Agrégation interne 1994, épreuve I

Ce travail fait à partir d'une photocopie peut présenter quelques erreurs, me les signaler à l'adresse suivante :
`jeaneric66(a)gmail.com` (changer (a) en @). Bon courage ! Version du 10 août 2011 à 10h22.

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$.
La norme du vecteur V est notée $\|V\|$. L'objectif des parties **I** et **II** est de montrer que, étant donné un entier $p \geqslant 1$ et des vecteurs $V_1,\ V_2,\ \dots, V_p$ de E tels que $V_1+V_2+\dots+V_p=S$, il existe une permutation σ des p premiers entiers telle que, pour tout k allant de 1 à p, on ait :

$$\left\|V_{\sigma(1)}+\dots+V_{\sigma(k)}\right\| \leqslant \|S\|+n.\sup_{1\leqslant i\leqslant p}\|V_i\|.$$

(La majoration est donc valable quel que soit le nombre p de vecteurs utilisés.)
La partie **III** est indépendante des deux premières ; dans la partie **IV**, on étudie une propriété des séris semi-convergentes par modification de l'ordre des termes.
Chaque fois qu'on utilise les coordonnées ou les composantes d'un vecteur d'un espace $\mathbb{R}^p$, il est *sous-entendu qu'il s'agit des coordonnées ou des composantes dans la base canonique.*

I
Propriété de l'intersection d'un sous-espace affine et d'un hypercube

Soient p et q deux entiers tels que $1 \leqslant q < p$ et $\mathscr{A}$ un sous-espace affine de $\mathbb{R}^p$.
On dit que $\mathscr{A}$ possède la propriété $\mathscr{P}_q$ si $\mathscr{A}$ contient un point A dont toutes les coordonnées appartiennent à l'intervalle $[0\,;1]$, q d'entre elles, au moins, valant 0 ou 1.
Soit alors $\mathscr{B}$ un sous-espace affine de $\mathbb{R}^p$, de dimension q, contenant un point B dont toutes les coordonnées sont dans $[0\,;1]$, on se propose de montrer que $\mathscr{B}$ possède la propriété $\mathscr{P}_q$.

1. Donner, sans démonstration, une interprétation géométrique de cette proposition, accompagnée d'une figure, dans chacun des cas suivant :
   a. $p=2\,;\ q=1$.
   b. $p=3\,;\ q=1$.
   c. $p=3\,;\ q=2$.
2. On prend $q=1$ et $p>q$; $\mathscr{B}$ est donc une droite passant par B.
   On désigne par $(b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_p)$ les coordonnées de B et par $(u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_p)$ les composantes d'un vecteur U directeur de $\mathscr{B}$.
   a. Soit I l'ensemble des réels λ tels que, pour i variant de 1 à p, $b_i+\lambda u_i \in [0\,;1]$.
      Montrer que I est égal à l'intersection non vide de p intervalles fermés de $\mathbb{R}$ dont l'un au moins est borné et en déduire que I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que l'on peut choisir λ de sorte que :
      Pour i de 1 à p, $b_i+\lambda u_i \in [0\,;1]$ et l'un au moins de ces p nombres vaut 0 ou 1.
   c. En conclure que $\mathscr{B}$ possède la propriété $\mathscr{P}_1$.
3. On suppose $q>1$.
   a. Montrer que $\mathscr{B}$ possède la propriété $\mathscr{P}_1$.

b. Montrer qu'il existe un vecteur V non nul, contenu dans la direction de $\mathscr{B}$, dont $q-1$ composantes d'indices arbitrairement choisis, les $q-1$ dernières par exemple, sont nulles. (On pourra considérer l'intersection de la direction de $\mathscr{B}$ avec le sous-espace engendré par les $p-q+1$ premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$.)

c. On suppose que $\mathscr{B}$ possède la propriété $\mathscr{P}_m$, avec $1 \leqslant m < q$.

En utilisant une droite passant par un point C bien choisi dans $\mathscr{B}$ et dirigé par un vecteur V bien choisi dans la direction de $\mathscr{B}$, montrer que $\mathscr{B}$ possède la propriété $\mathscr{P}_{m+1}$.

d. Conclure.

4. *Exemple :* on prend $p=4$ et $q=2$ et on donne le tableau T :

0,1	0	-2
0,4	2	1
0,3	-1	-3
0,6	2	5

La première colonne contient les coordonnées de B ; les deux autres contiennent les composantes de deux vecteurs formant une base de le direction de $\mathscr{B}$.

Par modification successives du contenu de T, construire un tableau T' contenant dans sa première colonne les coordonnées d'un point de $\mathscr{B}$ prouvant que $\mathscr{B}$ possède la propriété $\mathscr{P}_q$.

On se bornera à fournir les principaux tableaux intermédiaires en expliquant brièvement le passage d'un tableau au suivant.

5. *Application :* soit k un entier, $k > n$. $V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_k$ sont k vecteurs de E, formant un système de rang n ; W est également un vecteur de E. On désigne par $\mathscr{S}$ la partie de $\mathbb{R}^k$ constituées des k-uplets de réels $(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_k)$ tels que :

$$x_1V_1 + x_2V_2 + \cdots + x_kV_k = W.$$

a. Montrer que $\mathscr{S}$ est non vide.

b. Dans le cas où W est nul, montrer que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ et préciser sa dimension. On pourra utiliser l'application ℓ de $\mathbb{R}^k$ dans E qui, à $(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_k)$ associe, $x_1V_1 + x_2V_2 + \cdots + x_kV_k$.

c. Dans le cas général, montrer que $\mathscr{S}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^k$.

d. On suppose que $\mathscr{S}$ contient un k-uplet de réels appartenant tous appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.

Montrer qu'il existe aussi un k-uplet de réels de $[0\,;1]$, n d'entre eux, au plus, étant différents de 0 et 1.

II
Majoration en norme d'une somme de vecteurs

A. Vecteus de somme nulle. 1. Un exemple : on désigne par $z_1,\ z_2,\ \ldots, z_9$ les racines, dans le corps des complexes, de l'équation $z^9-1=0$.

Pour ℓ variant de 1 à 9, on associe à z_ℓ son image M_ℓ dans le plan complexe.

a. Montrer que $z_1 + z_2 + \cdots + z_9 = 0$.

b. Placer les points $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_9$ sur une figure.

c. Déterminer une permutation σ des neuf premiers entiers telle que, pour tout k compris entre 1 et 9, on ait :

$$\left\| \sum_{j=1}^{j=k} \overrightarrow{OM}_{\sigma(j)} \right\| \leqslant 2.$$

Dans la suite, $V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_p$ sont p vecteurs de E formant un système de rang n et tels que :

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_p = 0.$$

On rappelle que dim(E)=n.

2. Montrer que $p \geqslant n+1$. Vérifier que, si $p \leqslant 2n+1$, on a, pour tout k compris entre 1 et p :

$$\|V_1 + \cdots + V_k\| \leqslant n. \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} \|V_i\|.$$

Dans les trois questions suivantes, on se propose de généraliser cette propriété et on suppose $p > 2n+1$.

3. On désigne par $\mathscr{S}'$ la partie de $\mathbb{R}^p$ constituée des p-uplets de réels $(x_1,\ \ldots,\ x_p)$ vérifiant :

$$\begin{cases} x_1 V_1 + \cdots + x_p V_p = 0 \\ x_1 + \cdots + x_p = n+1. \end{cases}$$

a. Montrer que $\mathscr{S}'$ contient un p-uplet dont les éléments sont dans $[0\,;1]$.

b. Montrer que $\mathscr{S}'$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^p$. Quelles sont les dimensions possibles de $\mathscr{S}'$?

c. Montrer que $\mathscr{S}'$ contient un p-uplet $(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_p)$ de réels appartenant à $[0\,;1]$, dont les $n+1$ éléments, au plus, sont différents de 0 et 1, et que dans ce p-uplet, l'un des éléments au moins vaut 1.

Pour alléger les notations, on suppose dans la suite que $\alpha_p = 1$, ce qui revient à faire une permutation sur la liste des vecteurs initiaux $(V_1,\ \ldots,\ V_p)$.

4. a. Montrer qu'il existe des réels $\beta_1,\ \ldots,\ \beta_{p-1}$ appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$ tels que :

$$\begin{cases} \beta_1 V_1 + \cdots + \beta_{p-1} V_{p-1} = V_1 + \cdots + V_{p-1} \\ \beta_1 + \cdots + \beta_{p-1} = n+1. \end{cases}$$

On pourra chercher les β_i sous la forme $\beta_i = (1-\lambda)\alpha_i + \lambda$, où λ est un réel.

b. Justifier brièvement qu'il existe des réels $\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_{p-1}$ appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, l'un au moins valant 1, tels que :

$$\begin{cases} \gamma_1 V_1 + \cdots + \gamma_{p-1} V_{p-1} = V_1 + \cdots + V_{p-1} \\ \gamma_1 + \cdots + \gamma_{p-1} = n+1. \end{cases}$$

5. Montrer qu'il existe une permutation φ des $p-1$ premiers entiers telle que :

$$\left\| V_{\varphi(1)} + V_{\varphi(2)} + \cdots + V_{\varphi(p-1)} \right\| \leqslant n. \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} \|V_i\|.$$

On ne demande pas d'expliquer la suite du processus, qui permettrait, par compositions des permutations utilisées, d'obtenir une permutation σ des p premiers entiers telle que, pour tout entier k entre 1 et p on ait :

$$\left\| V_{\varphi(1)} + \cdots + V_{\varphi(p)} \right\| \leqslant n. \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} \|V_i\|.$$

B. Cas général. La somme $S = V_1 + \cdots + V_p$ est quelconque.

1. Si le système $(V_1,\ \ldots,\ V_p)$ est encore de rang n, exhiber un système, simple, de rang n, à $(p+1)$ vecteurs, auquel on pourra appliquer l'étude du A. précédent.

   On de demande pas comment il faudrait adapter cette étude pour obtenir une permutation σ des p premiers entiers telle que, pour tout entier k entre 1 et p on ait :

$$\left\| V_{\varphi(1)} + \cdots + V_{\varphi(p)} \right\| \leqslant \|S\| + n. \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} \|V_i\|.$$

2. Si le rang du système est strictement inférieur à n, le résultat précédent est-il encore valable ?

III
Parties convexes

le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E est noté $\vec{u}.\vec{v}$.

On désigne toujours par n la dimension de E. On munit E de sa structure canonique d'espace affine ; un élément de E peut donc être considéré soit comme un point, soit comme un vecteur. On rappelle que la distance du vecteur $\vec{u}$ à la partie $\mathscr{P}$ non vide de E est la borne inférieure de l'ensemble $\{\|\vec{u} - \vec{v}\|,\ \vec{v} \in \mathscr{P}\}$.

On considère une partie convexe non vide $\mathscr{C}$ de E. On suppose $\mathscr{C}$ distincte de E ; **on admettra** qu'il en résulte que l'adhérence $\overline{\mathscr{C}}$ de E est également une partie convexe de E, distincte de E.

1. Montrer qu'il existe un élément $\vec{u}$ de E dont la distance d à $\overline{\mathscr{C}}$ est strictement positive.
2. $\vec{u}$ étant choisi, montrer qu'il existe $\vec{v_0}$ appartenant à $\overline{C}$ tel que $\|\vec{v_0} - \vec{u}\| = d$.
3. On suppose qu'il existe un élément $\vec{v}$ de $\overline{\mathscr{C}}$ tel que $(\vec{v} - \vec{v_0}).(\vec{u} - \vec{v_0}) > 0$.

   Montrer l'existence d'un réel λ appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$ tel que $\|\vec{v_0} + \lambda(\vec{v} - \vec{v_0} - \vec{u}\| < d$.

   On pourra étudier, au voisinage de 0, la fonction qui, au réel λ, associe $\left\|\vec{v_0} - \vec{u} + \lambda(\vec{v} - \vec{v_0})^2\right\|$.

   En déduire que, pour tout élément $\vec{v}$ de $\overline{\mathscr{C}}$, on a $(\vec{v} - \vec{v_0}).(\vec{u} - \vec{v_0}) \leqslant 0$.
4. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{s}$ de E, non nul, et un réel μ, tels que, pour tout élément $\vec{v}$ de $\mathscr{C}$, on ait $\vec{v}.\vec{s} \leqslant \mu$.

IV
Modification de l'ordre des termes d'une série semi-convergente

Dans cette partie, on considère une suite $(V_k)k \in \mathbb{N}$ de vecteurs de l'espace normé E telle que la série de terme général V_k soit convergente.

1. U est un vecteur fixé de E.
   a. Montrer que l'application de E dans GR qui à V associe le produit scalaire $U.V$ est continue sur E.
   b. Montrer que la série de terme général (réel) $U.V_k$ est convergente.
2. Montrer que l'ensemble G des vecteurs U de E tels que la série de terme général (réel) $|U.V_k|$ soit convergente est un sous-espace vectoriel de E.

   Jusqu'à mention du contraire, on suppose que G est réduit au vecteur nul.
3. Soit p_0 un entier positif ou nul.

   On désigne par $\mathscr{C}_{p_0}$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont combinaisons linéaires, à coefficients dans $[0\,;1]$, de vecteurs V_k d'indice $k \geqslant p_0$:

$$\mathscr{C}_{p_0} = \{ \sum_{k=p_0}^{p} c_k V_k \mid p \geqslant p_0 \text{ et, pour } p_0 \leqslant k \leqslant p,\ c_k \in [0\,;1] \}.$$

a. Montrer que $\mathscr{C}_{p_0}$ est convexe.

b. Soit U un vecteur donné de E, non nul. Montrer qu'à tout entier $p \leqslant p_0$, on peut associer un vecteur W_p de $\mathscr{C}_{p_0}$ tel que :

$$\sum_{k=p_0}^{p} \frac{1}{2}\left(V_k.U + |V_k.U|\right) = W_p.U.$$

Montrer que la suite $(W_p.U)_{p \geqslant p_0}$ n'est pas majorée.

c. En déduire que $\mathscr{C}_{p_0}$ =E.

4. Montrer que la suite $(\|V_p\|)_{p \geqslant p_0}$ est bornée (p_0 désigne toujours un entier positif ou nul). On pose :

$$\lambda(p_0) = \sup_{p \geqslant p_0} \{\|V_p\|\}.$$

Montrer que $\lim_{p_0 \to +\infty} \lambda(p_0) = 0$.

La suite $(\lambda(p_0))_{p_0 \in \mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

5. Soit Γ un vecteur de E. Le but de cette question est de montrer qu'il existe une bijection ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la série de terme général $V_{\psi(k)}$ soit convergente avec $\sum_{k=0}^{\infty} V_{\psi(k)} = \Gamma$.

Soit p un entier supérieur ou égal à 1. Si $(a,\ b) \in \mathbb{N}^2$, on note $[\![a,b]\!] = \{m \in \mathbb{N}\ :\ a \leqslant m \leqslant b\}$.
On suppose qu'on a défini une application θ strictement croissante de $[\![0,p]\!]$ da,s $\mathbb{N}$ et une bijection ψ de $[\![0,\theta(p)]\!]$ dans $\mathbb{N}$ telles que, pour tout entier k (s'il en existe) vérifiant $\theta(p-1) < k < \theta(p)$ on ait :

$$\left\|\Gamma - \sum_{i=0}^{k} V_{\psi(i)}\right\| \leqslant (4n+2)\lambda(p-1).$$

On suppose aussi :

$$\left\|\Gamma - \sum_{i=0}^{\theta(p)} V_{\psi(i)}\right\| \leqslant (n+1)\lambda(p).$$

Enfin, on note $\mathscr{D}$ l'image de $[\![0,\theta(p)]\!]$ par ψ et on suppose que $0,\ 1,\ \ dots,\ p$ appartiennent à $\mathscr{D}$. On pose

$$\Gamma - \sum_{i=0}^{\theta(p)} V_{\psi(i)} = \Gamma_1.$$

Pour $p = 1$, θ et ψ vérifiant ces propriétés existent effectivement ; **on l'admettra**.

a. Montrer qu'il existe un entier q, des entiers $\ell_1,\ \ldots,\ \ell_p$ tous différents n'appartenant pas à $\mathscr{D}$ et des réels $x_{\ell_1},\ \ldots,\ x_{\ell_q}$ appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$ tels que $\Gamma_1 = \sum_{i=1}^{q} x_{\ell_i} V_{\ell_i}$, le nombre de coefficients x_{ℓ_i} différents de 0 et de 1 étant inférieur ou égal à n.

b. On note s le nombre des entiers ℓ_i tels que $x_{\ell_i} = 1$ et on pose $\theta(p+1) = \theta(p) + s + 1$.
Si s est non nul, on suppose en outre que $\ell_1,\ \ldots,\ \ell_q$ on été rangé de sorte que $x_{\ell_1} = \cdots = x_{\ell_s} = 1$ et on prolonge ψ en posant $\psi(\theta(p)+1) = \ell_1,\ \ldots,\ \psi(\theta(p)+s) = \ell_s$; montrer que, si $(\ell_1,\ \ldots,\ \ell_s)$ ont été convenablement rangés, on a, pour tout k de 1 à s :

$$\left\|\sum_{i=\theta(p)+1}^{\theta(p)+s} V_{\psi(i)}\right\| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{s} V_{\ell_i}\right\| + n\lambda(p)\ ; \qquad \left\|\Gamma_1 - \sum_{i=\theta(p)+1}^{\theta(p)+s} V_{\psi(i)}\right\| \leqslant 2\|\Gamma_1\| + 2n\lambda(p)$$

et

$$\left\| \Gamma - \sum_{i=0}^{\theta(p)+k} V_{\psi(i)} \right\| \leqslant (4n+2)\lambda(p).$$

c. On prolonge ψ en prenant pour $\psi(\theta(p+1))$ le plus petit entier tel que ψ soit injective. Montrer que les propriétés supposées vérifiées par θ et ψ au rang p le sont aussi par leurs prolongements au rang $p+1$.

d. Conclure brièvement.

6. On suppose dans cette question que G n'est pas réduit au vecteur nul et on désigne par $G^{\perp}$ son supplémentaire orthogonal.

Pour tout entier p, on définit les vecteurs V'_P et V''_p par :

$$V_p = V'_p + V''_p, \qquad V'_p \in G, \qquad V''_p \in G^{\perp}.$$

a. Montrer que la série de terme général (réel) $\left\| V'_p \right\|$ est convergente.

On admet alors le résultat suivant : pour tout bijection φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la série de terme général $V'_{\varphi(p)}$ est convergente et $\sum\limits_{p=0}^{\infty} V'_{\varphi(p)} = \sum\limits_{p=0}^{\infty} V'_p$.

b. Montrer que la série de terme général V''_p est convergente.

c. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des vecteurs Γ de E tels qu'il existe une bijection ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ pour laquelle la série de terme général $V_{\psi(p)}$ est convergente, de somme Γ.

Montrer que $\mathscr{D}$ est un sous-espace affine de E. Préciser sa direction.