première épreuve de mathématiques

Durée : 6 heures

Notations :

- Pour n entier ≥ 1 , on note $\mathbb{N}_n$ l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$) désigne l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).
- Si $n = p$ on écrit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, tA désigne selon l'usage la matrice transposée de A , et $|A|$ la matrice de coefficient générique $|a_{i,j}|$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $P_A = \det(XI_n - A)$ le polynôme caractéristique de A .
- La matrice diagonale $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ sera notée $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Convention :

On identifie $\mathbb{C}^p$ à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, et pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, et $x \in \mathbb{C}^p$, $(Ax)_i$ désigne le i -ième coefficient de la matrice unicolonne Ax .

Définitions :

(1). Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On écrit : $A \leq B$ (resp. $A < B$) si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p, a_{i,j} \leq b_{i,j} \text{ (resp. } \forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p, a_{i,j} < b_{i,j} \text{)}.$$

(2). A est dite positive lorsque $[0] \leq A$, i.e. :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p, a_{i,j} \geq 0.$$

A est dite strictement positive lorsque $[0] < A$, i.e. :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p, a_{i,j} > 0.$$

(3). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $P_A(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ (i.e. les valeurs propres, non nécessairement distinctes, de A sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$), le réel positif $\rho(A) = \text{Max}_{i \in \mathbb{N}_n} |\lambda_i|$ est appelé rayon spectral de A .

Préliminaires

1. Soient $(A, A') \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^p$.

Vérifier les assertions suivantes :

- i. $|A + A'| \leq |A| + |A'|$, $|AB| \leq |A| |B|$.
- ii. $|Ax| \leq |A| |x|$ et, de plus, si $0 < A$, $0 \leq x$ et $x \neq 0$, alors : $Ax > 0$.
- iii. Si $0 \leq A$ et $0 < x$, l'égalité $Ax = 0$ implique $A = 0$.

2. i. Soient z et z' des complexes tels que $|z + z'| = |z| + |z'|$, avec $z \neq 0$. Montrer que :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+, z' = \alpha z.$$

- ii. En déduire que si $z_1, \dots, z_n$ sont n nombres complexes ($n \geq 2$) tels que $|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|$, alors :

$$\exists \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_n, \quad z_k = e^{i\theta} |z_k|.$$

- iii. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $0 < A$.

Soit $x \in \mathbb{C}^n$. Montrer que :

$$|Ax| = A|x| \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} \quad x = e^{i\theta} |x|.$$

3. Soit $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $A = |F|$. Montrer que s'il existe $x \in \mathbb{R}^n$, avec $0 < x$, tel que $Ax = Fx$, alors on a $A = F$.

4. Une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite sous-multiplicative si :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \|x\| = \sup_{j \in \mathbb{N}_n} |x_j|$.

- i. Justifier brièvement que l'application :

$$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ définie par } \|A\|_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

- ii. On pose : $A = (a_{i,j})$. Vérifier que :

$$\|A\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}_n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right).$$

- iii. Montrer que la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est sous-multiplicative.

Étude du rayon spectral d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Dans toute la suite du problème, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- i. Montrer qu'il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $AX = \lambda X$.

- ii. En déduire que $\rho(A) \leq \|A\|$.

2. Soit S une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- i. Comparer $\rho(A)$ et $\rho(S^{-1}AS)$.

- ii. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho(A^k) = [\rho(A)]^k$, et en déduire que $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$.

- iii. Montrer que l'application $N : X \mapsto \|S^{-1}XS\|$ est encore une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. On considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $T = (t_{ij})$ une matrice triangulaire semblable à A .

- i. Calculer la matrice $\Delta^{-1}T\Delta$, avec $\Delta = \text{diag}(1, d, \dots, d^{n-1})$ où $d > 0$.

ii. En déduire l'existence d'une norme sous-multiplicative N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$N(A) \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

i. On suppose $\rho(A) < 1$. Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$.

ii. Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) = 1$ et que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ne soit pas bornée.

iii. Montrer que $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{1/k}$. Pour cela, $\varepsilon > 0$ étant fixé, on considérera la matrice

$$A_\varepsilon = \frac{1}{\rho(A) + \varepsilon} A, \text{ et on utilisera II.4.i.}$$

5. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $|A| \leq B$.

i. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $|A^k| \leq |A|^k \leq B^k$.

ii. En déduire que $\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B)$.

Propriétés des matrices carrées réelles positives

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ positive ($A \geq 0$ ou $\forall (i, j), a_{i,j} \geq 0$).

1. On suppose, dans cette question III.1 seulement, que la matrice A vérifie :

$$\exists s \in \mathbb{R}_+, \forall i \in \mathbb{N}_n, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = s.$$

Montrer que s est une valeur propre de A et que :

$$\rho(A) = s = \|A\|_\infty.$$

2. On pose $\alpha = \inf_{i \in \mathbb{N}_n} \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \right)$ et $\beta = \sup_{i \in \mathbb{N}_n} \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \right) = \|A\|_\infty$.

i. Trouver une matrice $B = (b_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $0 \leq B \leq A$ et que : $\forall i \in \mathbb{N}_n, \sum_{j=1}^n b_{i,j} = \alpha$.

ii. En déduire l'encadrement : $\alpha \leq \rho(A) \leq \beta$.

3. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 < x$.

On pose $D_x = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$.

Calculer la matrice $D_x^{-1} A D_x$ et en déduire l'encadrement :

$$\inf_{i \in \mathbb{N}_n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \sup_{i \in \mathbb{N}_n} \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

4. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 < x$, et r un réel positif ou nul.

i. Montrer que si $Ax = rx$ alors $\rho(A) = r$.

ii. Comparer $\rho({}^t A)$ et $\rho(A)$ et en déduire que si ${}^t x A = r {}^t x$, alors $\rho(A) = r$.

5. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 < x$.

On désigne par α et β deux réels positifs ou nuls.

i. Montrer les implications :

$$\alpha x \leq Ax \text{ (resp. } < Ax) \Rightarrow \alpha \leq \rho(A) \text{ (resp. } < \rho(A)).$$

$$Ax \leq \beta x \text{ (resp. } < \beta x) \Rightarrow \rho(A) \leq \beta \text{ (resp. } < \beta).$$

ii. En déduire les implications :

$$\alpha {}^t x \leq {}^t x A \text{ (resp. } < {}^t x A) \Rightarrow \alpha \leq \rho(A) \text{ (resp. } < \rho(A)).$$

$${}^t x A \leq \beta {}^t x \text{ (resp. } < \beta {}^t x) \Rightarrow \rho(A) \leq \beta \text{ (resp. } < \beta).$$

Étude des matrices carrées réelles strictement positives

On suppose que $A = (a_{ij})$ est une matrice strictement positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($A > 0$, ou $\forall (i, j) \ a_{ij} > 0$).
On pose $r = \rho(A)$.

1. Vérifier que l'on a $r > 0$.

2. Soit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \leq y$ et $y \neq 0$.

On suppose que $ry \leq Ay$.

i. On pose $v = Ay$ et $z = Ay - ry$. Vérifier que $v > 0$ et montrer que la relation $rv < Av$ est impossible.

ii. En déduire que : $ry = Ay$.

3. Soit x un vecteur propre (non nul) associé à une valeur propre λ de A vérifiant $|\lambda| = r$.

i. Montrer que $A|x| = r|x|$ et en déduire que $|x| > 0$.

ii. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^{i\theta}|x|$.

4. i. Déduire de ce qui précède que r est effectivement valeur propre de A , et qu'il s'agit de l'unique valeur propre de A de module égal à r .

ii. Montrer que le sous-espace propre $\text{Ker}(rI_n - A)$ associé à r est une droite vectorielle engendrée par un vecteur $v > 0$.

(Pour cela, on pourra raisonner par l'absurde en supposant $\dim \text{Ker}(rI_n - A) \geq 2$.)

5. On fixe $v > 0$, vecteur directeur de $\text{Ker}(rI_n - A)$. Montrer qu'il existe un unique vecteur $w \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$w > 0; \quad {}^t w A = r {}^t w; \quad {}^t w v = 1.$$

Étude des matrices carrées positives et irréductibles

A. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive ($A \geq 0$).

Dans les questions 1. et 2. on suppose, en outre, que A satisfait à la condition suivante :

$r = \rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module égal à r , $\text{Ker}(rI_n - A)$ est une droite vectorielle engendrée par un vecteur $v > 0$. Pour chaque choix de v , il existe un unique vecteur $w \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$w > 0; \quad {}^t w A = r {}^t w; \quad {}^t w v = 1.$$

Maths 1 5/6

1. On pose $L = v \cdot w$.

- i. Montrer que L est indépendante du choix de v , et que c'est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ strictement positif et de rang 1.
- ii. Décrire géométriquement l'endomorphisme $L : x \mapsto Lx$ de $\mathbb{C}^n$ à l'aide de la droite vectorielle $\mathbb{C} \cdot v$ et de l'hyperplan $H = \{x \in \mathbb{C}^n : w \cdot x = 0\}$.

2. i. Montrer que H est stable par A et que si x est un vecteur non nul de H tel que $Ax = \mu x$ ($\mu \in \mathbb{C}$) alors $|\mu| < r$.

ii. En déduire que dans une base convenable $\mathcal{Q}$ de $\mathbb{C}^n$ l'endomorphisme $x \mapsto Ax$ a une matrice A' de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{matrix} \hline B \end{matrix} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \text{ avec } B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C}), \text{ et } \rho(B) < r.$$

Vérifier que r est racine simple du polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A .

iii. Calculer $L' = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{A'}{r}\right)^k$ et décrire géométriquement l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{Q}$ de $\mathbb{C}^n$ est L' .

iv. En déduire que $L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{A}{r}\right)^k$ et qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, on ait $A^k > 0$.

3. Dans cette question $A \geq 0$ est une matrice carrée positive quelconque.

i. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A(\varepsilon) = A + \varepsilon J$.

Montrer que la fonction $f : \varepsilon \mapsto \rho(A(\varepsilon))$ est croissante sur $]0, +\infty[$ et a une limite $\ell \geq \rho(A)$ lorsque ε tend vers 0 par valeurs supérieures.

ii. Montrer que $f(\varepsilon) = \rho(A(\varepsilon))$ est une valeur propre de $A(\varepsilon)$ et qu'il existe un unique vecteur propre, noté $x(\varepsilon)$, associé à cette valeur propre et appartenant à l'ensemble :

$$K = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n : x \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

iii. En déduire qu'il existe $x \in K$ tel que $Ax = \ell x$. Comparer ℓ et $\rho(A)$.

B. On suppose que $n \geq 2$ et que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive.

On appelle sous-espace de coordonnées associé à une partie I de $\mathbb{N}_n$ le sous-espace vectoriel suivant de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^I = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \forall j \in \mathbb{N}_n \setminus I, x_j = 0 \right\}.$$

La matrice A est dite irréductible si les seuls sous-espaces de coordonnées stables par A sont :

$$\{0\} = \mathbb{R}^0 \quad \text{et} \quad \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\mathbb{N}_n}.$$

Dans le cas contraire A est dite réductible.

Soit d'autre part $(i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{L}(i, j, m)$ la proposition :

$$\exists (i_0, \dots, i_m) \in (\mathbb{N}_n)^{m+1} : \begin{cases} i_0 = i, i_m = j \\ \text{et } \forall k \in \{0, \dots, m-1\}, a_{i_k, i_{k+1}} \neq 0 \end{cases}$$

et $\mathcal{L}(i, j)$ la proposition :

$$\exists m \in \mathbb{N}^*, \mathcal{L}(i, j, m) \text{ est vraie.}$$

1. i. Vérifier que A est réductible si et seulement si il existe une partition non triviale (I, J) de $\mathbb{N}_n$ ($I \neq \emptyset, J \neq \emptyset, I \cap J = \emptyset, I \cup J = \mathbb{N}_n$) telle que :

$$\forall (i, j) \in I \times J : a_{i,j} = 0.$$

Montrer que dans cette situation, pour tout couple $(i, j) \in I \times J$, $\mathcal{L}(i, j)$ n'est pas vraie.

- ii. Soit $j \in \mathbb{N}_n$. On pose $\mathcal{J}_j = \{j\} \cup \{j' \in \mathbb{N}_n, \mathcal{L}(j', j) \text{ est vraie}\}$.

Montrer que $\mathbb{R}^{\mathcal{J}_j}$ est stable par A.

- iii. Dédire de ce qui précède l'équivalence :

$$A \text{ irréductible} \iff \text{Pour tout } (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n, \mathcal{L}(i, j) \text{ est vraie.}$$

2. On suppose que $\mathcal{L}(i, j)$ est vraie, avec $i \neq j$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}_{n-1}$ tel que $\mathcal{L}(i, j, m)$ soit vraie.

3. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $A^m = (a_{ij}^m)$.

- i. Établir une relation de récurrence entre a_{ij}^m et les a_{kl}^{m-1} , et montrer que pour $i \neq j$ on a l'équivalence :

$$\mathcal{L}(i, j, m) \text{ est vraie} \iff a_{ij}^m > 0.$$

- ii. En conclure que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

a. la matrice A est irréductible;

b. pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$ tel que $i \neq j$, il existe $m \in \mathbb{N}_{n-1}$ tel que : $a_{ij}^m > 0$;

c. $(I + A)^{n-1} > 0$; critère d'irréductibilité.

On pose à nouveau $r = \rho(A)$.

4. i. Dédire de V.A.3.iii. que $\rho(I_n + A) = 1 + r$ et que $\rho(I_n + A)^{n-1} = (1 + r)^{n-1}$.

- ii. On suppose que A est irréductible. Montrer que $(1 + r)^{n-1}$ est une racine simple de $P_{I_n + A}^{n-1}$. En déduire que r est une racine simple de P_A et que, de plus, $r > 0$.

- iii. On suppose encore que A est irréductible. Montrer que le sous-espace propre $\text{Ker}(rI_n - A)$ associé à r est une droite vectorielle engendrée par un vecteur $v > 0$.

5. On dit que la matrice $A \geq 0$ est primitive s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k > 0$.

- i. Montrer que si A est primitive, alors r est l'unique valeur propre de A de module égal à r et que, de plus, A est irréductible.

- ii. Réciproquement, montrer que si A est irréductible et si r est l'unique valeur propre de A de module égal à r, alors A est primitive.

- iii. Montrer que la matrice carrée $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ est primitive ($A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \geq 2$).