# concours interne de recrutement de professeurs agrégés et concours d'accès à l'échelle de rémunération

## première épreuve de mathématiques **Durée : 6 heures**

**On se propose d'établir quelques résultats sur l'ensemble des sommes de *n* carrés dans un corps ou dans certains anneaux.**

*Un sous-ensemble* S *d'un anneau* A *est dit* ***multiplicatif*** *si le produit de deux éléments de* S *appartient à* S.

*Pour tout entier* $n \geqslant 1$, *on note* $S_n(A)$ *l'ensemble des éléments* $x$ *de l'anneau* A *qui peuvent s'écrire sous la forme* $x = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, *avec* $x_1, \ldots, x_n$ *dans* A.

*Si* $k$ *est un corps commutatif,* $k[X]$ *et* $k(X)$ *désignent respectivement l'anneau des polynômes et le corps des fractions rationnelles à coefficients dans* $k$ *en une indéterminée* X ; *enfin* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ *ont les significations habituelles.*

## I

**Où l'on traite quelques exemples.**

1. Soient $x, y, z, t$ quatre éléments d'un sous-anneau B du corps $\mathbb{R}$ des réels. En écrivant que

   (*) $$|x + iy|^2 \cdot |z + it|^2 = |(x + iy)(z + it)|^2$$

   démontrer que $S_2(B)$ est un ensemble multiplicatif.

2. L'égalité (*) peut être regardée comme une identité dans l'anneau B en les lettres $x, y, z, t$. Énoncer cette identité et la démontrer dans un anneau commutatif quelconque A. En déduire que $S_2(A)$ est un ensemble multiplicatif.

3. Montrer que $15 \notin S_3(\mathbb{Z})$ et en déduire que $S_3(\mathbb{Z})$ n'est pas un ensemble multiplicatif.

4. On note $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}$ les huit éléments de l'anneau $E = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Donner, sans justification, la liste des éléments de chacun des trois ensembles $S_1(E)$, $S_2(E)$, $S_3(E)$.

5. Soient $a, b, c, d$ dans $\mathbb{Z}$ tels que
   $$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 8).$$
   Démontrer que ces quatre nombres sont tous pairs.

6. En déduire que, si $n \in \mathbb{Z}$ est congru à $-1$ modulo 8, alors $n$ n'appartient ni à $S_3(\mathbb{Z})$ ni à $S_3(\mathbb{Q})$.

7. L'ensemble $S_3(\mathbb{Q})$ est-il multiplicatif ?

8. Démontrer qu'un polynôme $f \in \mathbb{R}[X]$ appartient à $S_2(\mathbb{R}[X])$ si et seulement si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$. [*On pourra examiner d'abord le cas des polynômes de degré 2.*]

9. Démontrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a $S_n(\mathbb{R}[X]) = S_2(\mathbb{R}[X])$. A-t-on aussi $S_n(\mathbb{R}(X)) = S_2(\mathbb{R}(X))$ ?

## II

**Où l'on étudie les produits de sommes de $n$ carrés dans un corps.**

Cette partie peut être traitée indépendamment de la précédente.

*Dans cette partie, $k$ désigne un corps commutatif de caractéristique zéro et $I_n$ est l'unité de l'anneau $\mathcal{M}_n(k)$ des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $k$.*

*Si $M$ est une matrice, carrée ou rectangulaire, on note ${}^tM$ sa transposée et $\Delta(M)$ la somme des carrés des éléments de la première ligne de $M$.*

*Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(k)$ est dite* ***semi-orthogonale*** *si l'on a :*

$$A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = \Delta(A) I_n .$$

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(k)$ et $a \in k$ tels que $A \cdot {}^tA = a I_n$.
   *a.* Prouver que $a = \Delta(A)$.
   *b.* Montrer que, si $a \neq 0$, alors A est semi-orthogonale.

2. Soient A et B semi-orthogonales dans $\mathcal{M}_n(k)$ et $e \in k$. Démontrer que les matrices $eA$, ${}^tA$ et $AB$ sont semi-orthogonales et calculer $\Delta(eA)$, $\Delta({}^tA)$ et $\Delta(AB)$ en fonction de $e$, $\Delta(A)$ et $\Delta(B)$.

3. On pose
$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour } n \geqslant 3, \quad \Omega_n = \begin{pmatrix} \Omega_2 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}.$$
   Démontrer que $\Omega_n$ est semi-orthogonale pour tout $n \geqslant 2$.

4. Soit $n \geqslant 2$ et A semi-orthogonale dans $\mathcal{M}_n(k)$.
   *a.* Montrer que la matrice obtenue à partir de A en échangeant les deux premières lignes est encore semi-orthogonale.
   *b.* Établir, plus généralement, qu'une permutation quelconque des lignes ou des colonnes n'affecte pas la semi-orthogonalité d'une matrice.

5. Soit $L = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ une matrice-ligne à coefficients dans $k$ telle que $\Delta(L) = 0$.
   *a.* Montrer que la matrice ${}^tL \cdot L$ est semi-orthogonale et déterminer sa $i$-ème ligne pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
   *b.* En déduire qu'on peut trouver dans $\mathcal{M}_n(k)$ une matrice semi-orthogonale dont L soit la première ligne.

6. Soient A et B semi-orthogonales dans $\mathcal{M}_n(k)$. On suppose que $\Delta(A) \neq 0$ et que $\Delta(A) + \Delta(B) \neq 0$. On pose $C = -(\Delta(A))^{-1}\, {}^tA\, {}^tBA$.

   Démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & {}^tA \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(k)$ est semi-orthogonale.

7. Soient $x_1, \ldots, x_n$ dans $k$. Montrer qu'il existe dans $\mathcal{M}_n(k)$ une matrice semi-orthogonale dont la première ligne est $(x_1, \ldots, x_n)$, dans chacun des deux cas suivants :

   *a.* $k = \mathbb{R}$.

   *b.* $k$ quelconque et $n$ puissance de 2 ( c'est-à-dire de la forme $n = 2^p$, $p \in \mathbb{N}$).

8. Prouver que, si $n$ est une puissance de 2, un élément $a$ de $k$ appartient à l'ensemble $S_n(k)$ défini dans l'introduction si et seulement s'il existe une matrice semi-orthogonale A dans $\mathcal{M}_n(k)$ vérifiant $\Delta(A) = a$.

9. Montrer que, si $n$ est une puissance de 2, alors $S_n(k)$ est un ensemble multiplicatif.

## III

**Où l'on précise le nombre de carrés nécessaires pour écrire − 1.**

*Dans cette partie, $k$ désigne un corps commutatif de caractéristique quelconque. Le* ***niveau*** *$s(k)$ de $k$ est le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $-1 \in S_n(k)$, si un tel entier $n$ existe ; dans le cas contraire, on pose $s(k) = +\infty$.*

1. Calculer le niveau des corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

2. Quel est le niveau d'un corps de caractéristique 2 ? d'un corps de caractéristique 5 ?

3. On pose $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où $p$ est un nombre premier $\geqslant 3$.

   *a.* Quel est le noyau du morphisme $x \longmapsto x^2$ du groupe multiplicatif $\mathbb{F}_p^*$ des éléments non nuls du corps $\mathbb{F}_p$ dans lui-même ?

   *b.* Quel est le cardinal de l'image E de ce morphisme ?

   *c.* T désignant l'ensemble des éléments de $\mathbb{F}_p$ de la forme $-1-y$ avec $y \in S_1(\mathbb{F}_p) = E \cup \{0\}$, démontrer que l'intersection $T \cap S_1(\mathbb{F}_p)$ n'est pas vide.

   *d.* En déduire que $s(\mathbb{F}_p) \leqslant 2$.

4. Démontrer que, si le corps $k$ (fini ou infini) est de caractéristique non nulle, alors $s(k) \leqslant 2$.

5. On suppose, dans cette question, que le corps $k$ est de caractéristique zéro et de niveau $s \neq +\infty$. Il existe donc $x_1, \ldots, x_s$ dans $k$ tels que $-1 = x_1^2 + \ldots + x_s^2$. Soit $n$ la plus grande puissance de 2 telle que $n \leqslant s$ et soit $x = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Établir que $x \neq 0$, puis successivement que $-x$, $-x^2$ et $-1$ appartiennent à $S_n(k)$.

6. Démontrer que le niveau d'un corps commutatif quelconque est égal ou bien à $+\infty$ ou bien à une puissance de 2.

## IV

**Où l'on traite le cas d'un anneau de polynômes.**

*Dans cette partie, on se donne un corps commutatif $k$ de caractéristique zéro et l'on pose* $A = k[X]$ *et* $K = k(X)$ *en sorte que* $k \subset A \subset K$.

1. Démontrer que $S_1(A) = A \cap S_1(K)$.

2. Soient $a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ dans $K$ $(n \geqslant 2)$. Simplifier l'expression $(b+1)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i(b-1))^2$ lorsque $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = -1$.

3. En déduire que, s'il existe $n \geqslant 2$ tel que $-1 \in S_{n-1}(k)$, alors $S_n(k) = k$, $S_n(A) = A$ et $S_n(K) = K$.

4. Pour quels entiers $n \geqslant 1$ les ensembles $S_n(\mathbb{C}(X))$ sont-ils multiplicatifs ?

5. Soit $n$ un entier $\geqslant 2$ tel que $-1 \notin S_{n-1}(k)$ et soient $R_1, \ldots, R_n$ des polynômes dans A. Démontrer que si $R_1^2 + \ldots + R_n^2 = aX$, avec $a \in k$, alors $R_1, \ldots, R_n$ sont nuls.

6. Soient $P, Q, P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n$ dans $A$ $(n \geqslant 2)$.
   On pose $S = P - \sum_{i=1}^{n} Q_i^2$, $T = PQ - \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i$, $Q' = 2T - QS$ et $P'_i = 2Q_i T - P_i S$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

   *a.* Démontrer que, si l'on a l'égalité :

   (1) $$Q^2 P = \sum_{i=1}^{n} P_i^2,$$

   alors on a aussi les deux égalités :

   (2) $$Q'^2 P = \sum_{i=1}^{n} P_i'^2 \quad \text{et}$$

   (3) $$QQ' = \sum_{i=1}^{n} (P_i - QQ_i)^2.$$

   *b.* On suppose, outre l'égalité (1), que $-1 \notin S_{n-1}(k)$, que $Q \neq 0$ et que $Q' = 0$. Prouver l'égalité :

   (4) $$P = \sum_{i=1}^{n} Q_i^2.$$

7. Soit $n \geqslant 2$ tel que $-1 \notin S_{n-1}(k)$ et soient $P, Q, P_1, \ldots, P_n$ dans A vérifiant l'égalité (1) ci-dessus et les conditions :

   (5) $$PQ \neq 0 \quad \text{et} \quad \deg Q \geqslant 1.$$

   Démontrer qu'on peut trouver $Q'', P''_1, \ldots, P''_n$ dans $A$ vérifiant :

   (6) $$Q''^2 P = \sum_{i=1}^{n} P_i''^2$$

   et

   (7) $$PQ'' \neq 0 \quad \text{et} \quad \deg Q'' < \deg Q.$$

   [*On pourra utiliser la question précédente en prenant pour* $Q_i$ *le quotient dans la division euclidienne de* $P_i$ *par* $Q$.]

8. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $S_n(A) = A \cap S_n(K)$.

9.*a.* Démontrer que les corps $k$ et $K$ ont même niveau.

   *b.* Supposant que ce niveau commun $s$ est fini, démontrer que $S_s(K) \neq S_{s+1}(K)$.

10. Établir que, si $n$ est une puissance de 2, alors l'ensemble $S_n(A)$ est multiplicatif.