{R}$.
2. Soit f une fonction 2π -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f|_{[0,2\pi]}$ est à variation bornée. Montrer que $c_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.
3. Montrer que pour tout entier $p \geq 1$, la fonction φ_p définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ par $\varphi_p(x) = \frac{\sin(px)}{\sin(x)}$ se prolonge en une fonction continue et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{k=-n}^n e^{ik\theta} = \varphi_{2n+1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } \sum_{k=0}^n \varphi_{2k+1}(\theta) = \varphi_{n+1}^2(\theta)$$

5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique et RIEMANN-intégrable sur tout segment. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x-t) + f(x+t)) \varphi_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

et :

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^\pi (f(x-t) + f(x+t)) \varphi_{n+1}^2\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right) dt = 1 \text{ et } \frac{1}{\pi(n+1)} \int_0^\pi \varphi_{n+1}^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = 1$$

7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique et RIEMANN-intégrable sur tout segment.
 - (a) Montrer qu'en tout réel x où f admet une limite à gauche $f(x^-)$ et une limite à droite $f(x^+)$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$ (théorème de FEJÉR).
 - (b) Dans le cas où f est continue, montrer que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
8. Pour cette question $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé et on se donne une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E . On dit que cette suite converge au sens de CESÀRO vers $\ell \in E$, si la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

- (a) Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, elle l'est alors au sens de CÉSÀRO vers la même limite.
- (b) Montrer que pour tous $m > n$ dans $\mathbb{N}$, on a :

$$u_n - v_n = \frac{m+1}{m-n} (v_m - v_n) - \frac{1}{m-n} \sum_{j=n+1}^m (m-j+1) (u_j - u_{j-1})$$

- (c) On suppose que $u_n - u_{n-1} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Montrer que :

- i. il existe un réel $M > 0$ tel que pour tous $m > n \geq 1$ dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\|u_n - v_n\| \leq \frac{m+1}{m-n} \|v_m - v_n\| + M \ln\left(\frac{m}{n}\right)$$

- ii. pour tout réel $\lambda > 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|u_n - v_n\| \leq \frac{\lambda+2}{\lambda-1} \|v_{[n\lambda]+1} - v_n\| + M \left(\frac{1}{n} + \ln(\lambda) \right)$$

- iii. si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ au sens de CÉSÀRO, elle est alors convergente vers ℓ (théorème de HARDY).

9. Soit f une fonction 2π -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f|_{[0,2\pi]}$ est à variation bornée. Montrer que la série de FOURIER de la fonction f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$.
10. Soit f une fonction 2π -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et continue telle que $f|_{[0,2\pi]}$ est à variation bornée. Montrer que la série de FOURIER de la fonction f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f .





PROBLÈME 14



Fonctions de WEIERSTRASS

- dérivabilité des fonctions d'une variable réelle ;
- espaces vectoriels normés, espaces de Banach ;
- intégrales généralisées ;
- séries de fonctions, convergences simple, uniforme, normale ;
- interversion somme et intégration ;
- transformation de Fourier ;
- théorème de convergence dominée.

14.1 Énoncé

Ce problème est consacré à l'étude de certaines fonctions continues et nulle part dérivables.

Soit α un réel strictement positif. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est *hölderienne* d'ordre α (ou qu'elle est α -hölderienne) s'il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que $|f(y) - f(x)| \leq \lambda |y - x|^\alpha$ pour tous réels x, y . Pour $\alpha = 1$, on dit que f est *lipschitzienne*.

On note $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ la $\mathbb{C}$ -algèbre des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ la $\mathbb{C}$ -algèbre des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ que l'on munit de la norme :

$$f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

C'est une algèbre de Banach.

– I – Généralités

1. Montrer qu'une fonction hölderienne d'ordre $\alpha > 1$ est constante.

Pour cette raison, on s'intéresse uniquement aux fonctions hölderiennes d'ordre $\alpha \in]0, 1]$.

On note $\mathcal{H}_\alpha$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ hölderiennes d'ordre $\alpha \in]0, 1]$ et $\mathcal{H}_{\alpha, \text{per}}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}_\alpha$ formé des fonctions 1-périodiques et α -hölderiennes.

2. À toute fonction $f \in \mathcal{H}_\alpha$, on associe les réels :

$$\lambda_\alpha(f) = \inf \{ \lambda \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(y) - f(x)| \leq \lambda |y - x|^\alpha \}$$

et $N_\alpha(f) = |f(0)| + \lambda_\alpha(f)$.

- (a) Justifier la définition de l'application N_α sur $\mathcal{H}_\alpha$, puis montrer qu'elle définit une norme sur cet espace.
 - (b) Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{H}_{\alpha, \text{per}}$, on a $\|f\|_\infty \leq N_\alpha(f)$.
 - (c) Montrer que $(\mathcal{H}_{\alpha, \text{per}}, N_\alpha)$ est un espace de Banach.
3. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction dérivable en $x \in \mathbb{R}$, alors pour toutes suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $x_n \neq y_n$ et $x_n \leq x \leq y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = x$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(x)$.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ en justifiant la convergence de ces intégrales.
5. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $g(x)$ pour tout réel $x > 0$, puis en déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

– II – Fonctions de Weierstrass

Pour cette partie, on se donne une fonction lipschitzienne non constante $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ périodique de période 1 et deux réels $b \geq a > 1$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum \frac{\varphi(b^n x)}{a^n}$ est convergente sur $\mathbb{R}$, puis que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi(b^n x)}{a^n}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
Dans le cas où b est un entier naturel, montrer que la fonction f est 1-périodique.
2. Montrer que f est l'unique fonction continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ solution de l'équation fonctionnelle $f(bx) = a(f(x) - \varphi(x))$ pour tout réel x .
3. Dans le cas où b est un entier naturel, calculer $\int_0^1 f(x) dx$.
4. On suppose que $b > a$ et on écrit $a = b^\alpha$ avec $\alpha \in]0, 1[$ ($\alpha = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$ est bien dans $]0, 1[$ pour $1 < a < b$).

- (a) Montrer que pour tous réels x, y tels que $|y - x| \geq 1$, on a :

$$|f(y) - f(x)| \leq 2 \|f\|_{\infty} |y - x|^{\alpha}$$

- (b) Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous réels x, y , on a :

$$|f(y) - f(x)| \leq \left(\frac{\lambda}{\frac{b}{a} - 1} b^n |y - x| + \frac{2 \|f\|_{\infty}}{1 - \frac{1}{a}} \right) \left(\frac{1}{b^n} \right)^{\alpha}$$

- (c) En déduire que f est hölderienne d'exposant α .

5. Pour cette question, on suppose que la fonction 1-périodique φ est définie par $\varphi(x) = x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\varphi(x) = 1 - x$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et que b est un entier pair tel que $b > 2a$, où $a > 1$ est réel. On se propose de montrer que la fonction f est continue et nulle part dérivable.

- (a) Montrer que pour tout réel x , on a $\varphi(x) = d(x, \mathbb{Z}) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|$, puis que φ est lipschitzienne.
- (b) Soit $p \in \mathbb{Z}$. Donner une expression de $\varphi(x)$ pour tout $x \in [p, p+1[$.
- (c) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi\left(\frac{p+1}{2}\right) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{(-1)^p}{2}$.
- (d) Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Pour la suite de cette question, on se donne un réel $x \in]0, 1[$.

- (e) Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'existence et l'unicité d'un entier naturel k_n tel que $\frac{k_n}{2} \leq b^n x < \frac{k_n + 1}{2}$, puis montrer que les suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $x_n = \frac{k_n}{2b^n}$ et $y_n = \frac{k_n + 1}{2b^n}$ convergent vers x .
- (f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\varphi(b^k y_n) - \varphi(b^k x_n)$ pour tout entier $k \geq n$. Pour k entier compris entre 0 et $n-1$, montrer qu'il existe un entier naturel p tel que $b^k x_n$ et $b^k y_n$ soient tous les deux dans l'un des intervalle $\left[p, p + \frac{1}{2}\right]$ ou $\left[p + \frac{1}{2}, p + 1\right]$, puis en déduire que $|\varphi(b^k y_n) - \varphi(b^k x_n)| = \frac{1}{2b^{n-k}}$.
- (g) Montrer que f n'est pas dérivable en x et donc qu'elle n'est nulle part dérivable.

6. Pour cette question, on suppose que la fonction φ est définie par $\varphi(x) = \cos(2\pi x)$ et que b est un entier pair non nul tel que $\frac{b}{a} \geq \frac{\pi}{2} + 1$ toujours avec $a > 1$ réel. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2b^n \pi x)}{a^n}$ et elle est continue, 1-périodique et paire.

- (a) Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Pour la suite de cette question, on se donne un réel $x > 0$.

- (b) Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'existence et l'unicité d'un entier naturel k_n tel que $x_n = \frac{k_n}{2b^n} \leq x < y_n = \frac{k_n + 1}{2b^n}$, puis montrer que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers x .
- (c) Calculer $\cos(2b^k \pi y_n) - \cos(2b^k \pi x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$.
- (d) Montrer que la fonction f n'est pas dérivable en x .
7. Montrer que l'ensemble des fonctions continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui ne sont dérivables en aucun point de $[0, 1]$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

– III – Formules sommatoire de Poisson et d'inversion de Fourier

On note $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ constitué des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est absolument convergente. On munit l'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de la norme $f \mapsto \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que l'on peut définir la fonction $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt$$

puis que cette fonction est continue et bornée et que l'application $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ est linéaire continue de $(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$. La fonction $\widehat{f}$ est la *transformée de Fourier* de f .

2. Calculer pour tout réel $a > 0$, la transformée de Fourier de la fonction $\varphi_a : t \mapsto e^{-a|t|}$.

Pour la suite de cette partie, on se donne $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $f(x) = O_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$.

3. Montrer que la fonction f est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4. On se donne un réel $T > 0$ et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $u_0(x) = f(x)$ et $u_n(x) = f(x - nT) + f(x + nT)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ est convergente sur $\mathbb{R}$ et que sa somme notée f_T est continue sur $\mathbb{R}$ et T -périodique.

(b) Montrer que pour tout réel x , on a $\lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(x) = f(x)$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier $c_n(f_T) = \frac{1}{T} \int_0^T f_T(t) e^{-\frac{2i\pi nt}{T}} dt$

de la fonction f_T sont donnés par $c_n(f_T) = \frac{1}{T} \widehat{f} \left(\frac{2\pi n}{T} \right)$.

(d) En supposant que $\widehat{f}(x) = O_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$, montrer que la série de Fourier de la fonction T -périodique f_T converge uniformément vers f_T sur $\mathbb{R}$, ce qui se traduit par la *formule sommatoire de Poisson* :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f} \left(\frac{2\pi n}{T} \right) e^{\frac{2i\pi nx}{T}}$$

5.

(a) Montrer que pour tout réel $h > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = h \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f((n+t)h) dt$$

(b) Montrer que $\lim_{h \rightarrow 0^+} h \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 f((n+t)h) dt - f(nh) \right) = 0$, puis que :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$$

(c) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} h f_h(0)$.

6. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est telle que $f(x) = O_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$ et $\widehat{f}(x) = O_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$, on a alors $f(x) = \frac{1}{2\pi} \widehat{\widehat{f}}(-x)$ (formule d'inversion de Fourier).

– IV – Transformée de Fourier des fonctions à décroissance rapide

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est à *décroissance rapide*, si elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et si pour tout couple (n, m) d'entiers naturels on a $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^n f^{(m)}(x) = 0$.

0. On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ formé des fonctions à décroissance rapide.

1. Montrer qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est à décroissance rapide si, et seulement si, pour tout couple (n, m) d'entiers naturels, la fonction $x \mapsto x^n f^{(m)}(x)$ est bornée.
2. Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, puis que pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et tout couple (n, m) d'entiers naturels, la fonction $x \mapsto x^n f^{(m)}(x)$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
3. Montrer que la transformation de Fourier $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sur lui-même.
4. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$.

(a) Montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.(b) Soient $a < b$ deux réels. Justifier l'existence d'une fonction $\psi_{a,b} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $\psi_{a,b}(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$ et $\psi_{a,b}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus]a, b[$.(c) Soit $b > 1$ un réel. Justifier l'existence d'une fonction $\varphi_b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que l'on ait $\widehat{\varphi_b}(1) = 1$, $\widehat{\varphi_b}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left] \frac{1}{b}, b \right[$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_b(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t \varphi_b(t) dt = 0.$$

– V – Une condition nécessaire de dérivabilité d'une série
trigonométrique

Pour cette partie, on se donne une série complexe $\sum a_n$ absolument convergente, une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs pour laquelle il existe un réel $b > 1$ tel que $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum a_n \cos(\lambda_n x)$ est convergente sur $\mathbb{R}$, puis que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(\lambda_n x)$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que la fonction f est dérivable en un point $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - (a) Justifier l'existence d'une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue, bornée et de limite nulle en 0 telle que $f(\alpha + x) = f(\alpha) + f'(\alpha)x + x\varepsilon(x)$ pour tout réel x .
 - (b) Soit $\varphi_b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction vérifiant les propriétés de la question **IV.4c**. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\alpha + \frac{t}{\lambda_n}\right) \varphi_b(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\lambda_n} \varepsilon\left(\frac{t}{\lambda_n}\right) \varphi_b(t) dt = \frac{a_n e^{i\lambda_n \alpha}}{2}$$

puis en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n a_n = 0$. Il en résulte que si la suite $(\lambda_n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, la fonction f n'est alors dérivable nulle part.

3. Montrer que pour tous réels $b \geq a > 1$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2b^n \pi x)}{a^n}$$

est continue et nulle part dérivable.





Fonctions presque périodiques

15.1 Rappels de cours

Une $\mathbb{C}$ -algèbre (associative et unitaire) est un espace vectoriel muni d'une structure d'anneau telle que l'opération interne de multiplication de l'anneau soit bilinéaire. Une algèbre de BANACH est une algèbre $\mathbb{A}$ munie d'une norme $\|\cdot\|$ telle que $\|1\| = 1$, $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ pour tous a, b dans $\mathbb{A}$ et $(\mathbb{A}, \|\cdot\|)$ est complet.

Une partie K d'un espace normé E est *compacte*, si de toute suite de points de K , on peut extraire une sous-suite qui converge dans K .

Une partie K de E est *précompacte*, si pour tout réel $r > 0$, elle peut être recouverte par un nombre fini de boules ouvertes de rayon r .

Théorème Soit K une partie non vide d'un espace de BANACH. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- K est compact ;
- de tout recouvrement ouvert de K , on peut extraire un sous-recouvrement fini ;
- K est précompact et complet.

Définition Un produit scalaire hermitien sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E^2 \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

- pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est une forme linéaire ;
- pour tous x, y dans E , on a $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$;
- pour tout $x \in E$, on a $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_+$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, $x = 0$.

L'application $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est dite semi-linéaire et l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

15.2 Énoncé

On note $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ la $\mathbb{C}$ -algèbre des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ que l'on munit de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. C'est une algèbre de BANACH.

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et tout réel a , on note $\tau_a f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\tau_a f(x) = f(x + a)$.

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on dit que $T \in \mathbb{R}$ est une *période* de f s'il est tel que $\tau_T f = f$, ce qui signifie que $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{P}(f)$ de toutes les périodes de f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *périodique* si $\mathcal{P}(f)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

– I – Résultats préliminaires

1. Montrer que pour toutes fonctions f, g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et tous réels a, b on a :

$$\begin{aligned} \|\tau_a f\|_\infty &= \|f\|_\infty, \quad \|\tau_a f - \tau_a g\|_\infty = \|f - g\|_\infty \\ \|\tau_a f - f\|_\infty &= \|\tau_{-a} f - f\|_\infty, \quad \|\tau_{b-a} f - f\|_\infty = \|\tau_b f - \tau_a f\|_\infty \\ \|\tau_{a+b} f - f\|_\infty &\leq \|\tau_a f - f\|_\infty + \|\tau_b f - f\|_\infty \end{aligned}$$

2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de BANACH. On dit qu'une suite double $(u_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$ d'éléments de E est *sommable* s'il existe un réel positif M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} \|u_{k,\ell}\| \leq M$$

- (a) Soit $(u_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double sommable d'éléments de E . Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} u_{k,\ell}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est convergente. On note $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} u_{n,m} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} u_{k,\ell}$.
- (b) Soit $(u_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double de nombres réels positifs. Montrer que cette suite est sommable si, et seulement si, elle est telle que :

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_{k,\ell}$ est convergente ;
- la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_{k,\ell} \right)$ est convergente.

Dans ce cas, montrer que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell}$ est convergente,

la série $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell} \right)$ est convergente et on a les égalités :

$$\sum_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2} u_{k,\ell} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{+\infty} u_{k,\ell} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell}$$

- (c) Soit $(u_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double d'éléments de E . Montrer que cette suite est sommable si, et seulement si, elle est telle que :

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \|u_{k,\ell}\|$ est convergente ;
- la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \|u_{k,\ell}\| \right)$ est convergente.

Dans ce cas, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_{k,\ell}$ est convergente,

pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell}$ est convergente, les séries $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell} \right)$

et $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell} \right)$ sont convergentes et on a les égalités :

$$\sum_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2} u_{k,\ell} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{+\infty} u_{k,\ell} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell}$$

(théorème de FUBINI pour les séries doubles).

3. Soient $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|')$, $(G, \|\cdot\|'')$ trois espaces vectoriels normés, D un sous-ensemble non vide de F et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions de D dans E qui converge uniformément vers une fonction f sur D .

- Montrer que pour toute fonction uniformément continue $g : E \rightarrow G$, la suite de fonctions $(g \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $g \circ f$ sur D .
- Montrer que si toutes les fonctions f_n sont uniformément continues sur D , la limite f est alors uniformément continue sur D .

– II – Polynômes trigonométriques généralisés

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note e_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $e_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$ et on désigne par $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ engendré par la famille de fonctions $\mathcal{B}_0 = (e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$. Les éléments de $\mathcal{P}$ sont les *polynômes trigonométriques généralisés*.

- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme trigonométrique généralisé $f = e_\lambda + e_\mu$ soit périodique.
- Montrer que $\mathcal{B}_0 = (e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une base de $\mathcal{P}$.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{P}$ et tout réel λ , on note $c_\lambda(f)$ la coordonnée de f suivant e_λ dans la base $\mathcal{B}_0$. En notant $J(f)$ l'ensemble des coefficients $c_\lambda(f)$ non nuls, on a $J(f) = \emptyset$ pour f identiquement nulle et pour $f \neq 0$, la fonction f s'écrit de manière unique sous la forme $f = \sum_{\lambda \in J(f)} c_\lambda(f) e_\lambda$, l'ensemble $J(f)$

étant fini non vide dans $\mathbb{R}$.

3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes trigonométriques généralisés est une sous-algèbre de $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{P}$, les fonctions $\bar{f}$, $f^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\tau_a f$ et $\mu_a f : x \mapsto f(ax)$ pour a réel sont dans $\mathcal{P}$. Pour $f \in \mathcal{P}$, a, λ réels et $g \in \{\bar{f}, f^{(k)}, \tau_a f, \mu_a f\}$, préciser les ensembles $J(g)$ et les coefficients $c_\lambda(g)$ correspondants.
4. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{P}$ et tout réel λ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) e^{-i\lambda t} dt = c_\lambda(f)$$

puis que l'application c_λ est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty)$ en précisant la valeur de sa norme d'opérateur $N(c_\lambda) = \sup_{f \in \mathcal{P} \setminus \{0\}} \frac{|c_\lambda(f)|}{\|f\|_\infty}$.

5. Soient f, g deux fonctions dans $\mathcal{P}$, la fonction g étant à valeurs réelles positives. Montrer que pour tout réel λ , on a $|c_\lambda(fg)| \leq \|f\|_\infty c_0(g)$.
6. Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = c_0(\bar{f}g)$ définit un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{P}$.
7. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction θ_p définie sur l'ouvert $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ par $\theta_p(x) = \frac{\sin(px)}{\sin(x)}$ se prolonge en une fonction continue et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.
8. Soient $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites de polynômes trigonométriques généralisés définies par $D_n = \sum_{k=-n}^n e_k$ et $F_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k$ (noyaux de DIRICHLET et FEJÉR).

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$D_n(x) = \theta_{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right) \text{ et } F_n(x) = \frac{1}{n+1} \theta_{n+1}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F_n = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e_k$.

9. Montrer qu'il existe une suite numérique $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi x F_n(x) dx = \frac{\pi^2}{2} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k - 1}{k^2} + \alpha_n$$

puis en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

10. Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq r}$ une suite de réels et $f = \sum_{k=1}^r c_k e_{\lambda_k} \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ avec $c_k = \rho_k e^{i\theta_k}$ où $\rho_k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_k \in [0, 2\pi[$ pour $1 \leq k \leq r$. On associe à f la suite de fonctions $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $G_n(x) = \prod_{j=1}^r F_n(\lambda_j x + \theta_j)$.

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction G_n est dans $\mathcal{P}$ de la forme
- $$G_n = \sum_{\lambda \in J_{n,r}} c_\lambda e_\lambda \text{ où } J_{n,r} = \left\{ \sum_{j=1}^r k_j \lambda_j, (k_j)_{1 \leq j \leq r} \in \{-n, \dots, n\}^r \right\}.$$
- (b) Dans le cas où les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont linéairement indépendants sur le corps $\mathbb{Q}$, montrer que $c_0(G_n) = 1$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
- $$c_0(fG_n) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sum_{k=1}^r \rho_k. \text{ En déduire que } \|f\|_\infty = \sum_{k=1}^r |c_k|.$$
11. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{P}$, la suite de fonction $\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \tau_k f \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $g = \sum_{\lambda \in J(f) \cap 2\pi\mathbb{Z}} c_\lambda e_\lambda$, cette somme étant nulle dans le cas où l'ensemble $J(f) \cap 2\pi\mathbb{Z}$ est vide.
12. Montrer qu'une fonction $f \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ est périodique de période $T > 0$ si, et seulement si, elle est telle que $J(f) \subset \frac{2\pi}{T}\mathbb{Z}$.

– III – Fonctions périodiques

1. On dit qu'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est *discrète*, si pour tout $a \in A$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $A \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= \{a\}$, ce qui se traduit en disant que tous les éléments de A sont *isolés*.
- (a) Montrer qu'un sous-groupe additif G de $\mathbb{R}$ est discret si, et seulement si, 0 est isolé dans G .
- (b) Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ discrets sont les sous-groupes de la forme $\mathbb{Z}\alpha = \{p\alpha, p \in \mathbb{Z}\}$ où α est un réel.
- (c) Montrer qu'un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est dense ou discret.
2. Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}(f)$ son groupe des périodes.
- (a) Montrer que f est constante si, et seulement si, on a $\mathcal{P}(f) = \mathbb{R}$.
- (b) Dans le cas où f est continue non constante, montrer que $\mathcal{P}(f)$ est fermé dans $\mathbb{R}$ et que f est périodique si, et seulement si, $\mathcal{P}(f)$ est discret non réduit à $\{0\}$.
- (c) Montrer que si f est continue et périodique de période $T > 0$, elle est alors bornée et uniformément continue.
- (d) Montrer que si f est périodique et dérivable, sa dérivée est alors périodique de même groupe de périodes que f .
- (e) Dans le cas où f est périodique de période $T > 0$, montrer qu'elle est localement RIEMANN-intégrable (*i. e.* RIEMANN-intégrable sur tout segment) si, et seulement si, elle est intégrable sur $[0, T]$, puis que pour une telle fonction et tout réel a , on a $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π -périodique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $\delta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on note $I_n(\delta) = \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2}\right)^n dt$ et on définit la suite de fonctions $(P_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_n(f)(x) = \frac{1}{I_n(0)} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2}\right)^n f(x-t) dt$$

Montrer que :

- (a) dans le cas où la fonction f est paire, les fonctions $P_n(f)$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont également paires ;
 - (b) les $P_n(f)$, pour $n \in \mathbb{N}$, sont des polynômes trigonométriques généralisés ;
 - (c) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n(0) \geq \frac{4}{n+1}$;
 - (d) pour tout réel $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n(\delta)}{I_n(0)} = 0$;
 - (e) la suite de fonctions $(P_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et périodique est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques généralisés (théorème de WEIERSTRASS trigonométrique).
5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction localement RIEMANN-intégrable et périodique de période $T > 0$. Montrer que l'on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$, puis que pour réel λ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) e^{-i\lambda t} dt = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\lambda t} dt & \text{si } \lambda \in \frac{2\pi}{T} \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \frac{2\pi}{T} \mathbb{Z} \end{cases}$$

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction T_n définie sur le segment $[-1, 1]$ par $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ est polynomiale de degré n (polynômes de TCHEBYCHEV).
7. Soient $a < b$ deux réels. Dédurre du théorème de WEIERSTRASS trigonométrique que toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynomiales (théorème de WEIERSTRASS polynomial).

– IV – Fonctions presque périodiques

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est *presque périodique* si elle est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques généralisés. On note $\overline{\mathcal{P}}$ l'ensemble de toutes les fonctions presque périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, c'est l'adhérence de $\mathcal{P}$ dans $(\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

On note $\mathcal{C}_{\text{per}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ formé des fonctions continues et périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\text{Vect}(\mathcal{C}_{\text{per}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ engendré par $\mathcal{C}_{\text{per}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ presque périodique, la fonction $\overline{f}$ et pour tout réel a la fonction $\tau_a f$ sont presque périodiques.
2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n < +\infty$.
Montrer que la fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_{\frac{1}{n}}$ est presque périodique et non périodique, puis qu'elle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'une fonction presque périodique est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction $x \mapsto \sin(x^2)$ est-elle presque périodique ?
5. Montrer que $\overline{\mathcal{P}}$ est une sous-algèbre fermée de $(\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ qui contient $\mathcal{C}_{\text{per}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
6. Montrer que $\overline{\mathcal{P}} = \overline{\text{Vect}(\mathcal{C}_{\text{per}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}))}$, c'est-à-dire qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est presque périodique si, et seulement si, elle est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite d'éléments de $\text{Vect}(\mathcal{C}_{\text{per}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$.
7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction presque périodique dérivable. Montrer que la fonction dérivée f' est presque périodique si, et seulement si, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
8. Soit $f \in \overline{\mathcal{P}}$ une fonction presque périodique. Montrer que pour tout réel λ , la fonction $\varphi_{f,\lambda} : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) e^{-i\lambda t} dt$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$. On note $c_\lambda(f)$ cette limite.
9. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application c_λ est une forme linéaire continue sur $\overline{\mathcal{P}}$ en précisant la valeur de sa norme d'opérateur $N(c_\lambda) = \sup_{f \in \overline{\mathcal{P}} \setminus \{0\}} \frac{|c_\lambda(f)|}{\|f\|_\infty}$.
10. Soient f une fonction presque périodique, $J(f) = \{\lambda \in \mathbb{R}, c_\lambda(f) \neq 0\}$ et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes trigonométriques généralisés qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Montrer que :
 - (a) pour tout réel λ , on a $c_\lambda(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_\lambda(P_n)$;
 - (b) $J(f) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J(P_n)$ où $J(P)$ pour $P \in \mathcal{P}$ est défini en **I.2**;
 - (c) $J(f)$ est dénombrable.
11. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction presque périodique. Montrer que $c_\lambda(\overline{f}) = \overline{c_{-\lambda}(f)}$ et $c_\lambda(\tau_a f) = e^{i\lambda a} c_\lambda(f)$ pour tout réels λ et a . Dans le cas où f est dérivable de dérivée f' uniformément continue sur $\mathbb{R}$, montrer que pour tout réel λ , on a $c_\lambda(f') = (i\lambda) c_\lambda(f)$.
12. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls telle que la série de fonctions $\sum a_n$ soit absolument convergente et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Montrer que la série de fonctions $\sum a_n e_{\lambda_n}$ est convergente et que sa somme f est une fonction presque périodique. Préciser l'ensemble $J(f)$ et la valeur de $c_\lambda(f)$ pour tout réel $\lambda \in J(f)$.

13. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est *normale*, si pour toute suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite de fonctions $(\tau_{a_{\varphi(n)}} f)_{n \in \mathbb{N}}$ soit uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{N}$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ constitué des fonctions normales.
- (a) Soit f une fonction normale. Montrer que, pour toute fonction $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uniformément continue, la fonction $\varphi \circ f$ est normale.
 - (b) Montrer qu'une fonction $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est normale si, et seulement si, l'ensemble $T(f) = \{\tau_a f, a \in \mathbb{R}\}$ est précompact dans $(\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.
 - (c) Montrer que $\mathcal{N}$ est une sous-algèbre de $(\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ stable par conjugaison complexe et qu'elle contient l'espace $\mathcal{P}$ des polynômes trigonométriques généralisés.
 - (d) Montrer que l'algèbre $\mathcal{N}$ est fermée dans $(\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ et qu'elle contient l'algèbre $\overline{\mathcal{P}}$ des fonctions presque périodiques.
14. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et tout réel $\varepsilon > 0$, on note :

$$E(f, \varepsilon) = \{a \in \mathbb{R}, \|\tau_a f - f\|_\infty < \varepsilon\}$$

où $\|\tau_a f - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+a) - f(x)| \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est *presque périodique* au sens de BOHR, si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\ell_\varepsilon > 0$ tel que pour tout réel α , l'intersection $[\alpha, \alpha + \ell_\varepsilon[\cap E(f, \varepsilon)$ est non vide. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ presque périodiques au sens de BOHR.

- (a) Montrer que pour tous réels ε et ε' strictement positifs, on a :

$$(a \in E(f, \varepsilon)) \Leftrightarrow (-a \in E(f, \varepsilon))$$

$$(b - a \in E(f, \varepsilon)) \Leftrightarrow (\|\tau_b f - \tau_a f\| < \varepsilon)$$

$$(a \in E(f, \varepsilon) \text{ et } b \in E(f, \varepsilon')) \Rightarrow (a + b \in E(f, \varepsilon + \varepsilon'))$$

- (b) Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et périodique est presque périodique au sens de BOHR.
- (c) Soit f une fonction presque périodique au sens de BOHR. Montrer que les fonctions $\bar{f}$, $|f|$ et pour tous réels b, c la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(b + cx)$ sont presque périodiques au sens de Bohr.
- (d) Soient $f \in \mathcal{B}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ell_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[\alpha, \alpha + \ell_\varepsilon[\cap E(f, \varepsilon) \neq \emptyset$ pour tout réel α . Montrer que pour tout réel x , il existe $y \in [0, \ell_\varepsilon[$ tel que $\|\tau_y f - \tau_x f\|_\infty < \varepsilon$.
- (e) Montrer qu'une fonction presque périodique au sens de BOHR est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
- (f) Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ presque périodiques au sens de BOHR est fermé dans $(\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ et en conséquence, complet.
- (g) Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{B}$ et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $[-\eta, \eta] \subset E(f, \varepsilon)$.

- (h) Montrer qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est presque périodique au sens de BOHR si, et seulement si, elle est normale. C'est donc une sous-algèbre fermée de $(\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ stable par conjugaison complexe.

L'ensemble $\mathcal{B}$ des fonctions presque périodiques au sens de BOHR est donc une algèbre de BANACH égale à $\mathcal{N}$ et elle contient l'espace des fonctions presque périodiques.

15. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction presque périodique au sens de BOHR et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. À tout réel $\varepsilon > 0$, on associe un réel $\ell_\varepsilon > 0$ tel que $[\alpha, \alpha + \ell_\varepsilon[\cap E(f, \varepsilon) \neq \emptyset$ pour tout réel α .
- (a) Montrer que pour tout réel α et tout réel $x > 0$, on a :

$$\left| \int_0^x f(t) dt - \int_\alpha^{\alpha+x} f(t) dt \right| \leq \varepsilon x + 2 \|f\|_\infty \ell_\varepsilon$$

et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|\varphi(x) - \varphi(nx)| \leq \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \frac{\ell_\varepsilon}{x}$.

- (b) Soient $x \geq T$ deux réels strictement positifs et n la partie entière de $\frac{x}{T}$. Montrer que $|\varphi(x) - \varphi(nT)| \leq \frac{2}{n} \|f\|_\infty$.
- (c) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \geq 1$ et un réel $T > 0$ tels que pour tous réels $x \geq n_0 T$ et $y \geq n_0 T$, on a $|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$.
- (d) En déduire que la fonction φ admet une limite quand x tend vers $+\infty$. En notant $c_0(f)$ cette limite, montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout réel $x > 0$, on a $|\varphi(x) - c_0(f)| \leq \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \frac{\ell_\varepsilon}{x}$.

16. Soit $f \in \mathcal{B}$ une fonction presque périodique au sens de BOHR. Montrer que pour tout réel λ , la fonction $\varphi_{f,\lambda} : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) e^{-i\lambda t} dt$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$. En notant $c_\lambda(f)$ cette limite, montrer que l'application c_λ est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_\infty)$ et préciser sa norme d'opérateur $N(c_\lambda)$.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}$, les coefficients $c_\lambda(f) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) e^{-i\lambda t} dt$ pour λ réel sont les coefficients de *FOURIER* généralisés de f .

17. Soit $f \in \mathcal{B}$. Montrer que l'on a $c_\lambda(\bar{f}) = \overline{c_{-\lambda}(f)}$ et $c_\lambda(\tau_a f) = e^{i\lambda a} c_\lambda(f)$ pour tout réels λ et a .
18. Montrer que si $f \in \mathcal{B}$ est une fonction presque périodique au sens de BOHR à valeurs réelles positives telle que $f(0) > 0$, on a alors $c_0(f) > 0$.
19. Montrer qu'une fonction $f \in \mathcal{B}$ presque périodique au sens de BOHR à valeurs réelles positives est nulle si, et seulement si, on a $c_0(f) = 0$.
20. Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = c_0(\bar{f}g)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{B}$.

On note $\|f\| = \sqrt{c_0(|f|^2)}$, la norme associée à ce produit scalaire sur $\mathcal{B}$.

21. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n}$ une suite de nombres réels et $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$ engendré par la famille $(e_{\lambda_k})_{0 \leq k \leq n}$. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{B}$, on a $\inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |c_{\lambda_k}(f)|^2$ et $\|f\|^2 \geq \sum_{k=0}^n |c_{\lambda_k}(f)|^2$.
22. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$, l'ensemble $J_0(f) = \{\lambda \in \mathbb{R}, |c_\lambda(f)| \geq 1\}$ et les ensembles $J_n(f) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}, \frac{1}{n+1} < |c_\lambda(f)| \leq \frac{1}{n} \right\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont finis.
23. Montrer que pour $f \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$, l'ensemble $J(f) = \{\lambda \in \mathbb{R}, c_\lambda(f) \neq 0\}$ est dénombrable (fini ou infini) et on a $\sum_{\lambda \in J(f)} |c_\lambda(f)|^2 \leq \|f\|^2$ (inégalité de BESSEL).
24. Montrer que l'application $\varphi : (f, g) \mapsto \sum_{\lambda \in J(f) \cap J(g)} \overline{c_\lambda(f)} c_\lambda(g)$ définit une forme hermitienne positive sur $\mathcal{B}$ et que l'application $N : f \mapsto \sqrt{\sum_{\lambda \in J(f)} |c_\lambda(f)|^2}$ définit une semi-norme sur $\mathcal{B}$, puis que pour tout $f \in \mathcal{B}$, on a $N(f) \leq \|f\| \leq \|f\|_\infty$.
25. Montrer que pour $f \in \overline{\mathcal{P}}$, on a $\sum_{\lambda \in J(f)} |c_\lambda(f)|^2 = \|f\|^2$ (égalité de PARSEVAL).
26. Soient f, g deux fonctions de $\overline{\mathcal{P}}$. Montrer que $f = g$ si, et seulement si, on a $c_\lambda(f) = c_\lambda(g)$ pour tout réel λ .
27. Soit $f \in \overline{\mathcal{P}}$ une fonction presque périodique.
- Que dire de f dans le cas où $J(f)$ est fini ?
 - On suppose que $J(f)$ est infini dénombrable et on note $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ses éléments.
 - Montrer que si la série numérique $\sum c_{\lambda_n}(f)$ est absolument convergente, on a alors $f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{\lambda_n}(f) e_{\lambda_n}$, la convergence étant uniforme sur $\mathbb{R}$.
 - On suppose que f est dérivable de dérivée uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Dans le cas où $0 \notin J(f)$ et la série numérique $\sum \frac{1}{\lambda_n^2}$ est convergente, montrer que l'on a $f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{\lambda_n}(f) e_{\lambda_n}$, la convergence étant uniforme sur $\mathbb{R}$.





Intégrales de WALLIS

16.1 Rappels de cours

La fonction gamma d'EULER est la fonction définie sur le demi-plan $\mathcal{H}_0 = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$. Elle est continue sur $\mathcal{H}_0$, vérifie sur $\mathcal{H}_0$ l'équation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et on a $\Gamma(z) \underset{z \in \mathcal{H}, z \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{z}$. Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Gamma(n+1) = n!$ et $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$. En particulier, on a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

On a la formule de STIRLING $\Gamma(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$ qui permet de retrouver la classique formule $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

On a également la formule de LEGENDRE $\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z)$ sur $\mathcal{H}_0$ et la formule des compléments $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ pour $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$.

La fonction bêta est définie sur $\mathcal{H}_0^2$ par $B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt$.

Le critère d'Abel pour les séries trigonométriques nous sera utile.

Théorème Si $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs qui tend vers 0 en décroissant, la série $\sum \alpha_n e^{in\theta}$ est alors convergente pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

La version suivante du théorème de convergence dominée nous sera suffisante.

Théorème (Convergence dominée) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux. S'il existe une fonction φ continue par morceaux à valeurs réelles positives telle $|f_n| \leq \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

16.2 Énoncé

– I – Intégrales de WALLIS généralisées

Pour tout réel α , on note $\mathcal{H}_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \alpha\}$.

1. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathcal{H}_{-1}^2$, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a(\theta) \cos^b(\theta) d\theta$ est absolument convergente. Les intégrales $W_{a,b} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a(\theta) \cos^b(\theta) d\theta$ pour (a, b) dans $\mathcal{H}_{-1}^2$, sont les *intégrales de WALLIS généralisées*. Dans le cas où $b = 0$, on note $W_a = W_{a,0}$.
2. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathcal{H}_{-1}^2$, on a :

$$W_{a,b} = W_{b,a} = \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{a+b}{2} + 1\right)} \text{ et } W_{a,b} = \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{b}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2} + 1\right)} W_a W_b$$

3. Préciser les valeurs de W_{2n} , W_{2n+1} , $W_{2n,2m}$ pour n, m entiers naturels.
4. Montrer que $W_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, puis en déduire que $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \pi\sqrt{2}$. Préciser les valeurs de $W_{-\frac{1}{2}}$ et $W_{\frac{1}{2}}$ en fonction de $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$.
5. Avec cette question, on donne des expressions des intégrales de WALLIS généralisées faisant intervenir des intégrations de fonctions puissances ou hyperboliques. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathcal{H}_{-1}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a(\theta) \cos^b(\theta) d\theta &= 2^{a+1} \int_0^1 \frac{t^a (1-t^2)^b}{(1+t^2)^{a+b+1}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}^b(x)}{\operatorname{ch}^{a+b+1}(x)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^b}{(1+t^2)^{\frac{b+a}{2}+1}} dt = \int_0^1 \frac{t^a + t^b}{(1+t^2)^{\frac{b+a}{2}+1}} dt = \int_1^{+\infty} \frac{t^a + t^b}{(1+t^2)^{\frac{b+a}{2}+1}} dt \end{aligned}$$

6. Calculer $\int_0^1 (1-t^2)^a dt$ pour $a \in \mathcal{H}_{-1}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^a}$ pour $a \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$.
7. Montrer que pour tout $a \in \mathcal{H}_{-1}$, on a :

$$W_{a+2} = \frac{a+1}{a+2} W_a \text{ et } (a+1) W_a W_{a+1} = \frac{\pi}{2}$$

8. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\frac{\pi}{2(a+1)} \leq W_a^2 \leq \frac{\pi}{2a}$ et $W_a \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a}}$ (*formule de WALLIS*).
9. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \prod_{j=1}^n \frac{2j}{2j+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. En déduire la *formule de WALLIS* $\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{\pi}{2}$.

10. Soit $b \in \mathcal{H}_0$ fixé. Montrer que pour tout $a \in \mathcal{H}_{-1}$, on a :

$$W_{a+2,b} = \frac{a+1}{a+b+2} W_{a,b}, \quad W_{a,b} W_{a+1,b} = \frac{2^{b-1}}{a+b+1} \Gamma^2\left(\frac{b+1}{2}\right) \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+b+1)}$$

(pour la deuxième relation, on peut utiliser la formule de LEGENDRE).

11. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $a \in \mathcal{H}_{-1}$, on a :

$$(a+1) \cdots (a+m)(a+m+1) W_{a,m} W_{a+1,m} = 2^{m-1} \Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)$$

puis que pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$W_{a,m} \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{\frac{m-1}{2}}}{a^{\frac{m+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)$$

– II – La série génératrice $\sum W_n z^n$

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum W_n z^n$ est égal à 1. Préciser le comportement sur le bord du disque de convergence.

2. Montrer que la fonction f définie sur $] -1, 1[$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n$ est solution de l'équation différentielle $(1-x^2) f'(x) - x f(x) = 1$, puis en déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n = \frac{\arcsin(x) + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}} \quad (16.1)$$

3. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a :

$$\frac{\pi}{2} + x - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{W_n}{n-1} x^n = \left(\arcsin(x) + \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{1-x^2}$$

4. Montrer que pour tout $x \in] -1, 1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_{2n} x^{2n} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} W_{2n+1} x^{2n+1} = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

et que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a :

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{W_{2n}}{2n-1} x^{2n} = \frac{\pi}{2} \sqrt{1-x^2}, \quad x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{W_{2n+1}}{2n} x^{2n+1} = \arcsin(x) \sqrt{1-x^2}$$

5. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 - x \cos(\theta)} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$$

Ce développement en série entière est en fait valable sur le disque unité complexe ouvert (voir la question **I.8** du problème 18).

6. Soit $\sum a_n$ une série de nombres complexes absolument convergente et g la fonction définie sur le disque fermé $\overline{D}(0, 1)$ par $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin(\theta)) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\cos(\theta)) d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n W_n.$$

Préciser les résultats obtenus pour les fonctions $g = \sin$, et $g = \cos$ et pour la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{W_{n-1}}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

– **III – Les m -intégrales de WALLIS** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^m \cos^n(t) dt$ **pour** $(m, n) \in \mathbb{N}^2$

À tout $m \in \mathbb{N}$ on associe les suites réelles $(I_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(J_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^m \cos^n(t) dt \text{ et } J_{m,n} = \frac{I_{m,n}}{W_n}$$

1. Montrer que pour tous $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^m \sin^n(t) dt = \left(\frac{\pi}{2} \right)^m W_n + \sum_{k=1}^m (-1)^k \left(\frac{\pi}{2} \right)^{m-k} I_{k,n}$$

2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la suite $(I_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante de limite nulle.

3. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{m,n} = 0$, soit $I_{n,m} = o_{n \rightarrow +\infty}(W_n)$.

4. Pour cette question, on s'intéresse au cas où $m = 1$. On note I_n pour $I_{1,n}$ et J_n pour $J_{1,n}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n - \frac{1}{(n+2)^2} \text{ et } J_{n+2} = J_n - \frac{2}{\pi} \frac{W_{n+1}}{n+2}$$

(b) Dédurre de la question précédente l'existence d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels strictement positifs et d'une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels positifs telle que $b_0 = 0$ et $b_n > 0$ pour $n \geq 1$ telles que $I_{2n} = a_{2n} \pi^2 - b_{2n}$ et $I_{2n+1} = a_{2n+1} \pi - b_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en précisant les coefficients a_n

et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire également que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{W_n}{n+1} = \frac{3\pi^2}{8}$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^{2n}(t) dt = a_{2n} \pi^2 + b_{2n}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^{2n+1}(t) dt = b_{2n+1}$$

(d) Montrer que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 - \sin(t))}{\sin(t)} dt$ est convergente en précisant sa valeur.

(e) Montrer que $J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

(f) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\cos(t))^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos((2(n-k))t)$$

$$(\cos(t))^{2n+1} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} \cos((2(n-k)+1)t)$$

puis retrouver l'existence de deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels positifs telles que $I_{2n} = a_{2n} \pi^2 - b_{2n}$ et $I_{2n+1} = a_{2n+1} \pi - b_{2n+1}$.

5. Pour cette question, on s'intéresse au cas où $m \geq 2$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{m,n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_{m,n} - m(m-1) \frac{I_{m-2,n+2}}{(n+2)^2}$$

et :

$$J_{m,n+2} = J_{m,n} - m(m-1) \frac{J_{m-2,n+2}}{(n+2)^2}$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$J_{m,2n} = \frac{1}{m+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^m - m(m-1) \sum_{k=1}^n \frac{J_{m-2,2k}}{(2k)^2}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$J_{m,2n+1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m - m(m-1) \sum_{k=0}^n \frac{J_{m-2,2k+1}}{(2k+1)^2}$$

En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_{m-2,n+1}}{n+1} W_n = \frac{m+2}{m(m^2-1)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{m+1}$$

6. Montrer que :

$$J_{2m+1,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^m m!}{n^{m+\frac{1}{2}}}, \quad I_{2m+1,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^m m!}{n^{m+1}}$$

et :

$$J_{2m,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{1}{n^m}, \quad I_{2m,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{1}{n^{m+\frac{1}{2}}}$$





Intégrales de DIRICHLET généralisées

17.1 Rappels de cours

En désignant pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π -périodique par $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites de ses coefficients de FOURIER trigonométriques définis par $a_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) \frac{dt}{\pi}$, $b_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) \frac{dt}{\pi}$ et par $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de FOURIER exponentiels définis par $c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi}$, on a le résultat suivant.

Théorème (DIRICHLET) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction 2π -périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, on a alors pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nx) \\ &= \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} \end{aligned}$$

Théorème Une série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur un ensemble D si, et seulement si, il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telle que la série $\sum \alpha_n$ soit convergente et $\|f_n\|_\infty \leq \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans un espace de BANACH E telle que la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g .

S'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction dérivable f telle que $f' = g$.

Dans le cas où les f_n sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, il en est de même de f .

Théorème Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans un espace de BANACH E telle que la série de fonctions $\sum f'_n$ soit uniformément convergente sur $[a, b]$. S'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ soit convergente, la série de fonctions $\sum f_n$ converge alors uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f dérivable et pour tout $x \in [a, b]$, on a $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.

La version suivante du théorème de convergence dominée nous sera suffisante.

Théorème (Convergence dominée) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux. S'il existe une fonction φ continue par morceaux à valeurs réelles positives telle $|f_n| \leq \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Théorème Soient I un intervalle réel non réduit à un point et $f : I \times [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue telle que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ existe en tout point de $I \times [a, b]$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ étant continue sur $I \times [a, b]$. Dans ces conditions, la fonction φ définie sur I par $\varphi(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée définie par $\varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$, on appelle *système fondamental de solutions* de l'équation différentielle linéaire $ay'' + by' + cy = 0$ toute base de solutions sur $\mathbb{R}$. La connaissance d'un système fondamental (u, v) de solutions permet de trouver des solutions particulières de l'équation avec second membre $ay'' + by' + cy = f$, où $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ en utilisant la méthode de variation des constantes. Pour ce faire, on cherche une solution particulière de la forme $y = \lambda u + \mu v$, où λ, μ dans $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ sont telles que $\lambda' u + \mu' v = 0$, ce qui implique que pour tout $x \in I$, $(\lambda'(x), \mu'(x))$ est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} u(x) \lambda'(x) + v(x) \mu'(x) = 0 \\ u'(x) \lambda'(x) + v'(x) \mu'(x) = \frac{f(x)}{a} \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est le *wronskien* $w(x) = u(x) v'(x) - u'(x) v(x)$ qui ne s'annule jamais sur I , donc pour tout $x \in I$, on a $\lambda'(x) = -\frac{v(x) f(x)}{aw(x)}$, $\mu'(x) = \frac{u(x) f(x)}{aw(x)}$ et une solution particulière de $ay'' + by' + cy = f$ est donnée par :

$$y_0(x) = \int_{x_0}^x \frac{u(t) v(x) - v(t) u(x)}{aw(t)} f(t) dt$$

où x_0 est un point fixé dans I .

17.2 Énoncé

– I – Résultats préliminaires

1. Montrer que :

(a) pour tous $p \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2p} = \binom{2p}{p} + \sum_{k=1}^p \binom{2p}{p-k} \left(z^{2k} + \frac{1}{z^{2k}}\right)$$

(b) pour tous $p \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \cos^{2p}(t) &= \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p} + \frac{1}{2^{2p-1}} \sum_{k=1}^p \binom{2p}{p-k} \cos(2kt) \\ \sin^{2p}(t) &= \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p} + \frac{1}{2^{2p-1}} \sum_{k=1}^p (-1)^k \binom{2p}{p-k} \cos(2kt) \end{aligned}$$

(c) pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$W_{2p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t) dt = \frac{\pi}{2^{2p+1}} \binom{2p}{p}$$

(intégrales de WALLIS d'indices pairs).

2. Montrer que :

(a) pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2p+1} = \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{p-k} \left(z^{2k+1} + \frac{1}{z^{2k+1}}\right)$$

(b) pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \cos^{2p+1}(t) &= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{p-k} \cos((2k+1)t) \\ \sin^{2p+1}(t) &= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{2p+1}{p-k} \sin((2k+1)t) \end{aligned}$$

3. On propose une démonstration du lemme de *RIEMANN-LEBESGUE* pour une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Pour tout réel $\lambda > 0$, on note $R_\lambda = \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt$ et on se fixe un réel $\lambda_0 > 0$ tel que $a + \frac{\pi}{\lambda_0} < b - \frac{\pi}{\lambda_0}$.

(a) Montrer que pour tout réel $\lambda \geq \lambda_0$, on a :

$$\int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} f(t) e^{i\lambda t} dt = - \int_{a+\frac{\pi}{\lambda}}^b f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda t} dt$$

(b) En déduire que :

$$2R_\lambda = \int_a^{a+\frac{\pi}{\lambda}} f(t) e^{i\lambda t} dt + \int_{a+\frac{\pi}{\lambda}}^b \left(f(t) - f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) \right) e^{i\lambda t} dt + \int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^b f(t) e^{i\lambda t} dt$$

et conclure.

(c) Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt = 0$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_0^\pi t \left(\frac{t}{2\pi} - 1 \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$, puis que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \frac{t \left(\frac{t}{2\pi} - 1 \right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left((2n+1) \frac{t}{2}\right) dt$$

et conclure.

5. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue périodique de période $T > 0$ et F sa primitive nulle en T .

(a) Montrer que la fonction F est bornée sur $[T, +\infty[$ si, et seulement si,

$$\int_0^T f(t) dt = 0.$$

(b) Soit $a \in]0, 1[$. Montrer que l'intégrale $\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a} dt$ est convergente si, et

seulement si, $\int_0^T f(t) dt = 0$. Que dire de $\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a} dt$ pour $a > 1$?

(c) Supposant la fonction f non identiquement nulle telle que $\int_0^T f(t) dt = 0$,

montrer que pour tout réel $a \in]0, 1[$, l'intégrale $\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a} dt$ est semi-convergente.

– II – Une formule de LOBATCHEVSKY

1. On se donne un réel $\alpha \in]0, 1[$ et on lui associe la fonction 2π -périodique $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$.

(a) Montrer que la fonction f_α est développable en série de FOURIER.

(b) En déduire que pour tout $t \in]0, \pi[$, on a :

$$\cotan(t) = \frac{1}{t} - 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2 - t^2}$$

puis que pour tout $t \in [0, \pi[$, on a :

$$\frac{t^2}{\sin^2(t)} = 1 + t^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n\pi - t)^2} + \frac{1}{(n\pi + t)^2} \right)$$

la convergence étant uniforme sur tout segment $[0, b] \subset [0, \pi[$.

- (c) Montrer que pour tout $t \in]0, \pi[$, on a $\cotan(t) = \cotan\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{\sin(t)}$, puis que pour tout $t \in [0, \pi[$, on a $\frac{t}{\sin(t)} = 1 - 2t^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2 - t^2}$, la convergence étant uniforme sur tout segment $[0, b] \subset [0, \pi[$.

2. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue paire et π -périodique. Montrer que :

- (a) l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} f(t) dt$ est convergente ;
 (b) pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} f(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin(t) \left(\frac{(-1)^k}{k\pi + t} - \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\pi - t} \right) dt$$

(c)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} f(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$$

(formule de LOBATCHEVSKI).

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n+1}(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2(n+1)}(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n}$$

Que dire de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n}(t)}{t} dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?

4. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} |\sin(t)| dt$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t(1+\cos^2(t))} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x \sin(t))}{t} dt$ pour tout réel x .

$$\text{– III – Les intégrales impropres } \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(t) \cos^m(t)}{t^a} dt$$

pour $(n, m, a) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{R}_+^*$

Pour $(n, m, a) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{R}_+^*$, on désigne par $f_{n,m,a}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_{n,m,a}(t) = \frac{\sin^n(t) \cos^m(t)}{t^a}$. Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et on s'intéresse aux intégrales impropres $\int_0^{+\infty} f_{n,m,a}(t) dt$ qui seront notées $D_{n,m,a}$ en cas de convergence.

1. Calculer $I_{n,m} = \int_0^{2\pi} \sin^n(t) \cos^m(t) dt$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.
 2. En désignant par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(t) = \frac{\sin^n(t)}{t^n}$ et $g_n(t) = \frac{1 - \cos^n(t)}{t^2}$, montrer que :

- (a) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les fonctions f_n et g_n se prolongent par continuité sur $\mathbb{R}_+$;
- (b) pour tout entier $n \geq 2$, l'intégrale impropre $D_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est absolument convergente et pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale impropre $\Delta_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$ est absolument convergente ;
- (c) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $D_n > 0$;
- (d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = 0$;
- (e) l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est semi-convergente et $D_1 = \Delta_1 = D_2$.

3. Montrer que :

- (a) pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et $a \geq n+1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{n,m,a}(t) dt$ est divergente ;
- (b) pour $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ et $1 < a < n+1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{n,m,a}(t) dt$ est absolument convergente ;
- (c) pour $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ et $0 < a \leq 1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{n,m,a}(t) dt$ est divergente pour n et m pairs ou semi-convergente pour n et m impairs ou de parités différentes.

– IV – Quelques propriétés de la transformation de LAPLACE

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et bornée.

- (a) Justifier la définition sur $\mathbb{R}_+^*$ de la *transformée de LAPLACE* :

$$\mathcal{L}(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$$

- (b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.
- (c) Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de dérivées définies sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par :

$$(\mathcal{L}(f))^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k f(t) e^{-xt} dt$$

2. Montrer que si $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ continue et bornée est telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell$, on

a alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \mathcal{L}(f)(x) = \ell$. Dans le cas où ℓ est non nul, on a $\mathcal{L}(f)(x) \sim \frac{\ell}{x}$ et la fonction $\mathcal{L}(f)$ ne peut pas se prolonger par continuité en 0.

3. Montrer que si $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ continue et bornée est telle que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ soit convergente, la fonction $\mathcal{L}(f)$ se prolonge alors en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. On a donc en particulier :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$$

4. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et bornée telle que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(t)}{t} = \ell$ et l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt$ soit convergente. Montrer que :

- (a) la fonction $f : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\varphi(t)}{t}$ se prolonge en une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$;
 (b) la transformée de LAPLACE de la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\mathcal{L}(f)(x) = \int_x^{+\infty} \mathcal{L}(\varphi)(t) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

En particulier, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(\varphi)(x) dx$$

5. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}^+$ où $n \geq 2$. On suppose que φ est bornée ainsi que toutes ses dérivées d'ordre 1 à $n-1$, que pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi^{(k)}(t)}{t^{n-(k+1)}} = 0$ et que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^n} dt$ est convergente.

- (a) Montrer que pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt$ est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^n} dt = \frac{(n-(k+1))!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt$$

- (b) Dans le cas où $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi^{(n-1)}(t)}{t} = \ell$, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^n} dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(\varphi^{(n-1)})(x) dx$$

– V – Transformée de LAPLACE de $\sin^n$

- Donner pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, une expression sur $\mathbb{R}_+^*$ des transformées de LAPLACE des fonctions s_λ et c_λ définies sur $\mathbb{R}_+$ par $s_\lambda(t) = \sin(\lambda t)$ et $c_\lambda(t) = \cos(\lambda t)$.
- On note $\varphi_n = \sin^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les transformées de LAPLACE $\mathcal{L}(\varphi_n)$ sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis que :

$$\mathcal{L}(\varphi_{n+1})(x) = \frac{n+1}{x} \int_0^{+\infty} \sin^n(t) \cos(t) e^{-xt} dt$$

En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\mathcal{L}(\varphi_{n+1})(x) = \frac{n(n+1)}{(n+1)^2 + x^2} \mathcal{L}(\varphi_{n-1})(x)$$

puis que $\mathcal{L}(\varphi_n)(x) > 0$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\mathcal{L}(\varphi_{n+1})(x) \mathcal{L}(\varphi_n)(x) = \frac{1}{x} \frac{(n+1)!n!}{\prod_{1 \leq k \leq n+1} (k^2 + x^2)}$$

(c) Montrer que pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\mathcal{L}(\varphi_{2p})(x) = \frac{1}{x} \frac{(2p)!}{\prod_{1 \leq k \leq p} (4k^2 + x^2)} \text{ et } \mathcal{L}(\varphi_{2p+1})(x) = \frac{(2p+1)!}{\prod_{0 \leq k \leq p} ((2k+1)^2 + x^2)}$$

3. En utilisant les questions **I.1b**, **I.2b** et **V.2c**, montrer que pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{1}{2^{2p-1}} \sum_{k=1}^p (-1)^k \binom{2p}{p-k} \frac{x^2}{4k^2 + x^2} = \frac{(2p)!}{\prod_{1 \leq k \leq p} (4k^2 + x^2)} - \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p}$$

et :

$$\frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{2p+1}{p-k} \frac{2k+1}{(2k+1)^2 + x^2} = \frac{(2p+1)!}{\prod_{0 \leq k \leq p} ((2k+1)^2 + x^2)}$$

4. Déduire de ce qui précède que :

$$\sum_{k=1}^p (-1)^k \binom{2p}{p-k} = -\frac{1}{2} \binom{2p}{p} \text{ et } \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{2p+1}{p-k} = \frac{2^{2p}}{(2p+1) \binom{2p}{p}}$$

5. Déduire de ce qui précède, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur des intégrales de WALLIS d'indices impairs $W_{2p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t) dt$.

$$- \text{VI} - \text{Quelques méthodes de calcul de } D_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

1. Calcul de D_1 en utilisant le lemme de RIEMANN-LEBESGUE.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt = \frac{\pi}{2}$.

(b) Montrer que $D_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$.

- (c) En utilisant le lemme de RIEMANN-LEBESGUE (question **I.3c**), déduire de ce qui précède que l'on a $D_1 = \frac{\pi}{2}$.
2. Calcul de D_1 en utilisant les développements en série entière des fonctions $\frac{\sin(t)}{t}$ et $e^{-xe^{it}}$.
- (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

- (b) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xe^{it}} dt = \frac{\pi}{2} - i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \frac{e^{in\frac{\pi}{2}} - 1}{n}$$

puis en déduire que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \cos(t)} \cos(x \sin t) dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$$

et que $D_1 = \frac{\pi}{2}$.

3. Calcul de D_1 en utilisant la transformée de LAPLACE de $f_1 : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$.
Montrer que la transformée de LAPLACE de la fonction $f_1 : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, puis en déduire que $D_1 = \frac{\pi}{2}$.
4. Calcul de D_1 en utilisant l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (a) Montrer que les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$ sont les fonctions définies par :

$$y(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$$

où α, β sont deux constantes réelles.

- (b) Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$ est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$ de limite nulle en $+\infty$, cette fonction se prolongeant par continuité en 0.
- (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$, puis en déduire que $D_1 = \frac{\pi}{2}$.

5. Connaissant la valeur de D_1 , retrouver la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n+1}(t)}{t} dt$ trouvée en question **II.3** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

– **VII – Calculs de $\Delta_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n(t)}{t^2} dt$ et $D_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^n} dt$**

1.

- (a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n(t)}{t^2} dt = n \int_0^{+\infty} \cos^{n-1}(t) \frac{\sin(t)}{t} dt$$

- (b) En désignant par $(W_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des intégrales de WALLIS, déduire de la question précédente que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\Delta_{2p+1} = \frac{(2p+1)\pi}{2^{2p+1}} \binom{2p}{p} = (2p+1) W_{2p}$ et que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\Delta_{2p} = \frac{\pi}{2^{2p-1}} p \binom{2p}{p} = 4p W_{2p}$.

2. Montrer que pour tous $p \in \mathbb{N}$, on a aussi :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^{2p+1}(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2^{2p+1}} \sum_{k=0}^p (2k+1) \binom{2p+1}{p-k}$$

et que pour tous $p \in \mathbb{N}^*$, on a aussi :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^{2p}(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^p k \binom{2p}{p-k} = \frac{\pi}{2^{2p-1}} p \binom{2p}{p}$$

On en déduit ainsi les égalités :

$$\sum_{k=0}^p (2k+1) \binom{2p+1}{p-k} = (2p+1) \binom{2p}{p} \text{ et } \sum_{k=0}^p k \binom{2p}{p-k} = p \binom{2p}{p}$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^n} dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \mathcal{L} \left((\sin^n)^{(n-1)} \right) (x) dx$$

4. Déduire de ce qui précède que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2p+1}(t)}{t^{2p+1}} dt = \frac{\pi}{2(2p)!} \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{2p+1}{p-k} \left(k + \frac{1}{2}\right)^{2p}$$

et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2p}(t)}{t^{2p}} dt = \frac{\pi}{2(2p-1)!} \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} \binom{2p}{p-k} k^{2p-1}$$





Intégrales elliptiques

18.1 Rappels de cours

Théorème Si f est une fonction continue sur $I \times [a, b]$, la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(x, t) dt$ est alors continue sur $I \times [a, b]$.

Théorème Si f est une fonction continue sur $I \times [a, b]$ admettant une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $I \times [a, b]$, la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ est alors de classe C^1 telle que $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

La version suivante du théorème de convergence dominée nous sera suffisante.

Théorème (Convergence dominée) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux. S'il existe une fonction φ continue par morceaux à valeurs réelles positives telle $|f_n| \leq \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Théorème Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Il existe $R \in [0, +\infty]$ tel que la série converge pour $|z| < R$ et diverge pour $|z| > R$. Une telle série entière est holomorphe sur son disque de convergence et on peut y dériver et intégrer terme à terme.

Théorème Toute fonction holomorphe est analytique et admet un développement en série entière local.

Définition Une détermination holomorphe du logarithme sur un ouvert Ω est une fonction holomorphe f de Ω dans $\mathbb{C}$ telle que $e^{f(z)} = z$.

Théorème (Prolongement analytique) Soient $\mathcal{O}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, z_0 un point de $\mathcal{O}$ et f, g deux fonctions holomorphes de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \mathcal{O}$;
- il existe une suite $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{O} \setminus \{z_0\}$ qui converge vers z_0 et telle que $f(\zeta_n) = g(\zeta_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- f et g coïncident sur un voisinage ouvert de z_0 ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$.

Théorème La longueur d'un arc paramétré γ est $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.

Théorème Si γ un arc géométrique du plan de classe $\mathcal{C}^1$ paramétré par :

$$\begin{array}{ccc} \gamma : & [a, b] & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto (x(t), y(t)) \end{array}$$

tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$ et la restriction de γ à $]a, b[$ est injective (γ est une courbe de JORDAN), l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a, b])$ a alors deux composantes connexes, l'une étant bornée et l'autre pas. La composante connexe bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a, b])$ est l'intérieur de γ et l'aire de ce domaine est :

$$\mathcal{A}(\gamma) = \frac{1}{2} \left| \int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt \right| = \left| \int_a^b x(t)y'(t) dt \right| = \left| \int_a^b x'(t)y(t) dt \right|$$

18.2 Énoncé

Avec ce problème¹, on s'intéresse aux *fonctions elliptiques complètes de première et de deuxième espèce* définies sur $] -1, 1[$ par :

$$F(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(t)}} \text{ et } E(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(t)} dt$$

On fait également le lien entre ces intégrales, les intégrales de WALLIS, les moyennes arithmético-géométriques et le calcul de la longueur d'une ovale de CASINI ou d'une lemniscate de BERNOULLI.

– I – Intégrales de WALLIS

1. Ce problème est de niveau agrégation externe.

On note $(W_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des intégrales de WALLIS.

1. Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$ et $(n+1) W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\cos(t))^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((2k-n)t)$$

puis en déduire la valeur des intégrales de WALLIS W_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{\pi}{2(n+1)} \leq W_{2n}^2 \leq \frac{\pi}{2n}$, puis en déduire que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

4. En étudiant la suite réelle $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5. Soient $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par $V_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^n(t) dt$ et $U_n = \frac{V_n}{W_n}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_{n+2} - U_n = -\frac{2}{(n+2)^2}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - 2U_{2n}$.

(c) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

6. On appelle *détermination holomorphe de la fonction arctangente* sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$ toute fonction holomorphe $f : \Omega \rightarrow \mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ telle que $\tan(f(z)) = z$ pour tout $z \in \Omega$.

- (a) Montrer que s'il existe une détermination holomorphe de l'arctangente sur l'ouvert Ω , alors $-i$ et i ne sont pas dans Ω .

- (b) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. Montrer qu'une fonction holomorphe $f : \Omega \rightarrow \mathcal{D}$ est une détermination holomorphe de l'arctangente sur Ω si, et seulement si, elle est telle que $e^{2if(z)} = \frac{1+iz}{1-iz}$ pour tout $z \in \Omega$ (ce qui signifie que $2if(z)$ est une détermination holomorphe sur Ω du logarithme de $\frac{1+iz}{1-iz}$).

- (c) Montrer que la fonction f définie sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z = iy, y \in \mathbb{R} \text{ et } |y| \geq 1\}$ par $f(z) = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)$ est une détermination holomorphe de l'arctangente. On note arctan cette détermination. Donner le développement en série entière de la fonction arctan sur $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.
7. On appelle *détermination holomorphe de la fonction arcsinus* sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$ toute fonction holomorphe $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\sin(f(z)) = z$ pour tout $z \in \Omega$.
- (a) Montrer que s'il existe une détermination holomorphe de l'arcsinus sur l'ouvert Ω , alors -1 et 1 ne sont pas dans Ω .
- (b) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Montrer qu'une fonction holomorphe $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une détermination holomorphe de l'arcsinus sur Ω si, et seulement si, il existe une fonction holomorphe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que l'on ait $1 - z^2 = g^2(z)$ et $e^{if(z)} = iz + g(z)$ pour tout $z \in \Omega$ (ce qui signifie que $e^{if(z)} - iz$ est une détermination holomorphe sur Ω de la racine carrée de $1 - z^2$). Dans ce cas, vérifier que $f' = \frac{1}{g}$ sur Ω .
- (c) Montrer que sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}, |x| \geq 1\}$ il existe une unique détermination holomorphe de l'arcsinus nulle en 0. On note arcsin cette détermination.
8. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum W_n z^n$ est égal à 1, puis calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n z^n$ pour tout $z \in D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

– II – Intégrales elliptiques

1. Montrer que pour tout réel α la fonction :

$$\varphi_\alpha : (\lambda, x) \in]-1, 1[\times \mathbb{R} \mapsto \int_0^x (1 - \lambda^2 \sin^2(t))^\alpha dt$$

est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Préciser les dérivées partielles $\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \lambda}$.

2. Montrer que pour tout $(\lambda, x) \in]-1, 1[\times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\varphi_\alpha(\lambda, x) = \int_0^{\sin(x)} \frac{(1 - \lambda^2 t^2)^\alpha}{\sqrt{1 - t^2}} dt$$

3. Pour (λ, α) fixé dans $]-1, 1[\times \mathbb{R}$, on désigne par $\varphi_{\lambda, \alpha}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_{\lambda, \alpha}(x) = \varphi_\alpha(\lambda, x)$.

- (a) Montrer que pour tout entier relatif n et tout réel x , on a :

$$\varphi_{\lambda, \alpha}(x + n\pi) = \varphi_{\lambda, \alpha}(x) + n\varphi_{\lambda, \alpha}(\pi) = \varphi_{\lambda, \alpha}(x) + 2n\varphi_{\lambda, \alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

(b) Montrer que :

$$\varphi_{\lambda,\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((1 - \lambda^2 \sin^2(t))^\alpha + (1 - \lambda^2 \cos^2(t))^\alpha \right) dt$$

puis en déduire que pour $\alpha < 1$, on a :

$$\frac{\pi}{4} \left(1 + (1 - \lambda^2)^\alpha \right) \leq \varphi_{\lambda,\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} \right)^\alpha$$

et pour $\alpha > 1$, on a :

$$\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} \right)^\alpha \leq \varphi_{\lambda,\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{\pi}{4} \left(1 + (1 - \lambda^2)^\alpha \right)$$

- (c) Donner le développement en série entière sur l'intervalle $] -1, 1[$ de la fonction $\lambda \mapsto \varphi_\alpha(\lambda, x)$. Préciser en particulier $\varphi_\alpha\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right)$.
- (d) Montrer que la fonction $\varphi_{\lambda,\alpha}$ réalise un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- (e) Calculer les dérivées d'ordre 1 et 2 de la fonction inverse $\psi_{\lambda,\alpha} = \varphi_{\lambda,\alpha}^{-1}$.

4. Résoudre l'équation différentielle $z'' + \lambda^2 \sin(z) = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec les conditions initiales $z(0) = 0$ et $z'(0) = 2$.

On définit les *fonctions elliptiques complètes de première et de deuxième espèce* sur $] -1, 1[$ respectivement par :

$$F(\lambda) = \varphi_{-\frac{1}{2}}\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(t)}}$$

$$E(\lambda) = \varphi_{\frac{1}{2}}\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(t)} dt$$

5. Montrer que pour tout $\lambda \in] -1, 1[$, on a :

- (a) $E(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{W_{2n}^2}{2n-1} \lambda^{2n}$ et $F(\lambda) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} W_{2n}^2 \lambda^{2n}$, où les W_{2n} sont les intégrales de WALLIS d'indices pairs ;
- (b) $0 \leq E(\lambda) - \left(\frac{\pi}{2} - \ln(1 - \lambda^2) + \lambda \ln\left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}\right) \right) \leq \frac{\zeta(3)}{2} \lambda^2$;
- (c) $0 \leq \frac{\pi}{2} - \ln(1 - \lambda^2) - F(\lambda) \leq \frac{\pi^2}{6} \lambda^2$.

6. Montrer que pour tout $\lambda \in] -1, 1[$, on a :

- (a) $\lambda E'(\lambda) = E(\lambda) - F(\lambda)$ et $F'(\lambda) = -\lambda E''(\lambda)$;
- (b) $(1 - \lambda^2)(F'(\lambda) - E'(\lambda)) = \lambda E(\lambda)$;
- (c) $\lambda(1 - \lambda^2)E'' + (1 - \lambda^2)E' + \lambda E = 0$;

- (d) $\lambda(1-\lambda^2)F'(\lambda) = E(\lambda) - (1-\lambda^2)F(\lambda)$;
 (e) $\lambda(1-\lambda^2)F'' + (1-3\lambda^2)F' - \lambda F = 0$.

7. En vérifiant que la fonction G définie sur $]0, 1[$ par $G(\lambda) = F(\sqrt{1-\lambda^2})$ est solution sur de l'équation différentielle $\lambda(1-\lambda^2)y'' + (1-3\lambda^2)y' - \lambda y = 0$, déterminer l'ensemble des solutions de cette équation différentielle sur $]0, 1[$.
 8. Montrer que les fonctions elliptiques complètes E et F peuvent être définies sur le disque ouvert $D(0, 1)$ de centre 0 et de rayon 1 du plan complexe et que ces fonctions sont holomorphes. Préciser les équations différentielles d'ordre 2 vérifiées par ces fonctions sur $D(0, 1)$.

– III – Moyenne arithmético-géométrique

1. Pour tous réels α , $a > 0$ et $b > 0$, on note :

$$L_\alpha(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t))^\alpha dt$$

Pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, on note $I(a, b) = L_{-\frac{1}{2}}(a, b)$ et $J(a, b) = L_{\frac{1}{2}}(a, b)$.
 Montrer que :

(a) $L_\alpha(a, b) = L_\alpha(b, a)$;

(b) pour $a \geq b > 0$, on a $L_\alpha(a, b) = a^{2\alpha} \varphi_\alpha\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right)$ où $\lambda = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ et

$$L_\alpha\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^{2\alpha} \varphi_\alpha\left(\kappa, \frac{\pi}{2}\right) \text{ où } \kappa = \frac{a-b}{a+b}.$$

(c) en notant $g(x) = (a^2 + x^2)(b^2 + x^2)$, on a :

$$\begin{aligned} L_\alpha(a, b) &= b^{2\alpha+1} \int_0^{+\infty} \frac{g^\alpha(x)}{(b^2 + x^2)^{2\alpha+1}} dx \\ &= \int_0^{\sqrt{ab}} \left(\frac{b^{2\alpha+1}}{(b^2 + x^2)^{2\alpha+1}} + \frac{a^{2\alpha+1}}{(a^2 + x^2)^{2\alpha+1}} \right) g^\alpha(x) dx \end{aligned}$$

(d) la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{ab}{x} \right)$ réalise un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$;

(e) $L_\alpha\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = (ab)^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{g^\alpha(x)}{(ab + x^2)^{2\alpha+1}} dx$ (on peut utiliser le changement de variable $y = \frac{1}{2} \left(x - \frac{ab}{x} \right)$ pour $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$);

(f) $I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = I(a, b)$.

2. Montrer que pour tout $\lambda \in [0, 1[$, on a :

$$F\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}\right) = (1+\lambda)F(\lambda) \text{ et } 2E(\lambda) = (1+\lambda)E\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}\right) + (1-\lambda^2)F(\lambda)$$

En déduire que pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a :

$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \frac{J(a,b)}{2} + \frac{ab}{2} I(a,b)$$

3. Soient $a > b > 0$ deux réels et γ l'ellipse dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ paramétrée par :

$$\begin{array}{ccc} \gamma : & [-\pi, \pi] & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto \gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t)) \end{array}$$

On note $\lambda = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ l'excentricité de cette ellipse. Montrer que la longueur de cette ellipse est $L(\gamma) = 4aE(\lambda)$, puis que $\pi a \left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq L(\gamma) \leq \pi\sqrt{2}a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$.

4. Soient $0 < b < a$ deux réels et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ (*moyenne arithmétique*), $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ (*moyenne géométrique*) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

- (a) les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $M(a, b) > 0$ (cette limite est appelée *moyenne arithmético-géométrique* de a et b) ;
- (b) $M(a, b) = \frac{\pi}{2I(a, b)}$ (*formule de GAUSS*).

5. Avec les notations de la question précédente, on définit de plus la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$. Montrer que :

- (a) la série $\sum c_n^2 2^n$ est convergente ;
- (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n (a_n^2 I(a, b) - J(a_n, b_n)) = 0$;
- (c) $J(a, b) = \left(a^2 - \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 2^{k-1}\right) I(a, b) = \left(a^2 - \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 2^{k-1}\right) \frac{\pi}{2M(a, b)}$.

6. Montrer que :

- (a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $c_{n+1} \leq \frac{c_n^2}{4M(a, b)}$, puis en déduire que pour tout entier $n_0 \geq 0$, on a $\frac{c_n}{4M(a, b)} \leq \left(\frac{c_{n_0}}{4M(a, b)}\right)^{2^{n-n_0}}$;
- (b) pour tout réel $\eta > 0$ il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $c_n \leq M(a, b) \eta^{2^{n+2-n_0}}$ pour tout entier $n \geq n_0$, puis en déduire que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a $|a_n - M(a, b)| = o_{n \rightarrow +\infty}(\varepsilon^n)$ et $|M(a, b) - b_n| = o_{n \rightarrow +\infty}(\varepsilon^n)$.

On se donne deux points F et F' dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$, un réel $a > 0$ et on s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{C} = \{M \in \mathbb{R}^2, MF \cdot MF' = a^2\}$.

Pour $F = F'$, l'ensemble $\mathcal{C}$ est le cercle de centre F et de rayon a .

Pour la suite de cette partie, on suppose que les points F et F' sont distincts et on dit alors dans ce cas, que $\mathcal{C}$ est une ovale de CASSINI de foyers F et F' .

On désigne par O le milieu du segment $[F, F']$ et on utilise le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1 = \frac{1}{OF} \overrightarrow{OF}$.

On note $M(x, y)$ tout point M de coordonnées (x, y) dans ce repère.

La longueur d'un segment $[A, B]$ dans $\mathbb{R}^2$ est $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.

En notant $c = OF = \frac{FF'}{2}$, on a $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$.

1. Montrer qu'une équation implicite d'une ovale de CASSINI $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}$ est :

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4 \quad (18.1)$$

On note $\mathcal{C}_-$ et $\mathcal{C}_+$ les courbes d'équations implicites (18.1) dans le repère $\mathcal{R}$ avec les conditions respectives $x \leq 0$ et $x \geq 0$.

2. Pour cette question, on suppose que $a = c$. Dans ce cas, la courbe :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathbb{R}^2, MF \cdot MF' = OF^2\}$$

d'équation implicite $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ dans le repère $\mathcal{R}$ est appelée lemniscate de BERNOULLI. Montrer que $\mathcal{C} = \{M \in \mathbb{R}^2, |MF - MF'| = \sqrt{2}OM\}$.

3. Préciser l'intersection d'une ovale de CASSINI $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses (on distinguera les cas $a = c$, $a > c$ et $a < c$).
4. En écrivant que pour tout point $M(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, il existe un unique couple (ρ, θ) dans $\mathbb{R}_+^* \times \left] -\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2} \right]$ tel que l'on ait $(x, y) = \rho(\cos(\theta), \sin(\theta))$, donner une équation polaire d'une ovale de CASSINI privée du point O (on distinguera les cas $a = c$, $a > c$ et $a < c$).

Ces représentations polaires peuvent être utilisées pour donner des représentations graphiques des courbes $\mathcal{C}$ dans chaque cas (figures 18.1, 18.2 et 18.3).

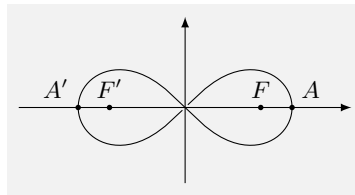


FIG. 18.1 – Lemniscate de Bernoulli : $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$

5. Avec cette question, on se propose de donner plusieurs paramétrages de la demi-lemniscate $\mathcal{C}_+$ d'équation implicite $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ avec la condition $x \geq 0$ dans le repère $\mathcal{R}$. Montrer que dans le repère $\mathcal{R}$:

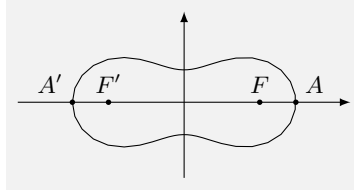


FIG. 18.2 – Ovale de Cassini : $x^4 - 2c^2x^2 + c^4 - a^4 = (x^2 - c^2)^2 - a^4$ ($a > c$)

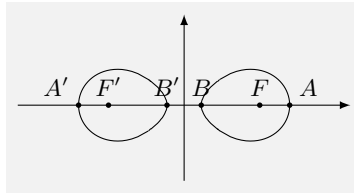


FIG. 18.3 – Ovale de Cassini : $x^4 - 2c^2x^2 + c^4 - a^4 = (x^2 - c^2)^2 - a^4$ ($a < c$)

- (a) $\mathcal{C}_+$ admet le paramétrage $(x(t), y(t)) = a\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}, t \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2} \right)$ où $t \in]-1, 1]$;
- (b) $\mathcal{C}_+$ admet le paramétrage rationnel $(x(t), y(t)) = a\sqrt{2} \left(t \frac{1+t^2}{1+t^4}, t \frac{1-t^2}{1+t^4} \right)$ où $t \in \mathbb{R}_+$.
6. Dans le cas où l'on dispose d'une équation polaire $\rho : \theta \mapsto \rho(\theta)$ de γ où $\rho : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\rho(\alpha)e^{i\alpha} = \rho(\beta)e^{i\beta}$, montrer que l'aire de l'intérieur de γ est $\mathcal{A}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$.
7. Soient $\mathcal{C}$ une ovale de CASSINI et $\mathcal{C}_-, \mathcal{C}_+$ les courbes d'équations implicites (18.1) dans le repère $\mathcal{R}$ avec les conditions respectives $x \leq 0$ et $x \geq 0$.
- (a) Dans le cas où $\mathcal{C}$ est une lemniscate, montrer que $\mathcal{A}(\mathcal{C}_+) = a^2$.
- (b) Dans le cas où $0 < c < a$, montrer que $\mathcal{A}(\mathcal{C}) = 2a^2 E\left(\frac{c^2}{a^2}\right)$.
- (c) Dans le cas où $0 < a < c$, montrer que $\mathcal{A}(\mathcal{C}_+) = a^2 \varphi_{\frac{1}{2}}\left(\frac{c^2}{a^2}, 2\theta_0\right)$ où le réel $\theta_0 \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ est tel que $\sin(2\theta_0) = \frac{a^2}{c^2}$.





Séries de FOURIER-LEGENDRE

19.1 Rappels de cours

En utilisant la relation de CHASLES pour les intégrales, on vérifie que pour toute fonction continue et 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, on a pour tout réel a , $\int_a^{a+2\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$.

L'intégrale de GAUSS $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ est supposée connue.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques. On dit que :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe un entier $n_0 \geq 0$ et une suite bornée $(\varphi_n)_{n \geq n_0}$ tels que $u_n = \varphi_n v_n$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui se note $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$;
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, s'il existe un entier $n_0 \geq 0$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq n_0}$ convergente vers 0 tels que $u_n = \varepsilon_n v_n$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui se note $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$;
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, s'il existe un entier $n_0 \geq 0$ et une suite $(\varphi_n)_{n \geq n_0}$ convergente vers 1 tels que $u_n = \varphi_n v_n$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui se note $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Dire que $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ revient aussi à dire que $u_n - v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

Nous aurons besoin à plusieurs reprises du résultat suivant qui se prouve par récurrence.

Théorème (Intégration itérée par parties) Si f et g sont deux fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors :

$$\int_a^b f^{(n)}(t) g(t) dt = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(n-1-k)} g^{(k)} \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f(t) g^{(n)}(t) dt$$

Dans le cas où la fonction g est telle que $g^{(k)}(a) = g^{(k)}(b) = 0$ pour $0 \leq k \leq n-1$, on a $\int_a^b f^{(n)}(t) g(t) dt = (-1)^n \int_a^b f(t) g^{(n)}(t) dt$.

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$, on appelle système fondamental de solutions de l'équation différentielle linéaire $ay'' + by' + cy = 0$ toute base de solutions sur $\mathbb{R}$. La connaissance d'un système fondamental (u, v) de solutions permet de trouver des solutions particulières de l'équation avec

second membre $ay'' + by' + cy = f$, où $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ en utilisant la méthode de variation des constantes. Pour ce faire, on cherche une solution particulière de la forme $y = \lambda u + \mu v$, où λ, μ dans $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ sont telles que $\lambda' u + \mu' v = 0$, ce qui implique que pour tout $x \in I$, $(\lambda'(x), \mu'(x))$ est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} u(x)\lambda'(x) + v(x)\mu'(x) = 0 \\ u'(x)\lambda'(x) + v'(x)\mu'(x) = \frac{f(x)}{a} \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est le wronskien $w(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$ qui ne s'annule jamais sur I , donc pour tout $x \in I$, on a $\lambda'(x) = -\frac{v(x)f(x)}{aw(x)}$, $\mu'(x) = \frac{u(x)f(x)}{aw(x)}$ et une solution particulière de $ay'' + by' + cy = f$ est donnée par :

$$y_0(x) = \int_{x_0}^x \frac{u(t)v(x) - v(t)u(x)}{aw(t)} f(t) dt$$

où x_0 est un point fixé dans I .

Le « théorème d'ABEL uniforme » qui suit nous sera utile en prenant pour D un rectangle de $\mathbb{R}^2$.

Théorème Soient D un ensemble non vide, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans $\mathbb{R}_+$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans un espace normé E telles que :

- la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge uniformément vers la fonction nulle sur D ;
- il existe un réel $M > 0$ tel que $\left\| \sum_{k=0}^n g_k(x) \right\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in D$ (la suite des sommes partielles de $\sum g_n$ est uniformément bornée).

Dans ces conditions, la série de fonctions $\sum \alpha_n g_n$ est uniformément convergente sur D .

19.2 Énoncé

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{E} = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ du produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$, la norme associée étant notée $\|\cdot\|$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$.

On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ formé de l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_m$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$ de dimension $m+1$ formé de l'ensemble des fonctions polynomiales de degré au plus égal à m .

– I – Résultats préliminaires

1. Montrer que pour toute fonction continue $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\sin(t)) dt = 2 \int_0^{\pi} \varphi(\cos(t)) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\varphi(\cos(t)) + \varphi(-\cos(t))) dt$$

2. Montrer que pour tout réel α , on a :

$$\int_0^\pi \frac{dt}{1 - i\alpha \cos(t)} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \alpha^2 \cos^2(t)} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}$$

3. Soient $\beta \in]0, 1]$ et f_β la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f_\beta(t) = 1 - \beta \sin^2(t)$.

- (a) Montrer que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq f_\beta(t) \leq e^{-\frac{4\beta}{\pi^2}t^2}$ (on peut utiliser les inégalités de convexité $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $1 - x \leq e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$), puis en déduire que pour tout réel $\alpha > 0$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \beta \sin^2(t))^\alpha dt \leq \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha\beta}}$$

(on peut utiliser le fait que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

- (b) En effectuant le changement de variable $t = \frac{x}{\sqrt{\alpha\beta}}$, montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \beta \sin^2(t))^\alpha dt \underset{\alpha \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha\beta}}$$

– II – Polynômes de LEGENDRE

On désigne par $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des fonctions polynomiales de LEGENDRE définie sur $[-1, 1]$ par $L_n(x) = \frac{\pi_{2n}^{(n)}(x)}{2^n n!}$ où $\pi_{2n}(x) = (x^2 - 1)^n$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction polynomiale L_n est de degré n et de même parité que n . Préciser le coefficient de x^n , celui de x^{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi que les valeurs de $L_n(0)$, $L'_n(0)$ et $L_n(1)$. On note $L_{-1} = 0$ et $L_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} x^k$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction polynomiale $P \in \mathcal{P}_{n-1}$, on a $\langle L_n, P \rangle = 0$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de $(\mathcal{P}_n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
- Calculer $w_n(a, b) = \int_a^b (t-a)^n (t-b)^n dt$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $a < b$ dans $\mathbb{R}$. En déduire la valeur de $\|L_n\|$, pour $n \in \mathbb{N}$.
- En utilisant les propriétés d'orthogonalité des polynômes de LEGENDRE, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme L_n admet n racines réelles simples dans l'intervalle $] -1, 1[$.

5. En utilisant les propriétés d'orthogonalité des polynômes de LEGENDRE, montrer qu'on a les relations de récurrence :

$$(n+1)L_{n+1} + nL_{n-1} = (2n+1)xL_n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (19.1)$$

$$L'_{n+1} - L'_{n-1} = (2n+1)L_n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (19.2)$$

avec les conditions initiales $L_{-1} = 0$, $L_0 = 1$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$L'_{n+1} - xL'_n = (n+1)L_n \quad (19.3)$$

6. Calculer $\int_0^1 L_n(t) dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Montrer pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $(t, x) \in [-1, 1]^2$, on a :

$$(x-t) \sum_{k=0}^n (2k+1)L_k(t)L_k(x) = (n+1)(L_n(t)L_{n+1}(x) - L_n(x)L_{n+1}(t)) \quad (19.4)$$

(formule de DARBOUX-CHRISTOFFEL).

8. Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in [-1, 1]$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\gamma_{x,r}$ le lacet du plan complexe défini par $\gamma_{x,r}(t) = x + re^{it}$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$ (cercle de centre x et de rayon r).

- (a) Montrer que pour tout entier $k \in [0, \frac{n}{2}[$, on a $\int_{\gamma_{r,x}} \frac{z^{2k}}{(z-x)^{n+1}} dz = 0$ et pour tout entier $k \in [\frac{n}{2}, n]$, on a $\int_{\gamma_{r,x}} \frac{z^{2k}}{(z-x)^{n+1}} dz = 2i\pi \binom{2k}{n} x^{2k-n}$.

- (b) En déduire que :

$$L_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{x,r}} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} \frac{dz}{2^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(2x + re^{it} - \frac{1-x^2}{re^{it}} \right)^n \frac{dt}{2^n}$$

(formules intégrales de SCHLAFFI), puis en prenant $r = \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in]-1, 1[$, que :

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2} \sin(t) \right)^n dt = \int_0^{\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2} \cos(t) \right)^n \frac{dt}{\pi}$$

(formules intégrales de LAPLACE).

9. Montrer que pour tous $y \in]-1, 1[$ et $x \in [-1, 1]$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{y^2 - 2xy + 1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) y^n$$

(fonction génératrice des polynômes de LEGENDRE). Retrouver la relation de récurrence vérifiée par les polynômes de LEGENDRE en utilisant cette fonction génératrice.

10. Calculer $\|L_n\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $|L_n(x)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n(1-x^2)}}$. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $|L_{2p}(0)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$, $|L'_{2p+1}(0)| \leq \frac{2p+1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$ et que pour tout réel $\delta \in]0, 1[$, la suite de fonctions $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[-\delta, \delta]$.
11. On définit l'opérateur de LEGENDRE sur l'espace vectoriel $\mathcal{E}_2 = \mathcal{C}^2([-1, 1], \mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par $\mathcal{L}(f) = ((x^2 - 1)f')'$ pour toute fonction $f \in \mathcal{E}_2$.
- (a) Montrer que l'opérateur $\mathcal{L}$ est symétrique positif dans le sens où pour toutes fonctions f, g dans $\mathcal{E}_2$, on a $\langle \mathcal{L}(f), g \rangle = \langle f, \mathcal{L}(g) \rangle$ et $\langle \mathcal{L}(f), f \rangle \geq 0$.
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{L}(L_n) = n(n+1)L_n$, soit :

$$(x^2 - 1)L_n'' + 2xL_n' = n(n+1)L_n$$

- (c) Retrouver l'orthogonalité des polynômes de LEGENDRE avec la question précédente.
- (d) Définissant la fonction θ_n par $\theta_n(x) = L_n^2(x) + \frac{1-x^2}{n(n+1)}(L_n'(x))^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\theta_n'(x) = \frac{2x(L_n'(x))^2}{n(n+1)}$, puis retrouver la valeur de $\|L_n\|_\infty$.

– III – Étude asymptotique des polynômes de LEGENDRE

On désigne par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites de fonctions définies sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ par $f_n(t) = L_n(\sin(t))$ et $g_n(t) = \sqrt{\cos(t)} f_n(t)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

- (a) la fonction f_n est solution sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ de l'équation différentielle :

$$f_n''(t) - \tan(t) f_n'(t) + \lambda_n f_n(t) = 0$$

où $\lambda_n = n(n+1)$;

- (b) la fonction g_n est solution sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ de l'équation différentielle :

$$g_n''(t) + \left(\mu_n^2 + \frac{1}{4 \cos^2(t)} \right) g_n(t) = 0$$

où $\mu_n = n + \frac{1}{2}$;

- (c) pour tout $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on a $|g_n(t)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n \cos(t)}}$.

2. En écrivant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation différentielle vérifiée sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par la fonction g_n sous la forme $g_n''(t) + \mu_n^2 g_n(t) = -\frac{g_n(t)}{4 \cos^2(t)}$, on cherche une expression intégrale de g_n en utilisant la méthode de variation des constantes.

- (a) Donner la forme générale des solutions sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle homogène $y''(t) + \mu_n^2 y(t) = 0$.
- (b) En utilisant la méthode de variation des constantes, montrer que la fonction h_n définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$h_n(t) = \int_0^t \frac{\sin(\mu_n(\theta - t))}{4\mu_n \cos^2(\theta)} g_n(\theta) d\theta$$

est une solution de l'équation différentielle $y''(t) + \mu_n^2 y(t) = -\frac{g_n(t)}{4 \cos^2(t)}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ telle que $h_n(0) = h_n'(0) = 0$. En déduire la forme générale des solutions de cette équation différentielle.

- (c) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$g_{2p}(t) = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \binom{2p}{p} \cos\left(\left(2p + \frac{1}{2}\right)t\right) + h_{2p}(t)$$

et :

$$g_{2p+1}(t) = \frac{4p+2}{4p+3} \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \binom{2p}{p} \sin\left(\left(2p + \frac{3}{2}\right)t\right) + h_{2p+1}(t)$$

3.

- (a) Montrer que pour tout $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, il existe une constante réelle $C_{2,\varepsilon} > 0$ telle que $|h_n(t)| \leq \frac{C_{2,\varepsilon}}{n^{\frac{3}{2}}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in I_\varepsilon = \left[-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$.
- (b) En utilisant le développement asymptotique :

$$\frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p} = \frac{1}{\sqrt{p\pi}} - \frac{1}{8\sqrt{\pi}p^{\frac{3}{2}}} + O_{p \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{p^{\frac{5}{2}}}\right)$$

montrer que pour tout réel $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, il existe une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ uniformément bornée sur $I_\varepsilon = \left[-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$ telle l'on ait pour tous $p \in \mathbb{N}^*$ et $t \in I_\varepsilon$:

$$g_{2p}(t) = \frac{(-1)^p}{\sqrt{p\pi}} \cos\left(\left(2p + \frac{1}{2}\right)t\right) + \frac{\varphi_{2p}(t)}{p^{\frac{3}{2}}}$$

$$g_{2p+1}(t) = \frac{(-1)^p}{\sqrt{p\pi}} \sin\left(\left(2p + \frac{3}{2}\right)t\right) + \frac{\varphi_{2p+1}(t)}{p^{\frac{3}{2}}}$$

- (c) Dédurre de tout cela pour tout réel $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, il existe une suite de fonctions $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ uniformément bornée sur $J_\varepsilon = [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ telle l'on ait pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in J_\varepsilon$:

$$L_n(\cos(\theta)) = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{n}{2}\right] \pi}} \frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\sin(\theta)}} + \frac{\chi_n(\theta)}{n^{\frac{3}{2}}}$$

4. Montrer que pour tout réel $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, la série de fonctions $\sum L_n(\cos(\theta)) y^n$ est uniformément convergente sur $[\varepsilon, \pi - \varepsilon] \times [0, 1]$. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n L_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+x}}$$

–IV– Séries de FOURIER-LEGENDRE

On rappelle qu'une fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux sur $[-1, 1]$, s'il existe une subdivision $-1 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = 1$ telle que la restriction de f à chacun des intervalle $]t_k, t_{k+1}[$ pour $0 \leq k \leq p-1$ se prolonge en une fonction continue sur $[t_k, t_{k+1}]$. Pour f, g continues par morceaux sur $[-1, 1]$ on peut définir les quantités $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ et $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. L'application bilinéaire symétrique positive $\langle \cdot, \cdot \rangle$ n'est pas un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues par morceaux de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Des questions **II.2** et **II.3**, on déduit que la suite de polynômes $(\widetilde{L}_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}} L_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $(\mathcal{P}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

À toute fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux on associe la suite $(c_k(f))_{k \in \mathbb{N}}$ de ses coefficients de FOURIER-LEGENDRE définie par :

$$c_k(f) = \langle f, \widetilde{L}_k \rangle = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \langle f, L_k \rangle$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par :

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^n c_k(f) \widetilde{L}_k = \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} \langle f, L_k \rangle L_k$$

la n -ième somme partielle de la série de FOURIER-LEGENDRE de f .

1. Montrer que pour toute fonction continue par morceaux $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n(f)\|^2$. En déduire que la série numérique $\sum c_n^2(f)$ est convergente, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(f) = 0$.

2. Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction polynomiale $P \in \mathcal{P}_n$, on a $\langle f - S_n(f), P \rangle = 0$, puis en déduire que $\|f - S_n(f)\| = \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|$. Dans le cas où la fonction f est continue sur $[-1, 1]$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_n(f)\| = 0$, c'est-à-dire que la série de FOURIER-LEGENDRE de f converge en moyenne quadratique vers f , puis en déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2(f) = \|f\|^2$. Que dire de deux fonctions continues sur $[-1, 1]$ ayant les mêmes coefficients de FOURIER-LEGENDRE ?
3. Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $c_n(\mathcal{L}(f)) = n(n+1)c_n(f)$ où $\mathcal{L}$ est l'opérateur linéaire défini en **II.11**. En déduire que la série de FOURIER $\sum c_n(f) \widetilde{L}_n$ converge normalement vers f sur $[-1, 1]$.
4. Soit $f \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$c_n(f) = \frac{c_{n-1}(f')}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)}} - \frac{c_{n+1}(f')}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}$$

- (b) En déduire que la série numérique $\sum c_n(f)$ est absolument convergente, puis que la série de FOURIER-LEGENDRE de f converge uniformément sur tout segment $[-\delta, \delta] \subset]-1, 1[$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, on a pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$S_n(f)(x) = \int_{-1}^1 K_n(t, x) f(t) dt$$

où K_n est la fonction continue définie sur $[-1, 1]^2$ par :

$$K_n(t, x) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} \frac{L_n(t) L_{n+1}(x) - L_n(x) L_{n+1}(t)}{x-t} & \text{si } t \neq x \\ \frac{n+1}{2} (L'_{n+1}(x) L_n(x) - L'_n(x) L_{n+1}(x)) & \text{si } t = x \end{cases}$$

Vérifier que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\int_{-1}^1 K_n(t, x) dt = 1$.

6. Soit $f \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$. Montrer que la série de FOURIER-LEGENDRE de f converge absolument sur tout $[-1, 1]$.
7. On suppose que f est une fonction de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux et qu'elle admet une dérivée à droite et à gauche en un point $x \in]-1, 1[$. Montrer que :

- (a) la fonction f_x définie sur $[-1, 1] \setminus \{x\}$ par $f_x(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ se prolonge en une fonction continue par morceaux sur $[-1, 1]$;

$$(b) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f) \widetilde{L}_n(x) = f(x).$$





Opérateurs de STURM-LIOUVILLE

20.1 Rappels de cours

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *continue par morceaux*, s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \dots < a_{r-1} < a_r = b$ de $[a, b]$ telle que, pour tout entier k compris entre 0 et $r-1$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]a_k, a_{k+1}[$ se prolonge en une fonction continue sur le segment $[a_k, a_{k+1}]$. On dit qu'elle est *de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux* s'il existe une subdivision $(a_k)_{0 \leq k \leq r}$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ pour $0 \leq k \leq r-1$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_k, a_{k+1}]$. Une telle fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b] \setminus \{a_0, \dots, a_r\}$ et en chacun des a_k (quand il en existe), elle admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche non nécessairement égales.

Théorème (CAUCHY-LIPSCHITZ) Soient $a < b$ deux réels et α, β, γ dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$. Pour tout $(u_a, u'_a) \in \mathbb{C}^2$, le problème de CAUCHY $u'' + \alpha u' + \beta u = \gamma$ de conditions initiales $u(a) = u_a$ et $u'(a) = u'_a$ admet une unique solution dans $\mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$.

Il en résulte que l'ensemble des solutions dans $\mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$ de l'équation différentielle homogène $u'' + \alpha u' + \beta u = 0$ est un espace vectoriel complexe de dimension 2.

À toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π -périodique, on associe les suites $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ de ses *coefficients de FOURIER trigonométriques* définis par :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

La série de fonctions $\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx))$ est la *série de FOURIER trigonométrique* de la fonction f .

Théorème (DIRICHLET) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est 2π -périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, sa série de FOURIER converge alors normalement sur $\mathbb{R}$ vers f .

Théorème (PARSEVAL) Les séries numériques $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2(f)$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n^2(f)$ sont convergentes et on a :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$$

Théorème (Du point fixe) Si E est un espace de Banach et $f : E \rightarrow E$ est une application λ -contractante avec $\lambda \in [0, 1[$, elle admet alors un unique point fixe dans E .

Théorème (Convergence dominée) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux. S'il existe une fonction φ continue par morceaux à valeurs réelles positives telle $|f_n| \leq \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Théorème (WEIERSTRASS) Toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynomiales.

20.2 Énoncé

Pour $a < b$ réels, on désigne par $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. On rappelle que les applications :

$$f \mapsto \|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| \text{ et } f \mapsto \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } p \geq 1 \text{ réel}$$

définissent des normes sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$. Pour $p = 2$, la norme $\|\cdot\|_2$ est associée au produit scalaire hermitien $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle_2 = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$.

– I – Questions préliminaires

1. Soit $u \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que si $x_0 \in]a, b[$ est tel que $u(x_0) = \min_{x \in [a, b]} u(x)$, on a alors $u'(x_0) = 0$ et $u''(x_0) \geq 0$.
2. Montrer que si $v \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ est une fonction telle que $0 \leq v(x) \leq \lambda \int_a^x v(t) dt$ pour tout $x \in [a, b]$ où λ est une constante réelle, c'est alors la fonction nulle.
3. Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$, l'application N_{λ} qui associe à toute fonction $v \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ le réel $N_{\lambda}(v) = \sup_{t \in [a, b]} e^{-\lambda(t-a)} |v(t)|$ définit une norme, puis vérifier que $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C}), N_{\lambda})$ est un espace de BANACH.

4. Soient $\varphi \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$, $K \in \mathcal{C}^0([a, b]^2, \mathbb{C})$ et T l'application qui associe à toute fonction $v \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ la fonction $T(v)$ définie sur $[a, b]$ par :

$$T(v)(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x, t) v(t) dt$$

- (a) Montrer que pour toute fonction $v \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$, la fonction $T(v)$ est dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$.
- (b) Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que l'application T soit strictement contractante de $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C}), N_\lambda)$ dans $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C}), N_\lambda)$.
- (c) En déduire que T admet un unique point fixe dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$.

– II – Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire à l'ordre deux

Pour cette partie, on se propose de donner une démonstration du théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants qui nous dit que étant données trois fonctions p, q, r dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ et deux nombres complexes u_a et u'_a , le problème de CAUCHY $u'' = pu' + qu + r$ de conditions initiales $u(a) = u_a$ et $u'(a) = u'_a$ a une unique solution dans $\mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$.

1. Soient p, q, r dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$. Montrer que si $u \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$ est solution du problème de CAUCHY $u'' = pu' + qu$ de conditions initiales $u(a) = u'(a) = 0$, la fonction $|u| + |u'|$ est alors identiquement nulle. En déduire que pour tout $(u_a, u'_a) \in \mathbb{C}^2$, le problème de CAUCHY $u'' = pu' + qu + r$ de conditions initiales $u(a) = u_a$ et $u'(a) = u'_a$ admet au plus une solution dans $\mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$.
 2. Montrer qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$ est solution d'une équation différentielle de la forme $u'' = pu' + qu + r$ où p, q, r sont dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ si, et seulement si, elle est solution d'une équation différentielle de la forme $(\alpha u')' = \beta u - f$ où $\alpha \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C}^*)$ et β, f sont dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$.
 3. On se donne une fonction $\alpha \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C}^*)$, deux fonctions β et f dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ et deux nombres complexes u_a, u'_a . On désigne par γ la primitive sur $[a, b]$ de $\frac{1}{\alpha}$ nulle en a .
 - (a) On suppose que $\beta = 0$. Montrer le problème de CAUCHY $(\alpha u')' = -f$ de conditions initiales $u(a) = u_a$ et $u'(a) = u'_a$ a une unique solution φ dans $\mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$ dont on donnera une expression.
 - (b) Montrer que si $u \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$ est solution du problème de CAUCHY $(\alpha u')' = \beta u - f$ de conditions initiales $u(a) = u_a$ et $u'(a) = u'_a$, on a alors $u(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(\theta, x) u(\theta) d\theta$ pour tout $x \in [a, b]$ où la fonction K est définie sur $[a, b]^2$ par $K(\theta, x) = \beta(\theta)(\gamma(x) - \gamma(\theta))$. La fonction K est le *noyau de GREEN* du problème de CAUCHY.
- On désigne par T l'application qui associe à toute fonction $v \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ la fonction $T(v)$ définie sur $[a, b]$ par :

$$T(v)(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(\theta, x) v(\theta) d\theta$$

Cette fonction T est un opérateur de VOLTERRA.

- (c) Montrer que pour toute fonction $v \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ la fonction $T(v)$ est dans $\mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$ en précisant la dérivée de $\alpha T(v)'$.
- (d) Montrer que l'application T a un unique point fixe u qui est l'unique solution dans $\mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$ du problème de CAUCHY $(\alpha u)' = \beta u - f$ de conditions initiales $u(a) = u_a$ et $u'(a) = u'_a$.

– III – Inégalités de POINCARÉ et de WIRTINGER

On désigne par $\mathcal{C}_a^1$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$ formé des fonctions $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$ telles que $f(a) = 0$.

1. Soient $p \geq 1$ un réel et $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$.

- (a) Montrer que pour tout réel $x \in [a, b]$, on a :

$$|f(x) - f(a)|^p \leq (x - a)^{p-1} \int_a^x |f'(t)|^p dt \quad (20.1)$$

(*inégalité de POINCARÉ*).

- (b) En déduire que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_a^1$, on a :

$$\|f\|_\infty \leq (b - a)^{\frac{p-1}{p}} \|f'\|_p \quad \text{et} \quad \|f\|_p \leq \frac{b - a}{p^{\frac{1}{p}}} \|f'\|_p$$

2. On se donne une fonction $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et on souhaite trouver une constante optimale dans la majoration $\|f\|_2 \leq \gamma \|f'\|_2$ obtenue à la question précédente pour $p = 2$ où $\gamma = \frac{b-a}{\sqrt{2}}$. Pour ce faire, on se ramène à l'intervalle $[0, \pi]$ en utilisant la fonction g définie sur cet intervalle par $g(t) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi}t\right)$. On prolonge cette fonction en une fonction impaire sur $[-\pi, \pi]$, puis en une fonction 2π -périodique sur $\mathbb{R}$. On note h ce prolongement.

- (a) Montrer que la fonction h est 2π -périodique, impaire, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Quel lien a-t-on entre les coefficients de FOURIER de h et ceux de h' .
- (b) En utilisant le théorème de PARSEVAL, montrer que :

$$\int_0^\pi |g(t)|^2 dt \leq \int_0^\pi |g'(t)|^2 dt$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, il existe un réel b_1 tel que l'on ait $g(t) = b_1 \sin(t)$ pour tout $t \in [0, \pi]$ (*inégalité de WIRTINGER*).

- (c) En déduire que $\|f\|_2 \leq \sqrt{\frac{b-a}{\pi}} \|f'\|_2$, l'égalité étant réalisée pour f définie sur $[a, b]$ par $f(x) = \sin\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right)$.

– IV – Structures préhilbertiennes sur $\mathcal{C}_a^1$

On se donne une fonction $\alpha \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+^*)$ continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles strictement positives et une fonction $\beta \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+)$ à valeurs réelles positives ou nulles

1. Montrer que l'application :

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle_{\alpha, \beta} = \int_a^b \left(f(t) \overline{g(t)} \beta(t) + f'(t) \overline{g'(t)} \alpha(t) \right) dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}_a^1$, puis en notant $N_{\alpha, \beta}$ la norme associée, qu'il existe des constantes réelles $\gamma > 0$ et $\delta > 0$ telles pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_a^1$, on a $\|f\|_\infty \leq \gamma N_{\alpha, \beta}(f)$ et $\|f\|_2 \leq \delta N_{\alpha, \beta}(f)$.

2. Montrer que toute suite de CAUCHY dans $(\mathcal{C}_a^1, N_{\alpha, \beta})$ est uniformément convergente.
3. Montrer que les normes $N_{\alpha, \beta}$ pour $\alpha \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+^*)$ et $\beta \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+)$, sont toutes équivalentes sur $\mathcal{C}_a^1$.
4. Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par f_n la primitive sur $[0, 1]$ nulle en 0 de la fonction g_n qui est nulle sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, affine sur $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right]$, vaut 1 sur $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right]$ et est continue en $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 2}$ est de CAUCHY dans $(\mathcal{H}_{0,1}^1, N_{1,0})$, mais non convergente dans cet espace normé. En déduire que pour tous réels $a < b$, les espaces normés $(\mathcal{C}_a^1, N_{\alpha, \beta})$ pour $\alpha \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+^*)$ et $\beta \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+)$ ne sont pas complets.

– V – Problème de STURM-LIOUVILLE

Pour $a < b$ réels et $k \in \{1, 2\}$, on désigne par $\mathcal{H}_{a,b}^k$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_a^1$ formé des fonctions $v \in \mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{C})$ qui s'annulent en a et b et on s'intéresse au *problème de STURM-LIOUVILLE* qui consiste à déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathcal{H}_{a,b}^2$ de l'équation différentielle $(\alpha u')' = \beta u - f$ où les fonctions $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$, $\alpha \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}_+^*)$ à valeurs réelles strictement positives et $\beta \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+)$ à valeurs réelles positives ou nulles sont données, ce qui revient à étudier le *problème aux limites* :

$$(\alpha u')' = \beta u - f \text{ sur } [a, b] \text{ et } u(a) = u(b) = 0 \quad (20.2)$$

1. Montrer que :

- (a) l'équation différentielle $(\alpha u')' = \beta u$ de conditions aux limites $u(a) = 0$ et $u(b) = 0$ admet une unique solution dans $\mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$;
- (b) pour tout $(u_a, u_b) \in \mathbb{C}^2$, l'équation différentielle $(\alpha u')' = \beta u$ avec les conditions aux limites $u(a) = u_a$ et $u(b) = u_b$ admet une unique solution dans $\mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$;

- (c) pour tout $(u_a, u_b) \in \mathbb{C}^2$, l'équation différentielle $(\alpha u')' = \beta u - f$ avec les conditions aux limites $u(a) = u_a$ et $u(b) = u_b$ admet une unique solution dans $\mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$. En particulier, le problème aux limites (20.2) admet une unique solution dans $\mathcal{H}_{a,b}^2$.
2. Pour tout réel μ , on note u_μ la solution dans $\mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$ du problème de CAUCHY $(\alpha u')' = \beta u - f$, $u(a) = 0$ et $u'(a) = \mu$ (question **II.3d**).
- (a) Montrer que l'application $\mu \mapsto u_\mu(b)$ est affine, puis en déduire qu'il existe une unique valeur $\mu_0 \in \mathbb{R}$ telle que $u_{\mu_0}(b) = 0$ (on peut utiliser **V.1a**).
- (b) Retrouver ainsi le fait que le problème aux limites (20.2) admet une unique solution dans $\mathcal{H}_{a,b}^2$.
3. On se propose de montrer que l'espace $\mathcal{H}_{a,b}^1$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$.
- (a) Préciser la fonction polynomiale ψ de degré 3 telle que $\psi(0) = 1$, $\psi(1) = 0$, $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$.
- (b) Vérifier que pour tout réel $\delta \in \left]0, \frac{b-a}{2}\right[$, la fonction ψ_δ définie sur $[a, b]$ par :
- $$\psi_\delta(t) = \begin{cases} \psi\left(\frac{t-a}{\delta}\right) & \text{pour } a \leq t \leq a+\delta \\ 0 & \text{pour } a+\delta \leq t \leq b-\delta \\ \psi\left(\frac{b-t}{\delta}\right) & \text{pour } b-\delta \leq t \leq b \end{cases}$$
- est de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\psi_\delta(a) = \psi_\delta(b) = \psi(0) = 1$ et $0 \leq \psi_\delta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [a, b]$.
- (c) En utilisant le théorème d'approximation polynomiale de WEIERSTRASS, montrer que pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $v \in \mathcal{H}_{a,b}^1$ telle que $\|u - v\|_2 < \varepsilon$.
4. Que dire de l'orthogonal de $\mathcal{H}_{a,b}^1$ dans $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C}), \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$?
5. Montrer que $u \in \mathcal{H}_{a,b}^2$ est solution de (20.2) si, et seulement si, elle est telle que $\langle u, v \rangle_{\alpha, \beta} = \langle f, v \rangle_2$ pour toute fonction $v \in \mathcal{H}_{a,b}^1$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\alpha, \beta}$ est le produit scalaire défini en question **IV.1** (formulation variationnelle du problème de STURM-LIOUVILLE).
6. On définit la fonctionnelle $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{H}_{a,b}^1$ par $\mathcal{J}(v) = \frac{N_{\alpha, \beta}^2(v)}{2} - \operatorname{Re} \langle f, v \rangle_2$ où $N_{\alpha, \beta}$ est la norme définie en question **IV.1**.
- (a) Calculer $\mathcal{J}(u + w)$ pour tous u, w dans $\mathcal{H}_{a,b}^1$.
- (b) Montrer que si $u \in \mathcal{H}_{a,b}^2$ est une solution du problème (20.2), on a alors $\mathcal{J}(u) = \min_{v \in \mathcal{H}_{a,b}^1} \mathcal{J}(v)$.
- (c) Soient u, w dans $\mathcal{H}_{a,b}^1$. Calculer la dérivée en 0 de la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(t) = \mathcal{J}(u + tw)$.
- (d) Montrer que $u \in \mathcal{H}_{a,b}^2$ est solution de (20.2) si, et seulement si, elle est solution du problème de minimisation $\mathcal{J}(u) = \min_{v \in \mathcal{H}_{a,b}^1} \mathcal{J}(v)$.

7. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite uniformément bornée de fonctions dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ qui converge simplement sur $[a, b]$ vers la fonction f .
- (a) Montrer que pour tout réel $p \geq 1$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$.
- (b) En désignant pour tout $n \in \mathbb{N}$, par u_n et u les solutions dans $\mathcal{H}_{a,b}^2$ du problème (20.2) respectivement associées aux fonctions f_n et f , montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\alpha, \beta}(u - u_n) = 0$ et que la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers u sur $[a, b]$.
8. On suppose que la fonction f est à valeurs réelles et on désigne par $u \in \mathcal{H}_{a,b}^2$ la solution de (20.2).
- (a) Montrer que la fonction $u \in \mathcal{H}_{a,b}^2$ est à valeurs réelles.
- (b) Dans le cas où la fonction f est à valeurs réelles strictement positives, montrer que pour tout $x \in]a, b[$, on a $u(x) > 0$.
- (c) Dans le cas où la fonction f est à valeurs réelles positives, montrer qu'il en est de même de la fonction u .
9. Pour cette question, on prend $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, c'est-à-dire qu'on s'intéresse à l'équation différentielle $u'' = -f$ sur $[a, b]$ avec les conditions aux limites $u(a) = u(b) = 0$.
- (a) Montrer que la fonction u définie sur $[a, b]$ par :

$$u(x) = \frac{x-a}{b-a} \int_a^b (b-t) f(t) dt - \int_a^x (x-t) f(t) dt$$

est la solution dans $\mathcal{H}_{a,b}^2$ de l'équation différentielle $u'' = -f$, puis que cette fonction s'écrit aussi sous la forme $u(x) = \int_a^b K(x, t) f(t) \frac{dt}{b-a}$ où K est une fonction continue à valeurs réelles positive sur $[a, b]^2$ telle que $K(x, t) = K(t, x)$ pour tout $(x, t) \in [a, b]^2$.

Pour la suite de cette question, on se place sur $[0, \pi]$.

- (b) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la solution $u_k \in \mathcal{H}_{0,\pi}^2$ de l'équation différentielle $u''(x) = -\sin(kx)$.
- (c) En supposant que la fonction $f \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{C})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux telle que $f(0) = f(\pi) = 0$, justifier l'existence d'une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres complexes telle que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$ pour tout $x \in [0, \pi]$, la convergence étant uniforme. En déduire une expression de la solution dans $\mathcal{H}_{0,\pi}^2$ de l'équation différentielle $u'' = -f$.

– VI – Opérateur de STURM-LIOUVILLE

On se donne deux fonctions $\alpha \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}_+^*)$, $\beta \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+)$ et on désigne par $\mathcal{L} : \mathcal{H}_{a,b}^2 \longrightarrow \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ l'opérateur linéaire défini par $\mathcal{L}(v) = -(\alpha v')' + \beta v$.

Avec la question **V.1c** nous avons vu que $\mathcal{L}$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{H}_{a,b}^2$ sur $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$. On note $\mathcal{F} : \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}_{a,b}^2$ l'inverse de l'opérateur $\mathcal{L}$.

On dit (de manière abusive) que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de $\mathcal{L}$ s'il existe une fonction $u \in \mathcal{H}_{a,b}^2 \setminus \{0\}$ telle que $\mathcal{L}(u) = \lambda u$. Une telle fonction u est dite fonction propre associée à λ et l'ensemble de ces fonctions propres est l'espace propre associé à λ . C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}_{a,b}^2$.

1. Soient u_1 la solution sur $[a,b]$ de l'équation différentielle $-(\alpha u')' + \beta u = 0$ avec les conditions $u_1(a) = 0$ et $u_1'(a) = 1$ et u_2 la solution de cette équation différentielle avec les conditions $u_2(b) = 0$ et $u_2'(b) = 1$. Vérifier que (u_1, u_2) est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ des solutions sur $[a,b]$ de $-(\alpha u')' + \beta u = 0$, puis en notant $w = u_1 u_2' - u_1' u_2$ le wronskien de (u_1, u_2) que la fonction αw est constante non nulle.
2. En utilisant la méthode de variation des constantes montrer que l'inverse $\mathcal{F}$ de l'opérateur $\mathcal{L}$ est défini par $\mathcal{F}(f)(x) = \int_a^b K(x,t) f(t) dt$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$ et tout réel $x \in [a,b]$, où la fonction $K \in \mathcal{C}^0([a,b]^2, \mathbb{R})$ est définie par :

$$K(x,t) = \frac{1}{\alpha(a)u_2(a)} \begin{cases} u_1(t)u_2(x) & \text{si } a \leq t \leq x \leq b \\ u_1(x)u_2(t) & \text{si } a \leq x \leq t \leq b \end{cases}$$

Cette fonction K est la *fonction de GREEN* du problème de STURM-LIOUVILLE et l'opérateur $\mathcal{F}$ est un *opérateur de FREDHOLM*.

3. Montrer que l'opérateur $\mathcal{F}$ est continu de $(\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathcal{H}_{a,b}^2, \|\cdot\|_\infty)$.
4. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$, on a $\langle f, \mathcal{F}(f) \rangle_2 = N_{\alpha,\beta}^2(\mathcal{F}(f))$.
En déduire que l'opérateur $\mathcal{F}$ est continu de $(\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ dans $(\mathcal{H}_{a,b}^2, \|\cdot\|_2)$.
5. Montrer que l'opérateur $\mathcal{F}$ est auto-adjoint défini positif.
6. Pour cette question, on se place sur $[a,b] = [0,\pi]$ et on prend $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, c'est-à-dire qu'on s'intéresse à l'opérateur $\mathcal{L} : v \mapsto -v''$. Déterminer les valeurs propres réelles de $\mathcal{L}$.
7. Montrer que pour toutes fonctions u, v dans $\mathcal{H}_{a,b}^2$, on a $\langle (\alpha u')', v \rangle_2 = -\langle \alpha u', v' \rangle_2$.
En déduire que l'opérateur $\mathcal{L}$ est auto-adjoint défini positif, c'est-à-dire que pour toutes fonctions u, v dans $\mathcal{H}_{a,b}^2$, on a $\langle \mathcal{L}(u), v \rangle_2 = \langle u, \mathcal{L}(v) \rangle_2$ et $\langle \mathcal{L}(u), u \rangle_2 > 0$ pour $u \neq 0$, puis que ses éventuelles valeurs propres sont réelles strictement positives et que les espaces propres associés sont deux à deux orthogonaux dans l'espace $(\mathcal{H}_{a,b}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$.
8. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ une valeur propre de $\mathcal{L}$. Montrer que $\lambda > \beta_0 = \inf_{x \in [a,b]} \beta(x)$ et que l'espace propre associé à λ est de dimension égale à 1.



PROBLÈME 21

Opérateurs compacts

21.1 Rappels de cours

Théorème Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E est de dimension finie ;
2. toutes les normes sur E sont équivalentes ;
3. quelle que soit la norme choisie sur E toute forme linéaire définie sur $(E, \|\cdot\|)$ est continue ;
4. quelle que soit la norme choisie sur E , la boule unité de E pour cette norme est compacte ;
5. quelle que soit la norme choisie sur E , les compacts de E sont les fermés bornés.

L'équivalence entre (1) et (5) est le théorème de RIESZ.

Pour ce qui suit, E est un espace normé réel ou complexe.

Une partie K de E est *compacte*, si de toute suite de points de K , on peut extraire une sous-suite qui converge dans K .

Une partie K de E est *précompacte*, si pour tout réel $r > 0$, elle peut être recouverte par un nombre fini de boules ouvertes de rayon r .

Théorème Soit K une partie non vide d'un espace de BANACH. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- K est compact ;
- de tout recouvrement ouvert de K , on peut extraire un sous-recouvrement fini ;
- K est précompact et complet.

Théorème Si E est un espace vectoriel normé et F un espace de BANACH, l'espace $(\mathcal{L}_c(E, F), \|\cdot\|)$ des applications linéaires continues de E dans F muni de la norme définie par $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ est de BANACH.

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'ensemble $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ des suites complexes $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum x_n^p$ soit absolument convergente est un espace vectoriel, l'application $x \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et $(\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_p)$ est un espace de BANACH.

Un *produit scalaire* sur un espace vectoriel E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) telle que :

- pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est une forme linéaire ;
- pour tous x, y dans E , on a $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$;
- pour tout $x \in E$, on a $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_+$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, $x = 0$.

Un *espace préhilbertien* est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Sur un tel espace, on dispose des inégalités de CAUCHY-SCHWARZ et de MINKOWSKI desquelles on déduit que l'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ définit une norme sur E . Dans le cas où E muni de cette norme est complet, on dit que c'est un espace de HILBERT.

On dit que deux vecteurs x, y dans E sont *orthogonaux* s'ils sont tels que $\langle x, y \rangle = 0$. L'*orthogonal* d'une partie non vide Y de E est l'ensemble $Y^\perp = \{x \in E, \forall y \in Y, \langle x, y \rangle = 0\}$.

On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est une *famille orthogonale* si elle est telle que $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour tous $i \neq j$ dans I . Si de plus on a $\|e_i\| = 1$ pour tout $i \in I$, on dit alors que cette famille est *orthonormée* ou *orthonormale*.

Théorème (Inégalité de BESSEL) Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite orthonormée dans E de dimension infinie. Pour tout $x \in E$, la série $\sum |\langle x, e_n \rangle|^2$ est convergente et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$, ce qui revient aussi à dire que x est dans l'adhérence de $F = \text{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$. En particulier l'égalité est réalisée pour tout $x \in E$ si, et seulement si, F est dense dans E .

Théorème (Projection orthogonale) Soit F un sous espace vectoriel fermé dans un espace de Hilbert E .

- Pour tout $x \in E$, il existe $p_F(x) \in F$ unique tel que $\|x - p_F(x)\| = d(x, F)$. Ce vecteur est également l'unique élément de F tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$.
- $E = F \oplus F^\perp$ et l'application $x \mapsto p_F(x)$ est linéaire continue, sa norme d'opérateur étant égale à 1. Son image est F et son noyau est $F^\perp$.
- $F = (F^\perp)^\perp$.

Pour ce qui suit, E est un espace de HILBERT.

Théorème (Représentation de RIESZ) Une forme linéaire ℓ sur E est continue si, et seulement si, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\ell(x) = \langle x, a \rangle$ pour tout $x \in E$ et dans ce cas, on a $\|\ell\| = \|a\|$.

Du théorème précédent, on déduit que pour toute application linéaire continue $u : E \rightarrow E$, il existe une unique application linéaire continue $u^* : E \rightarrow E$ telle que $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$ pour

tous x, y dans E . De plus, on a $\|u^*\| = \|u\|$. L'application linéaire ainsi définie est l'*adjoint* de u .

21.2 Énoncé

Pour tout couple $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$ d'espaces vectoriels normés réels ou complexes, on note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F et cet espace est muni de la norme classiquement définie par :

$$\|u\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

Dans le cas particulier où $F = E$, on note plus simplement $\mathcal{L}_c(E)$ pour $\mathcal{L}_c(E, E)$ et $\text{GL}_c(E)$ désigne le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{L}_c(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes $u : E \rightarrow E$ qui sont continus et d'inverses continus.

On note $\overline{B}(0, 1) = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé réel ou complexe $(E, \|\cdot\|)$.

Pour $a < b$ réels, on désigne par $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$.

– I – Résultats préliminaires

1. Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Pour toute forme linéaire $\ell : E \rightarrow \mathbb{K}$ et tout vecteur $y \in E$, on note $\ell \otimes y$ l'endomorphisme de E défini par $(\ell \otimes y)(x) = \ell(x)y$.

- (a) Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est de rang 1 si, et seulement si, il existe un vecteur $y \in E \setminus \{0\}$ et une forme linéaire non nulle ℓ tels que $u = \ell \otimes y$.
- (b) Si $(\ell_k)_{1 \leq k \leq r}$ est une famille libre de $r \geq 2$ formes linéaires sur E , justifier l'existence d'une famille $(e_k)_{1 \leq k \leq r}$ de vecteurs dans E tel que $\ell_k(e_k) = 1$ et $\ell_j(e_k) = 0$ pour $j \neq k$.
- (c) Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est de rang $r \geq 1$ si, et seulement si, il existe une famille libre $(y_k)_{1 \leq k \leq r}$ de vecteurs dans E et une famille

libre $(\ell_k)_{1 \leq k \leq r}$ de formes linéaires sur E telles que $u = \sum_{k=1}^r \ell_k \otimes y_k$.

2. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de HILBERT réel ou complexe de norme associée $\|\cdot\|$

- (a) Montrer qu'une forme linéaire ℓ sur E est continue si, et seulement si, il existe un unique vecteur $\alpha \in E$ tel que $\ell(x) = \langle x, \alpha \rangle$ pour tout $x \in E$ et dans ce cas, on a $\|\ell\| = \|\alpha\|$.
- (b) Montrer que pour toute application linéaire continue $u \in \mathcal{L}_c(E)$, il existe une unique application linéaire continue $u^* \in \mathcal{L}_c(E)$ telle que l'on ait $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$ pour tous x, y dans E . Vérifier que $\|u^*\| = \|u\|$. L'application linéaire est l'*adjoint* de u .

- (c) Montrer qu'une application linéaire continue $u \in \mathcal{L}_c(E)$ est de rang $r \geq 1$ si, et seulement si, il existe deux familles libres de vecteurs $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq r}$ et $(y_k)_{1 \leq k \leq r}$ dans E telles que $u(x) = \sum_{k=1}^r \langle x, \alpha_k \rangle y_k$ pour tout $x \in E$. Que dire de u^* ?

3. Avec cette question, on vérifie que le résultat de la question **I.2a** n'est pas valable pour un espace préhilbertien non complet. Pour ce faire, on se place sur l'espace préhilbertien réel $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$.

- (a) Montrer que pour $a \in]0, 1[$ et $p \in \mathbb{R}_+$ l'application $\ell : f \mapsto \int_0^a f(t) t^p dt$ est une forme linéaire continue et préciser sa norme.
- (b) Montrer qu'il n'est pas possible de trouver une fonction $\alpha \in E$ telle que $\ell(f) = \langle f, \alpha \rangle$ pour toute fonction $f \in E$. Il en résulte que E n'est pas complet, ce qui peut aussi se montrer directement.

– II – Théorème de WEIERSTRASS à deux variables

On se propose de donner une démonstration du théorème de STONE-WEIERSTRASS dans le cas particulier des fonctions de deux variables qui nous dit que *toute fonction continue sur un rectangle $[a, b] \times [c, d]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales*.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier k compris entre 0 et n , on désigne par $B_{n,k}$ la fonction polynomiale définie sur $[0, 1]$ par $B_{n,k}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ et à toutes fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{C}^0([0, 1]^2, \mathbb{C})$, on associe les suites $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n(g))_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions polynomiales de BERNSTEIN respectivement définies sur $[0, 1]$ et $[0, 1]^2$ par :

$$B_n(f)(t) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(t), \quad \beta_n(g)(x, y) = \sum_{0 \leq j, k \leq n} g\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) B_{n,j}(x) B_{n,k}(y)$$

On désigne pour tout $k \in \mathbb{N}$ par e_k la fonction polynomiale définie sur $[0, 1]$ par $e_k(t) = t^k$.

1. Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$B_n(e_1 f)(t) = \frac{t(1-t)}{n} B_n(f)'(t) + t B_n(f)(t)$$

2. Calculer $B_n(e_k)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, 1, 2\}$.
3. En notant 1 la fonction constante égale à 1 sur $[0, 1]^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\beta_n(1) = 1$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$\sum_{k=0}^n \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(t) = \frac{t(1-t)}{n}$$

En déduire que pour tout réel $\eta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, on a :

$$\sum_{\|(x - \frac{j}{n}, y - \frac{k}{n})\|_\infty \geq \eta} B_{n,j}(x) B_{n,k}(y) \leq \frac{1}{2n\eta^2}$$

5. Montrer que la suite de fonctions polynomiales $(\beta_n(g))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $[0, 1]^2$.
6. En déduire que pour tous réels $a < b$ et $c < d$, toute fonction continue sur $[a, b] \times [c, d]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

– III – Opérateurs compacts

On appelle *opérateur compact* toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ (*a priori* non supposée continue) telle que $u(\overline{B}(0, 1))$ soit relativement compacte dans F (c'est-à-dire d'adhérence compacte). On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F . Pour $F = E$, on note $\mathcal{K}(E)$ cet ensemble.

1. Montrer que tout opérateur linéaire compact $u \in \mathcal{K}(E, F)$ est continu.
2. Montrer que :
 - (a) dans le cas où E est de dimension finie, on a $\mathcal{K}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$;
 - (b) un opérateur linéaire continu $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ qui est de rang fini (*i. e.* tel que $\dim(\text{Im}(u)) < +\infty$) est compact ;
 - (c) pour $F = E$, Id_E est compact si, et seulement si, E est de dimension finie.
3. Un opérateur linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini est-il compact ?
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ un opérateur linéaire. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (a) u est compact ;
 - (b) $u(\overline{B}(0, 1))$ est contenue dans un compact ;
 - (c) pour toute partie bornée B de E , $u(B)$ est relativement compacte ;
 - (d) pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée dans E , on peut extraire de la suite $(u(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge dans F .
5. Montrer que :
 - (a) $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_c(E, F)$;
 - (b) dans le cas où $F = E$, $\mathcal{K}(E)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}_c(E)$;
 - (c) dans le cas où F est complet, $\mathcal{K}(E, F)$ est fermé dans $(\mathcal{L}_c(E, F), \|\cdot\|)$ et donc complet ;

- (d) dans le cas où F est complet, tout $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ qui est limite dans $(\mathcal{L}_c(E, F), \|\cdot\|)$ d'une suite d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact.
6. À quelle condition nécessaire et suffisante, un automorphisme $u \in \text{GL}_c(E)$ est-il compact ?
7. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ des suites complexes bornées. Montrer que l'application linéaire u qui associe à toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ la suite $(a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est continue de $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ dans $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, puis que c'est un opérateur compact si, et seulement si, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
8. Pour $a < b$ réels donnés, $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ est l'espace de BANACH des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(a) Montrer que pour toute fonction polynomiale $P : (x, t) \mapsto \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 0 \leq k \leq m}} a_{j,k} t^j x^k$

où $(a_{i,j})_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 0 \leq k \leq m}}$ est une suite de nombres complexes, l'application linéaire sur E qui associe à toute fonction $f \in E$ la fonction $u_P(f)$ définie sur $[a, b]$ par $u_P(f)(x) = \int_a^b P(x, t) f(t) dt$ est compacte.

(b) Montrer que pour toute fonction $K \in \mathcal{C}^0([a, b]^2, \mathbb{C})$, l'application linéaire sur E qui associe à toute fonction $f \in E$ la fonction $u_K(f)$ définie sur $[a, b]$ par $u_K(f)(x) = \int_a^b K(x, t) f(t) dt$ est compacte.

– IV – Convergence faible sur un espace de HILBERT

Pour cette partie, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel ou complexe de norme associée $\|\cdot\|$.

On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E converge faiblement vers x dans E , si pour tout $y \in E$, la suite $(\langle x_n, y \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\langle x, y \rangle$.

- Montrer que la limite d'une suite faiblement convergente dans E , si elle existe, est unique.
- Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans E si, et seulement si, elle converge faiblement vers x et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \|x\|$.
- Montrer que la convergence faible sur E est équivalente à la convergence si, et seulement si, E est de dimension finie.

Pour les questions suivantes de cette partie, exceptée la question **III.3**, E est un espace de HILBERT.

- Montrer que pour tout endomorphisme continu $u \in \mathcal{L}_c(E)$ et toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E faiblement convergente vers $x \in E$, la suite $(u(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $u(x)$.

5. Avec cette question, on se propose de montrer que, sur un espace de HILBERT, toute suite faiblement convergente est bornée.

Pour ce faire, on se donne tout d'abord une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge faiblement vers 0 dans E et on suppose qu'elle n'est pas bornée.

- (a) Étant donnés deux réels $b > a > 2$, justifier l'existence d'une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\|x_{\varphi(n)}\| \geq b^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $|\langle x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(j)} \rangle| \leq 1$ pour tout entier j compris entre 0 et $n-1$. En lui associant la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $y_n = \frac{1}{\|x_{\varphi(n)}\|} x_{\varphi(n)}$, vérifier que la

série $\sum \frac{1}{a^{n-1}} y_n$ est normalement convergente. On note $y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{n-1}} y_n$ sa somme.

- (b) Montrer pour tout entier $n \geq 2$, on a $|\langle x_{\varphi(n)}, y \rangle| \geq \frac{a-2}{a-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} - \frac{a}{a-1}$ et conclure. On peut utiliser le découpage en trois de la somme :

$$\langle x_{\varphi(n)}, y \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle x_{\varphi(n)}, y_k \rangle}{a^{k-1}} + \frac{\langle x_{\varphi(n)}, y_n \rangle}{a^{n-1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\langle x_{\varphi(n)}, y_k \rangle}{a^{k-1}}$$

- (c) Montrer que toute suite faiblement convergente dans E est bornée.

6. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers x dans E et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers y dans E . Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle$.
7. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite faiblement convergente vers 0.

- (a) Dans le cas où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est formée de vecteurs deux à deux orthogonaux, montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses moyennes de CESARO converge vers 0.

- (b) Justifier l'existence d'une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $|\langle x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(j)} \rangle| \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier j compris entre 0 et $n-1$.

- (c) Montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_{\varphi(k)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ des moyennes de CESARO de $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 (théorème de BANACH-SAKS).

- (d) Que dire si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers x ?

8. Soit D une partie dense d'un espace de HILBERT E . Montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée d'éléments de E telle que pour tout $y \in D$, la suite $(\langle y, x_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors faiblement convergente.
9. Montrer que de toute suite bornée d'éléments de E on peut extraire une sous-suite faiblement convergente. On pourra supposer dans un premier temps que E est séparable (*i. e.* qu'il existe dans E une partie dense dénombrable) et utiliser le procédé diagonal de CANTOR.

10. Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ faiblement convergente vers un vecteur $x \in E$ et formée de vecteurs unitaires telle que $\|u\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u(x_n)\|$.

(b) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|^2 = 1 - \|x\|^2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u(x_n) - u(x)\|^2 = \|u\|^2 - \|u(x)\|^2$$

(c) En déduire que $\|u(x)\| = \|u\| \|x\|$. Que dire si $x \neq 0$?

– V – Opérateurs compacts sur un espace de HILBERT

E est un espace de HILBERT réel ou complexe.

1. Montrer qu'un endomorphisme continu $u \in \mathcal{L}_c(E)$ est compact si, et seulement si, il est limite dans $(\mathcal{L}_c(E), \|\cdot\|)$ d'une suite d'opérateurs de rang fini. On pourra justifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence d'une suite $(x_{n,k})_{1 \leq k \leq r_n}$ de points dans E telle que $u(\overline{B}(0,1)) \subset \bigcup_{k=1}^{r_n} B\left(x_{n,k}, \frac{1}{n}\right)$ et utiliser les projections orthogonales de E sur $\text{Vect}\{x_{n,1}, \dots, x_{n,r_n}\}$.
2. Soit $\mathcal{I}$ un idéal bilatère de $(\mathcal{L}_c(E), \|\cdot\|)$ fermé et non réduit à $\{0\}$. Montrer que $\mathcal{I}$ contient $\mathcal{K}(E)$. L'idéal $\mathcal{K}(E)$ est donc le plus petit idéal fermé non réduit à $\{0\}$ de $\mathcal{L}_c(E)$.
3. Soit $u \in \mathcal{K}(E)$. Montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de E qui converge faiblement vers x dans E , la suite $(u(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors vers $u(x)$. Réciproquement, montrer que si $u \in \mathcal{L}_c(E)$ est tel que pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E faiblement convergente vers x dans E , la suite $(u(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $u(x)$, on a alors $u \in \mathcal{K}(E)$. Donc, un opérateur continu sur un espace de HILBERT est compact si, et seulement si, il transforme toute suite faiblement convergente en suite convergente.
4. Montrer qu'un opérateur linéaire continu $u \in \mathcal{L}_c(E)$ est compact si, et seulement si, son adjoint u^* est compact (théorème de SCHAUDER).

