SESSION DE 1989

CONCOURS INTERNE
ET
CONCOURS D'ACCÈS À L'ÉCHELLE DE RÉMUNÉRATION
DES PROFESSEURS AGRÉGÉS

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 6 heures

L'usage des calculatrices de poche, y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé pour cette épreuve conformément à la circulaire n° 86-828, du 28 juillet 1986.

Les trois parties du sujet proposé sont **indépendantes** *entre elles.*

La partie I se place dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois et étudie les rotations « minimales » transformant une première base orthonormale directe donnée en une seconde donnée par les directions de ses éléments.

La partie II se place dans un espace vectoriel euclidien de dimension quelconque et étudie des correspondances entre ensembles isométriques, puis la minoration d'un invariant.

La partie III utilise la décomposition des formes quadratiques, sur $\mathbb{R}^n$, en combinaisons de carrés de formes linéaires pour des démonstrations de positivité. Dans tout le problème la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée B_0, et $\mathbb{R}^n$ est muni de la structure euclidienne définie par cette base. On note SO (n) l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n de déterminant $+1$.

I

Dans cette partie l'espace $E = \mathbb{R}^3$ est orienté, la base canonique $B_0 = (i, j, k)$ étant directe. Si Ω est un élément non nul de E et θ un réel, on note $\rho(\Omega, \theta)$ la rotation d'angle θ autour de Ω. On rappelle qu'un angle aigu est un angle dont le cosinus est strictement positif.

1. *a.* Montrer que, si $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et si un vecteur V est transformé par $\rho(\Omega, \theta)$ en W, l'angle formé par V et W est aigu.

   b. Montrer que $\rho(\Omega, \theta) = \rho(-\Omega, -\theta)$. Caractériser par une condition sur la trace de leur matrice les rotations d'angle aigu.

   Une matrice de colonnes V_1, V_2, V_3 sera notée $|V_1, V_2, V_3|$.

2. On pose :

$$i' = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad j' = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad k' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}.$$

   a. Vérifier que (i', j', k') est une base orthonormale directe de E.

   b. Vérifier qu'il existe un élément $|i'', j'', k''|$ de SO (3) de trace strictement supérieure à 1, tel que chacun des vecteurs i'', j'', k'' soit élément de l'ensemble $\{i', -i', j', -j', k', -k'\}$. On formera explicitement une telle matrice.

   c. Déterminer Ω et θ pour la rotation $\rho(\Omega, \theta)$ qu'elle représente.

Tournez la page S.V.P.

3. Soit $R = [V_1, V_2, V_3]$ un élément de SO (3). On note, pour $i = 1, 2, 3$, $V_i = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix}$.

a. On suppose que α_1 est le maximum des valeurs absolues de tous les éléments de R, et que β_2 majore les valeurs absolues de β_3, γ_2 et γ_3.

– Montrer que $\alpha_1 \geq \sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

– Montrer que $\beta_2 \geq \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ (on prouvera au préalable l'égalité : $\beta_2^2 + \beta_3^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 + \alpha_1^2$).

– Comparer α_1 et $\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2$.

– Déduire de ce qui précède que la trace de R est strictement supérieure à 1.

b. On ne suppose plus vérifiées les hypothèses faites en *a.* Montrer l'existence d'une matrice $R' = [V'_1, V'_2, V'_3]$ élément de SO (3), de trace strictement supérieure à 1, et telle que V'_1, V'_2, V'_3 soient éléments de l'ensemble $\{V_1, -V_1, V_2, -V_2, V_3, -V_3\}$.

4. *a.* Soit B une base orthonormale quelconque de E. Montrer l'existence d'une rotation d'angle aigu amenant les trois vecteurs de la base canonique, à l'ordre près, à être colinéaires à ceux de B.

b. Démontrer le résultat de géométrie suivant : deux cubes de même centre et de même longueur d'arête se déduisent l'un de l'autre par une rotation d'angle $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

c. Soit s un endomorphisme symétrique de E. Montrer qu'il existe une rotation $\rho(\Omega, \theta)$, avec $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, telle que les images par cette rotation des vecteurs i, j, k de B_0 soient vecteurs propres de s.

5. On a associé, au cours des questions précédentes, à un couple donné de bases orthonormales directes 24 rotations et on s'est intéressé à leurs traces. Regroupant ces rotations en six familles de quatre, montrer, à partir des expressions des traces, que la moyenne des carrés des 24 traces est 1. Retrouver ainsi les résultats du 4.

II

Soit E euclidien de dimension $n \geq 2$. Pour toute forme quadratique q sur E définie positive on appelle *ellipsoïde* associé à q l'ensemble $\mathscr{E}$ des $x \in E$ vérifiant $q(x) = 1$. Dans les deux premières questions, on étudie l'isométrie de deux tels ellipsoïdes et la détermination conjointe d'endomorphismes de E transformant respectivement l'un ou l'autre en la sphère unité. Si M est une matrice carrée d'ordre n, ${}^tM$ désigne la matrice transposée.

1. *a.* On considère la matrice : $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

et on lui associe les matrices : $Q_1 = {}^tM\,M$ et $Q_2 = M\,{}^tM$.

– Comparer les valeurs propres de Q_1 et Q_2.

– Montrer l'existence d'un élément R de SO (3) tel que $Q_2 = {}^tR\,Q_1\,R$.

b. Soit maintenant M une matrice carrée quelconque inversible d'ordre $n \geq 2$. On note encore $Q_1 = {}^tM\,M$ et $Q_2 = M\,{}^tM$.

– Montrer que Q_1 et Q_2 ont même polynôme caractéristique.

– Montrer l'existence de $R \in SO(n)$ tel que $Q_2 = {}^tR\,Q_1\,R$.

2. Soient Q_1 et Q_2 deux matrices symétriques d'ordre n définies positives, et q_1, q_2 les formes quadratiques admettant respectivement Q_1, Q_2 comme matrices dans la base canonique B_0.

Tournez la page S.V.P.

a. Montrer que les cinq propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(*i*) Q_1 et Q_2 ont les mêmes valeurs propres (avec même ordre de multiplicité).

(*ii*) Les ellipsoïdes $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ associés à q_1 et q_2 sont isométriques.

(*iii*) Il existe une isométrie positive r de E telle que $q_2 = q_1 \circ r$.

(*iv*) Il existe une matrice M inversible telle que $Q_1 = {}^t\!M\, M$ et $Q_2 = M\, {}^t\!M$.

(*v*) Il existe un automorphisme f de E tel que

$$\forall x \in E, \quad q_1(x) = \|f(x)\|^2, \quad q_2(x) = \|f^*(x)\|^2,$$

où f^* désigne l'adjoint de f et $\|.\|$ la norme euclidienne.

Indication : pour démontrer que $(i) \to (iv)$, montrer que $Q_1 = U D^2 U^{-1}$, $Q_2 = V D^2 V^{-1}$ où D est une matrice diagonale et U et V deux matrices orthogonales.

b. Soit M une matrice qui vérifie la propriété 2.*a.*(*iv*). Montrer l'existence d'une matrice symétrique inversible S telle que $M\,{}^t\!M = Q_2 = S^2$; en déduire que M peut s'écrire sous la forme $M = S P$, où P est orthogonale. Montrer que l'isométrie dont P est la matrice dans la base canonique transforme l'ellipsoïde $\mathcal{E}_1$ en $\mathcal{E}_2$.

c. Soit f un automorphisme de E qui vérifie la propriété 2.*a.*(*v*). On considère une base orthonormale $B_1 = (u_1, \ldots, u_n)$ dans laquelle la matrice de q_1 est diagonale et une base orthonormale $B_2 = (v_1, \ldots, v_n)$ dans laquelle la matrice de q_2 est diagonale, ces bases étant telles que $q_1(u_i) = q_2(v_i)$ pour $1 \leq i \leq n$, on note λ_i cette valeur commune.

— Montrer que l'image $f(B_1)$ de B_1 par f est une base orthogonale et que la matrice de q_2 dans cette base $f(B_1)$ est diagonale.

— Lorsque les λ_i, $1 \leq i \leq n$, sont tous distincts, montrer que $f(u_i)$ et v_i sont colinéaires pour tout i.

d. On donne :

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer une matrice M satisfaisant aux conditions :

$${}^t\!M\, M = Q_1, \qquad M\, {}^t\!M = Q_2.$$

3. Dans cette question on introduit un invariant associé à deux formes quadratiques définies positives et on se propose, l'une des formes étant fixée, de rechercher le minimum de cet invariant lorsque les formes sont dans la situation traitée en II.2.

a. Soient q_1 et q_2 d'ellipsoïdes associés $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ (en général non isométriques). On rapporte E à une base B quelconque ; soient Q_1, Q_2 les matrices dans B de q_1 et q_2. Montrer que la trace de $Q_1 Q_2^{-1}$ ne dépend pas du choix de B. On pose $J(q_1, q_2) = \mathrm{Tr}(Q_1 Q_2^{-1})$.

b. Signification géométrique de J : une direction de droite dans E étant définie par un vecteur v non nul, il existe λ réel tel que $\lambda v \in \mathcal{E}_1$, on appelle rayon de $\mathcal{E}_1$ dans la direction v le réel $\rho_1(v) = \|\lambda v\|$. On définit de même $\rho_2(v)$ pour $\mathcal{E}_2$.

Démontrer que, pour toute base $(e_1, \ldots, e_n)$ dans laquelle la matrice Q_2 de q_2 est diagonale, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\rho_2(e_i)}{\rho_1(e_i)} \right)^2 = J(q_1, q_2).$$

c. La forme quadratique q_1 définie positive est fixée. Trouver le minimum de $J(q_1, q_1 \circ r)$ lorsque r décrit l'ensemble des isométries de E.

Indication : utiliser une base orthonormale, mettre la matrice de q_1 sous la forme $Q_1 = S^2$, avec S symétrique, et $J(q_1, q_2)$ sous la forme $\mathrm{Tr}(SP^{-1}S^{-2}PS)$, où P est orthogonale ; on reliera la trace au déterminant en exploitant l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de n réels positifs.

Tournez la page S.V.P.

III

On considère dans cette partie l'espace $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), de base canonique $B_0 = (e_1, \ldots, e_n)$, et on note $Q(n)$ l'ensemble des formes quadratiques sur cet espace. Si q et q' sont des éléments de $Q(n)$ de matrices $[a_{ij}]$ et $[a'_{ij}]$ dans B_0, on définit l'élément $q * q'$ de $Q(n)$ par sa matrice $[a_{ij}\, a'_{ij}]$ dans B_0 (multiplication terme à terme).

1. Soit q_0 l'élément de $Q(n)$ dont la matrice $[c_{ij}]$ dans B_0 est définie par :

$$c_{ii} = n - 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$
$$c_{ij} = -1 \qquad \forall\ i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j.$$

a. Vérifier que q_0 est positive et dégénérée ; on déterminera en particulier les vecteurs x tels que $q_0(x) = 0$.

b. Si $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on lui associe :

$$q(x) = \int_0^1 (x_1 t + x_2 t^2 + \ldots + x_n t^n)^2 \mathrm{d}t = \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{n} x_i t^i\right]^2 \mathrm{d}t$$

et on pose $s_x(t) = \sum\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i t^i - x_j t^j)^2$.

— Montrer que q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$; expliciter sa matrice dans B_0.

— Vérifier l'égalité : $(q * q_0)(x) = \int_0^1 s_x(t)\,\mathrm{d}t$.

Qu'en déduit-on pour $q * q_0$?

c. Soit maintenant $q \in Q(n)$, définie positive, de matrice $[a_{ij}]$ dans B_0. Démontrer que $q * q_0$ est définie positive ; il est conseillé de procéder comme au *b.*, par regroupements de termes dans le développement de $(q * q_0)(x)$.

2. Soient q_1 et q_2 éléments de $Q(n)$, positives et de matrices respectives $[a_{ij}]$ et $[b_{ij}]$ dans B_0 ; on les suppose non nulles.

a. Montrer l'existence de nr nombres réels λ_{ij}, $i = 1, \ldots, r$; $j = 1, \ldots, n$, et de ns nombres réels μ_{ij}, $i = 1, \ldots, s$; $j = 1, \ldots, n$, tels que :

- $q_1(x) = q_1(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_j\right)^2$
- $q_2(x) = q_2(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} x_j\right)^2$
- Si $L_i = \lambda_{i1} e_1 + \ldots + \lambda_{in} e_n \quad \forall i = 1, \ldots, r$, les vecteurs $L_1, \ldots, L_r$ sont indépendants.
- Si $M_i = \mu_{i1} e_1 + \ldots + \mu_{in} e_n \quad \forall i = 1, \ldots, s$, les vecteurs $M_1, \ldots, M_s$ sont indépendants.

b. Donner une expression du produit $a_{ij}\, b_{ij}$ au moyen de certains nombres $\lambda_{kk'}$, $\mu_{\ell\ell'}$, et en déduire que $(q_1 * q_2)(x)$ est une somme d'expressions du type $(\nu_{i1} x_1 + \ldots + \nu_{in} x_n)^2$.

c. Montrer que $q_1 * q_2$ est positive. Si l'on suppose, de plus, que q_1 et q_2 sont définies positives, montrer qu'il en est de même pour $q_1 * q_2$.

3. Soit $q \in Q(n)$, définie positive et dont la matrice $[a_{ij}]$ dans B_0 a tous ses éléments dans $]0, 1[$. Pour chaque entier naturel non nul k on note q_k l'élément de $Q(n)$ de matrice $[(a_{ij})^k]$.

— Montrer que pour tout $k \geq 1$, q_k est définie positive.

Soit $q' \in Q(n)$ de matrice $\left[\dfrac{a_{ij}}{\sqrt{1 - a_{ij}}}\right]$ dans B_0.

— Montrer que q' est définie positive.

• • •