

Transformation de Laplace

1 Énoncé

Un nombre complexe sera noté $z = x + iy$, où $x = \Re(z)$ est la partie réelle de z et $y = \Im(z)$ sa partie imaginaire.

Pour tout réel σ , on désigne par P_σ [resp. $\overline{P_\sigma}$] le demi-plan ouvert [resp. fermé] défini par :

$$P_\sigma = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \sigma\} \quad [\text{resp. } \overline{P_\sigma} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq \sigma\}]$$

On note également $P_{+\infty} = \emptyset$ et $P_{-\infty} = \mathbb{C}$.

On désigne par \mathcal{C} l'espace vectoriel des fonctions continues de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{C} .

Soient $f \in \mathcal{C}$ et $z \in \mathbb{C}$. On dit que $\mathcal{L}(f)(z)$ est défini si l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$ est convergente et dans ce cas, on note $\mathcal{L}(f)(z)$ la valeur de cette intégrale.

L'application $\mathcal{L}(f)$, quand elle est définie, est la transformée de Laplace de f .

On note $\mathcal{DL}(f)$ le domaine de définition de $\mathcal{L}(f)$ pour $f \in \mathcal{C}$.

– I – Quelques exemples

Déterminer le domaine de définition $\mathcal{DL}(f)$ de $\mathcal{L}(f)$ et préciser les valeurs de $\mathcal{L}(f)(z)$ pour tout $z \in \mathcal{DL}(f)$ dans les cas suivants.

1. f est la fonction constante égale à 1 sur \mathbb{R}^+ .

2. f est la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) = e^{\lambda t}$$

où λ est un nombre complexe donné.

3. f est la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) = t^n$$

où n est un entier naturel donné.

4. f est la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) = e^{\lambda t} t^n$$

où λ est un nombre complexe et n un entier naturel donnés.

5. f est la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) = t^n \cos(\omega t) \quad [\text{resp. } f(t) = t^n \sin(\omega t)]$$

où ω un nombre réel, n un entier naturel donnés. Préciser ces fonctions pour $n = 0$ et $n = 1$.

– II – Abscisse de convergence. Continuité de $\mathcal{L}(f)$. Injectivité de \mathcal{L}

Soit $f \in \mathcal{C}$.

1.

(a) On suppose que $\mathcal{L}(f)$ est définie en un point $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ et on désigne par F_0 la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, F_0(t) = \int_0^t e^{-z_0 u} f(u) du$$

Montrer que pour tout $z \in P_{x_0}$, $\mathcal{L}(f)(z)$ est défini et que :

$$\mathcal{L}(f)(z) = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F_0(t) dt$$

(b) On désigne par $E(f)$ la partie de \mathbb{R} définie par :

$$E(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt \text{ est convergente} \right\}$$

- i. Montrer que si $E(f) = \emptyset$, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$ est divergente pour tout $z \in \mathbb{C}$. On note, dans ce cas, $\sigma(f) = +\infty$. Donner un exemple de telle situation.
- ii. Montrer que si $E(f)$ est non vide et non minoré, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est alors définie sur tout \mathbb{C} . On note alors $\sigma(f) = -\infty$. Donner un exemple de telle situation.
- iii. Montrer que si $E(f)$ est non vide et minoré, il existe alors un réel $\sigma(f)$ tel que :

$$\begin{cases} \text{si } \Re(z) > \sigma(f) \text{ alors } \mathcal{L}(f)(z) \text{ est défini} \\ \text{si } \Re(z) < \sigma(f) \text{ alors } \mathcal{L}(f)(z) \text{ n'est pas défini} \end{cases}$$

Avec les notations de la question précédente, on dit que $\sigma(f)$ est l'abscisse de convergence de la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ et on a :

$$P_{\sigma(f)} \subset \mathcal{DL}(f) \subset \overline{P_{\sigma(f)}}$$

Pour la suite, on suppose que $f \in \mathcal{C}$ est telle que $\sigma(f) < +\infty$.

Nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant. Si pour $\sigma_0 > \sigma(f)$, on désigne par F_0 la primitive nulle en 0 de la fonction $t \mapsto e^{-\sigma_0 t} f(t)$, soit :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, F_0(t) = \int_0^t e^{-\sigma_0 u} f(u) du \tag{1}$$

on a alors :

$$\forall z \in P_{\sigma_0}, \mathcal{L}(f)(z) = (z - \sigma_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-\sigma_0)t} F_0(t) dt$$

De plus F_0 est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ et avec $\lim_{T \rightarrow +\infty} F_0(T) = \mathcal{L}(f)(\sigma_0)$, on déduit que cette fonction est bornée. On note alors :

$$M_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |F_0(t)|$$

2. Montrer que si f est à valeurs réelles positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$ est alors absolument convergente pour tout $z \in P_{\sigma(f)}$.
3. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe bornée.
 - (a) Montrer que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$ et que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini. On note respectivement $\varphi(z)$ et $f(z)$ les sommes de ces séries entières.
 - (b) On note encore f la restriction de f à \mathbb{R}^+ . Montrer que $\sigma(f) \leq 1$.
 - (c) Montrer que :

$$\forall z \in P_1, \mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z} \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$$

4. En utilisant la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie sur \mathbb{C} par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, \varphi_n(z) = \int_0^n e^{-zt} f(t) dt$$

montrer que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $P_{\sigma(f)}$.

5. Donner une deuxième démonstration de la continuité de $\mathcal{L}(f)$ sur $P_{\sigma(f)}$.

6. On se donne un réel $\sigma_0 > \sigma(f)$ et F_0 est la fonction définie par (1).

(a) Montrer que, pour tout $z \in P_{\sigma_0}$ et tout entier naturel k , l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(z-\sigma_0)t} t^k F_0(t) dt$$

est absolument convergente.

(b) En déduire que, pour tout $z \in P_{\sigma(f)}$ et tout entier naturel k , l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} t^k f(t) dt$$

est convergente. On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sigma(t^k f) \leq \sigma(f)$$

7. Montrer que, si φ est une fonction continue sur un intervalle réel fermé borné $[a, b]$ à valeurs complexes telle que $\int_a^b \varphi(t) t^n dt = 0$ pour tout entier naturel n , elle est alors identiquement nulle (théorème des moments de Hausdorff).

8. En utilisant les transformées de Laplace des fonctions $t \mapsto t^n$, vérifier que le résultat de la question précédente n'est pas valable sur $]0, +\infty[$.

9. On suppose qu'il existe un réel $\sigma_0 > \sigma(f)$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{L}(f)(\sigma_0 + n) = 0$$

(a) Montrer que la fonction φ définie sur $]0, 1]$ par :

$$\varphi(t) = F_0(-\ln(t))$$

se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$.

(b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n \varphi(t) dt = 0$$

et en déduire que f est la fonction identiquement nulle.

10. Montrer que si $\mathcal{L}(f)(z) = 0$ pour tout $z \in P_{\sigma(f)}$, f est alors la fonction identiquement nulle.

11. On suppose que f est de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R}^+ avec $n \geq 1$ et que :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \sigma(f^{(k)}) < +\infty$$

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \forall z \in P_{\sigma(f^{(k)})}, \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-zt} f^{(k)}(t) = 0$$

Montrer que :

$$\forall z \in \bigcap_{k=0}^n P_{\sigma(f^{(k)})}, \mathcal{L}(f^{(n)})(z) = z^n \mathcal{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} f^{(k)}(0)$$

– III – Étude de la restriction de $\mathcal{L}(f)$ à l'intervalle réel $]\sigma(f), +\infty[$

On s'intéresse ici à la restriction de la fonction $\mathcal{L}(f)$ à l'intervalle $]\sigma(f), +\infty[$. On note encore $\mathcal{L}(f)$ cette restriction.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$. On a donc $\mathcal{L}(f)(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{f(0)}{x}$ si $f(0) \neq 0$ et $\mathcal{L}(f)(x) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$ si $f(0) = 0$.
3. On suppose, pour cette question, que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell$.
 - (a) Montrer que $\sigma(f) \leq 0$.
 - (b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.
4. Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]\sigma(f), +\infty[$ avec :

$$\forall x \in]\sigma(f), +\infty[, \mathcal{L}(f)'(x) = -\mathcal{L}(tf)(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} t f(t) dt$$

5. En déduire que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]\sigma(f), +\infty[$ avec $\mathcal{L}(f)^{(k)} = (-1)^k \mathcal{L}(t^k f)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que si $f \in \mathcal{C}$ est telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lambda$, on a alors $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \lambda$ (théorème de Cesàro).
7. On suppose, pour cette question, que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente. Montrer que :
 - (a) $\sigma(f) \leq 0$;
 - (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ (la limite est prise pour x réel positif) ;
 - (c) $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T t f(t) dt = 0$.
8. Si $\sigma(f) \leq 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$, peut-on en déduire que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente ?
9. On suppose, pour cette question, que $f \in \mathcal{C}$ est à valeurs positives ou nulles. Montrer que si $\sigma(f) \leq 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est alors convergente et sa valeur vaut ℓ .
10. On désigne par f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- (a) Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ sont convergentes et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

(b) Montrer que $\sigma(f) = 0$.

(c) Calculer $\mathcal{L}(f)(x)$ pour tout $x > 0$ et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

11. Soient $f \in \mathcal{C}$ telle que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \ell$ et $g \in \mathcal{C}$ définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, g(t) = \begin{cases} \frac{f(t)}{t} & \text{si } t > 0 \\ \ell & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On suppose de plus que $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ est convergente.

(a) Montrer que $\sigma(f) \leq \sigma(g) \leq 0$.

(b) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathcal{L}(f)(t) dt$ est convergente et que :

$$\forall x \geq 0, \mathcal{L}(g)(x) = \int_x^{+\infty} \mathcal{L}(f)(t) dt$$

En particulier, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(f)(t) dt$$

et on retrouve les résultats de la question précédente.

– IV – Théorèmes taubériens

1. Montrer que si $f \in \mathcal{C}$ est telle que la fonction $t \mapsto t \cdot f(t)$ soit bornée (i. e. $f(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right)$), on a alors $\sigma(f) \leq 0$.

2. On suppose, pour cette question, que $f \in \mathcal{C}$ est telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t \cdot f(t)) = 0$ (i. e. $f(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{t}\right)$).

(a) Montrer que $\sigma(f) \leq 0$.

(b) Montrer que $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T t |f(t)| dt = 0$.

(c) Montrer que :

$$\forall x > 0, \forall T > 0, \left| \int_T^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt \right| \leq \frac{e^{-xT}}{xT} \sup_{t \geq T} (t |f(t)|)$$

(d) On suppose de plus que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \ell$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et vaut ℓ .

3. Soit $f \in \mathcal{C}$ telle que $f(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{t}\right)$ (dans ce cas, on a $\sigma(f) \leq 0$).

Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge si, et seulement si, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$. Ce résultat est un théorème de Tauber (faible).

4. On s'intéresse ici à la réciproque du résultat montré en **III.1**.

Soit $f \in \mathcal{C}$ telle que $\sigma(f) \leq 0$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \ell$, $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T tf(t) dt = 0$.

On désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :

$$\forall t > 0, g(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t uf(u) du$$

(a) Montrer que :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \frac{f(0)}{2}$$

On prolonge alors la fonction g par continuité en 0 en posant $g(0) = \frac{f(0)}{2}$ et $g \in \mathcal{C}$.

(b) Montrer que $\sigma(g) \leq 0$.

(c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x\mathcal{L}(t \cdot g)(x) = 0$.

(d) Montrer que :

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(f)(x) = \mathcal{L}(g)(x) + x\mathcal{L}(t \cdot g)(x)$$

(e) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(g)(x) = \ell$.

(f) En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

En définitive, on a montré le résultat suivant :

Soit $f \in \mathcal{C}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et vaut ℓ si, et seulement si : $\sigma(f) \leq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$, $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T tf(t) dt = 0$.

1. Soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^{+,*}$ à valeurs réelles telle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \gamma$ et la fonction $x \mapsto x^2\varphi''(x)$ soit bornée sur $\mathbb{R}^{+,*}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \varphi'(x) = 0$ (lemme de Littlewood).

On admet le résultat suivant : (R) Si $\varphi \in \mathcal{C}$ est à valeurs réelles positives telle que $\sigma(\varphi) \leq 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \mathcal{L}(\varphi)(x) = \ell$, on a alors $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) dt = \ell$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}$ à valeurs réelles telle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$ et $f(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$, c'est-à-dire qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $t|f(t)| \leq M$ pour tout $t \geq 0$. On se propose de montrer que, dans ce cas, on a $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \ell$ (théorème de Tauber fort).

(a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \mathcal{L}(f)'(x) = 0$.

(b) En utilisant la fonction φ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \varphi(t) = M - t \cdot f(t)$$

montrer que $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T t \cdot f(t) dt = 0$ et conclure.