INTRODUCTION

En électronique, un élément à entrées et sorties multiples est appelé une boîte noire. Du point de vue mathématique, il peut être représenté par une matrice. Le groupement de deux boîtes noires $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$, correspondant à des matrices A et B, et branchées en parallèle, est équivalent à une boîte noire unique ($\mathscr{C}$, C). On note $C = A : B$, et on dit que C est la somme parallèle de A et de B.

Dans la partie II du problème, on étudie l'application $(A, B) \to A : B$. On s'intéresse, dans la partie III, à une opération qui correspond, du point de vue physique, à la mise hors circuit de certaines parties d'un réseau électrique. La partie I est consacrée à des préliminaires.

NOTATIONS ET RAPPELS

Dans la suite, $\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels, et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls et, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\bar{\lambda}$ est le nombre complexe conjugué de λ.

On désigne par E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel hermitien de dimension finie non nulle n. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $(x \mid y)$. L'application $(x, y) \to (x \mid y)$ vérifie donc, pour tous $x, y, z \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

1. $(x \mid x) \in \mathbb{R}_+$, et $(x \mid x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
2. $(y \mid x) = \overline{(x \mid y)}$.
3. $(x + y \mid z) = (x \mid z) + (y \mid z)$.
4. $(x \mid y + z) = (x \mid y) + (x \mid z)$.
5. $(\lambda x \mid y) = \bar{\lambda}(x \mid y)$.
6. $(x \mid \lambda y) = \lambda (x \mid y)$.

La norme d'un vecteur x de E est définie par $\| x \| = \sqrt{(x \mid x)}$.

On note $\mathscr{L}$ l'algèbre des endomorphismes de E. Pour $f, g \in \mathscr{L}$, fg est le composé $f \circ g$, $\operatorname{im}(f)$ l'image de f, et $\ker(f)$ le noyau de f. La norme $\| f \|$ de f est définie par :

$$\| f \| = \sup \left\{ \frac{\| f(x) \|}{\| x \|} ; x \in E, x \neq 0 \right\}.$$

Pour tout endomorphisme f de E, il existe un unique élément $f^* \in \mathscr{L}$, appelé adjoint de f, et tel que :

$$(f(x) \mid y) = (x \mid f^*(y))$$

pour tous $x, y \in E$. On rappelle que $(f^*)^* = f$.

Un élément de $\mathscr{L}$ est dit hermitien s'il est égal à son adjoint. On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des endomorphismes hermitiens de E. On rappelle que, pour $f \in \mathscr{L}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

7. $f \in \mathscr{H}$.
8. Il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres pour f, et toutes les valeurs propres de f sont réelles.

Un élément de $\mathscr{H}$ dont toutes les valeurs propres appartiennent à $\mathbb{R}_+$ est dit hermitien positif.

On note $\mathscr{H}^+$ l'ensemble des endomorphismes hermitiens positifs de E.

Pour $f, g \in \mathscr{H}^+$, on dit que g domine f, et on écrit alors $f \leqslant g$, si $g - f$ appartient à $\mathscr{H}^+$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^\perp$ l'orthogonal de F dans E, et p^F la projection orthogonale de E sur F, autrement dit, la projection de E sur F parallèlement à $F^\perp$. On rappelle que p^F est un élément de $\mathscr{H}^+$.

PARTIE I

Dans toute cette partie du problème, f, g et h désignent des endomorphismes de E. Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1.*a*. Soient i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, et y, z des vecteurs de E. Exprimer les produits scalaires :

$$(f(y+z) \mid y+z) \quad \text{et} \quad (f(y+iz) \mid y+iz)$$

en fonction de :

$$(f(y) \mid y), \quad (f(z) \mid z), \quad (f(y) \mid z), \quad (f(z) \mid y).$$

b. En déduire que les conditions suivantes sont équivalentes :

(C_1) f est nul.

(C_2) $(f(x) \mid x) = 0$ pour tout vecteur x de E.

c. Prouver l'équivalence des conditions suivantes :

(C_3) $f \in \mathscr{H}$.

(C_4) $(f(x) \mid x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in E$.

d. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(C_5) $f \in \mathscr{H}^+$.

(C_6) $(f(x) \mid x) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $x \in E$.

2. On suppose que $f \in \mathscr{H}^+$. Soit x un vecteur de E vérifiant :

$$(f(x) \mid x) = 0.$$

Prouver que $x \in \ker(f)$.

3. L'endomorphisme f étant à nouveau quelconque, établir les égalités suivantes :

$$[\mathrm{im}\,(f)]^{\perp} = \ker\,(f^*), \quad \ker\,(f) = [\mathrm{im}\,(f^*)]^{\perp}.$$

4. Dans cette question, on suppose que f, g, h sont des éléments de $\mathscr{H}^+$, et que h domine f.

   a. En utilisant les questions I.1.*d.* et I.2., prouver que :

$$\ker\,(h) \subset \ker\,(f).$$

   Déduire alors de la question I.3. que :

$$\mathrm{im}\,(f) \subset \mathrm{im}\,(h).$$

   b. Vérifier que $f + g$ est un endomorphisme hermitien positif de E dominant f et g. En déduire que :

$$\mathrm{im}\,(f+g) = \mathrm{im}\,(f) + \mathrm{im}\,(g), \quad \ker\,(f+g) = \ker\,(f) \cap \ker\,(g).$$

5. *a.* On suppose que f est hermitien. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres. Établir :

$$\|f\| = \sup\{|(f(x) \mid x)| \,;\, \|x\| = 1\} = \max\{|\lambda_k| \,;\, 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

   b. On suppose que g et h sont hermitiens positifs, et que h domine g. Prouver que :

$$\|g\| \leqslant \|h\|.$$

PARTIE II

1. Dans cette question, f est un élément de $\mathscr{H}^+$.

   a. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres pour f, avec les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$:

$$f(e_k) = \lambda_k e_k \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

   On définit un endomorphisme g de E par les formules :

$$g(e_k) = 0 \quad \text{si} \quad \lambda_k = 0, \quad g(e_k) = \frac{1}{\lambda_k}e_k \quad \text{si} \quad \lambda_k \neq 0.$$

   Prouver que $g \in \mathscr{H}^+$, et que :

$$fg = gf = p^{\mathrm{im}\,(f)}, \ \mathrm{im}\,(g) = \mathrm{im}\,(f).$$

   b. Montrer qu'il existe un et un seul élément de $\mathscr{L}$, que l'on notera $f^\wedge$, vérifiant les trois conditions suivantes :

   (1) $f^\wedge \in \mathscr{H}^+$.

   (2) $ff^\wedge = f^\wedge f = p^{\mathrm{im}\,(f)}$.

   (3) $\mathrm{im}\,(f^\wedge) = \mathrm{im}\,(f)$.

   c. Montrer que $\ker\,(f^\wedge) = \ker\,(f)$, et que $(f^\wedge)^\wedge = f$.

   d. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Prouver que $(p^{\mathrm{F}})^\wedge = p^{\mathrm{F}}$.

Dans toute la suite du problème, pour f et g éléments de $\mathscr{H}^+$, on note $f:g$ l'élément de $\mathscr{L}$ défini par :

$$f:g = f\,(f+g)^\wedge\, g.$$

Il est précisé que l'on a, en général :

$$(f+g)^\wedge \neq f^\wedge + g^\wedge.$$

2. Soient f et g des éléments de $\mathscr{H}^+$.

   a. Établir l'identité suivante :
$$f:g = g:f + p^{\operatorname{im}(f+g)}\, g - g\, p^{\operatorname{im}(f+g)}.$$

   b. En utilisant la question I.4.*b.*, prouver que :
$$f:g = g:f.$$
   En déduire l'inclusion :
$$\operatorname{im}(f:g) \subset \operatorname{im}(f) \cap \operatorname{im}(g).$$

   c. Soient x, y, z des éléments de E tels que :
$$x = f(y) = g(z).$$
   Vérifier que :
$$x = (f:g)(y+z).$$
   En déduire l'égalité :
$$\operatorname{im}(f:g) = \operatorname{im}(f) \cap \operatorname{im}(g).$$

3. Soient f et g des endomorphismes hermitiens positifs de E, et x un vecteur de E.

   a. On pose :
$$y = (f+g)^\wedge g(x), \quad z = (f+g)^\wedge f(x).$$
   Vérifier l'égalité suivante :
$$\big((f:g)(x) \mid x\big) = (f(y) \mid y) + (g(z) \mid z).$$
   En déduire que $f:g$ est un élément de $\mathscr{H}^+$.

   b. Vérifier que :
$$(f(x) \mid x) = \big((f:g)(x) \mid x\big) + \big((f+g)^\wedge f(x) \mid f(x)\big).$$
   En déduire que f domine $f:g$. Prouver alors, sans calcul, que g domine $f:g$.

4. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Établir l'égalité suivante :
$$2\,(p^{\mathrm{F}} : p^{\mathrm{G}}) = p^{\mathrm{F} \cap \mathrm{G}}.$$

5. Soient f et g des éléments de $\mathscr{H}^+$.

   a. Soient x, y, z des vecteurs de E vérifiant :
$$x = y + z.$$
   Montrer que l'on a l'égalité suivante :
$$\big((f:g)(x) \mid x\big) = (f(y) \mid y) + (g(z) \mid z) - \big((f+g)^\wedge (g(z) - f(y)) \mid g(z) - f(y)\big).$$

   b. Pour $x \in \mathrm{E}$, on note $\mathscr{E}_x^{f,g}$ l'ensemble constitué des réels de la forme :
$$(f(y) \mid y) + (g(z) \mid z)$$
   avec y, z éléments de E vérifiant $x = y + z$.

   Prouver que le produit scalaire $((f:g)(x) \mid x)$ est le plus petit élément de l'ensemble $\mathscr{E}_x^{f,g}$. On pourra pour cela utiliser les vecteurs y_0 et z_0 définis par :
$$y_0 = (f+g)^\wedge g(x) + p^{\ker(f+g)}(x), \quad z_0 = (f+g)^\wedge f(x).$$

6. Soient f, g, h, k des éléments de $\mathscr{H}^+$. En utilisant la question II.5.*b.*, établir les résultats suivants :

   a. Si $f \leqslant g$, alors $f:h \leqslant g:h$.

   b. $(f:h) + (g:k) \leqslant (f+g):(h+k)$.

   c. $(f:g):h = f:(g:h)$.

PARTIE III

1. Soient $f \in \mathscr{H}^+$, et F un sous-espace vectoriel de E. Vérifier que $p^{\mathrm{F}} f^{\wedge} p^{\mathrm{F}}$ appartient à $\mathscr{H}^+$.

   Pour tout élément f de $\mathscr{H}^+$, et tout sous-espace vectoriel F de E, on définit un élément de $\mathscr{H}^+$, noté f_{F}, par la formule :
$$f_{\mathrm{F}} = \left(p^{\mathrm{F} \cap \mathrm{im}(f)} (f^{\wedge})\, p^{\mathrm{F} \cap \mathrm{im}(f)}\right)^{\wedge}.$$

2. Soient $f \in \mathscr{H}^+$, et F un sous-espace vectoriel de E.

   a. En utilisant la question I.2., montrer que :
$$\ker((f_{\mathrm{F}})^{\wedge}) = \ker(f) + \mathrm{F}^{\perp}.$$
   En déduire que :
$$\mathrm{im}(f_{\mathrm{F}}) = \mathrm{F} \cap \mathrm{im}(f).$$

   b. Montrer que, si $\mathrm{im}(f) \subset \mathrm{F}$, on a $f_{\mathrm{F}} = f$.

3. Soient r un réel strictement positif, f un élément de $\mathscr{H}^+$, et F un sous-espace vectoriel de E.

   a. Vérifier que :
$$(f : rp^{\mathrm{F}})\, f^{\wedge}\, p^{\mathrm{F} \cap \mathrm{im}(f)} = (rp^{\mathrm{F}} : f)\, f^{\wedge}\, p^{\mathrm{F} \cap \mathrm{im}(f)} = p^{\mathrm{F} \cap \mathrm{im}(f)} - \frac{1}{r}(f : rp^{\mathrm{F}})\, p^{\mathrm{F} \cap \mathrm{im}(f)}.$$

   b. En déduire que :
$$(f : rp^{\mathrm{F}})(f_{\mathrm{F}})^{\wedge} = p^{\mathrm{F} \cap \mathrm{im}(f)} - \frac{1}{r}(f : rp^{\mathrm{F}}).$$

   c. Prouver l'égalité suivante :
$$f_{\mathrm{F}} = (f : rp^{\mathrm{F}}) + \frac{1}{r}(f : rp^{\mathrm{F}})\, f_{\mathrm{F}}.$$

   d. En déduire :
$$\lim_{r \to +\infty} \| f_{\mathrm{F}} - (f : rp^{\mathrm{F}}) \| = 0.$$

4. On munit l'ensemble $\mathscr{H}^+$ de la relation d'ordre $\leqslant$. Soient f, g des éléments de $\mathscr{H}^+$, et F un sous-espace vectoriel de E. On désigne par $\mathscr{M}(f, \mathrm{F})$ l'ensemble des éléments h de $\mathscr{H}^+$ qui vérifient :
$$h \leqslant f \quad \text{et} \quad \mathrm{im}(h) \subset \mathrm{F}.$$
   En utilisant la question III.3.*d.*, établir les résultats suivants :

   a. $f_{\mathrm{F}} \leqslant f$.

   b. Si $f \leqslant g$, on a $f_{\mathrm{F}} \leqslant g_{\mathrm{F}}$ et si, en outre, $\mathrm{im}(f) \subset \mathrm{F}$, alors $f \leqslant g_{\mathrm{F}}$.

   c. f_{F} est le plus grand élément de l'ensemble $\mathscr{M}(f, \mathrm{F})$.

5. Soient f et g des éléments de $\mathscr{H}^+$, et F, G des sous-espaces vectoriels de E. En utilisant la question III.4.*c.*, prouver les assertions suivantes :

   a. $f_{\mathrm{F}} + g_{\mathrm{F}} \leqslant (f + g)_{\mathrm{F}}$.

   b. $(f_{\mathrm{F}})_{\mathrm{G}} = (f_{\mathrm{G}})_{\mathrm{F}} = f_{\mathrm{F} \cap \mathrm{G}}$.

   c. $(p^{\mathrm{F}})_{\mathrm{G}} = (p^{\mathrm{G}})_{\mathrm{F}} = p^{\mathrm{F} \cap \mathrm{G}}$.

   d. $(f_{\mathrm{F}}) : (g_{\mathrm{F}}) = (f_{\mathrm{F}}) : g = (f : g)_{\mathrm{F}}$.

6. Soient $f \in \mathscr{H}^+$, et F un sous-espace vectoriel de E.

   a. Prouver que :
$$\mathrm{F} \cap \mathrm{im}(f - f_{\mathrm{F}}) = \{0\}.$$

   b. Soient g et h des éléments de $\mathscr{H}^+$ vérifiant les conditions suivantes :
$$f = g + h, \quad \mathrm{im}(g) \subset \mathrm{F}, \quad \mathrm{F} \cap \mathrm{im}(h) = \{0\}.$$
   Montrer que :
$$g = f_{\mathrm{F}}, \quad h = f - f_{\mathrm{F}}.$$