

Agrégation interne de Mathématiques

(et CAERPA)

Session 2003

Première épreuve écrite

DODÉCAÈDRE

Si z est un nombre complexe, son conjugué est noté \bar{z} . $Re(z)$ désigne sa partie réelle.

Le produit scalaire de deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} d'un espace vectoriel euclidien E est noté $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ et la norme associée est notée $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$.

$SO(E)$ désigne le groupe des isométries directes (i.e. de déterminant égal à $+1$) de l'espace euclidien E , et 1_E l'application identique de E dans lui-même.

La distance entre deux points M et N d'un espace affine euclidien est notée $\|\overrightarrow{MN}\|$.
Si n est élément de \mathbb{N}^* , $[1..n]$ désigne l'ensemble des entiers naturels de 1 à n .

Préambule. Rappels sur les isométries directes en dimension trois

E désigne ici un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois et $GL(E)$ désigne le groupe des automorphismes de E .

Soit f un élément de $GL(E)$, soit $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ une base orthonormée directe et soit M la matrice représentant f dans la base \mathcal{B} . On rappelle que f est élément de $SO(E)$ si et seulement si la matrice M est orthogonale directe. Dans ce cas, et sous réserve que f ne soit pas égal à 1_E , f est une rotation ; elle est alors caractérisée par un axe, déterminé et orienté par un vecteur \mathbf{u} non nul, et un angle θ , orienté autour de cet axe, déterminé par sa mesure, encore notée θ , qui est un réel défini à 2π près. On note alors : $f = Rot(\mathbf{u}, \theta)$.

1. On pose $M = [m_{i,j}]$ pour $(i, j) \in [1..3]^2$.

Rappeler des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les coefficients de M pour qu'elle soit orthogonale directe.

Dans les trois questions qui suivent, on suppose que f n'est pas égale à 1_E et que les conditions précédentes sont réalisées.

2. Indiquer comment trouver un vecteur \mathbf{u} .
3. Montrer que la trace de la matrice M vérifie :

$$tr(M) = 1 + 2 \cos \theta$$

À quelle condition f est-elle un demi-tour ?

4. On suppose que f n'est pas un demi-tour ; soit \mathbf{v} un vecteur quelconque non colinéaire à \mathbf{u} . Montrer que le produit mixte $(\mathbf{v}, f(\mathbf{v}), \mathbf{u})$ est non nul et que son signe est celui de $\sin \theta$.

Partie I . Étude du pentagone régulier

E désigne, dans cette partie seulement, un espace vectoriel euclidien de dimension deux.

On pose :

$$\omega = e^{2i\pi/5}$$

Soit \mathcal{P} un plan affine euclidien associé à E et soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un élément de \mathcal{P}^5 . On dit que les cinq points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 pris dans cet ordre forment un *pentagone régulier* si et seulement si il existe un point O de \mathcal{P} , un réel strictement positif r , et un repère orthonormé $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ de \mathcal{P} tels que les cinq points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 aient respectivement pour affixes les complexes :

$$r\omega^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

O , r et le repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ sont alors déterminés de manière unique. On appellera dans la suite pentagone régulier noté plus brièvement $A_0A_1A_2A_3A_4$ tout à la fois l'ensemble ordonné des cinq points ainsi obtenus et appelés *sommets* du pentagone régulier dans \mathcal{P} et l'ensemble ordonné des vecteurs $\overrightarrow{OA_0}, \dots, \overrightarrow{OA_4}$ de E .

On dit alors que, pour k variant de 0 à 3, A_k et A_{k+1} sont des sommets *consécutifs*, ainsi que A_4 et A_0 . O est le *centre* du pentagone régulier.

1. On suppose ici $r = 1$ et on pose : $a' = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \operatorname{Re}(\omega)$.

(a) Montrer que ω vérifie la relation :

$$1 + (\omega + \bar{\omega}) + (\omega^2 + \bar{\omega}^2) = 0$$

En déduire que : $a' = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

(b) On pose $a = 2a'$ et $b = \frac{1}{a}$. Montrer que a est solution d'une équation du second degré à coefficients dans \mathbb{Z} ; montrer qu'il en est de même pour b .

(c) Calculer $a, b, ab, a + b, b - a$ et $a^2 + b^2$.

(On mettra les résultats sous la forme $x + y\sqrt{5}$ avec x et y rationnels.)

(d) Calculer en fonction de b le rapport :

$$p = \frac{\|\overrightarrow{A_0A_2}\|}{\|\overrightarrow{A_0A_1}\|}$$

(e) Montrer que :

$$\|\overrightarrow{A_0A_1}\| = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

2. Soit $(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4)$ un élément de \mathcal{P}^5 tel que les points M_k , pour k variant de 0 à 4, soient deux à deux distincts; il résulte de ce qui précède que les conditions (a) et (b) suivantes sont nécessaires pour que $M_0M_1M_2M_3M_4$ soit un pentagone régulier :

(a) Il existe un point O de \mathcal{P} et un réel strictement positif r tels que les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 appartiennent au cercle de centre O et de rayon r .

(b) Les distances $\|\overrightarrow{M_0M_1}\|, \|\overrightarrow{M_1M_2}\|, \|\overrightarrow{M_2M_3}\|, \|\overrightarrow{M_3M_4}\|, \|\overrightarrow{M_4M_0}\|$ sont toutes égales.

Montrer qu'elles ne sont pas suffisantes (si $(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4)$ définit un pentagone régulier, on pourra considérer $(M_0, M_2, M_4, M_1, M_3)$); montrer que c'est toutefois bien le cas si on précise dans la condition (b) que ces distances sont égales à :

$$\frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

(on pourra étudier à l'aide de coordonnées polaires la fonction $M \mapsto \|\overrightarrow{M_0M}\|$ définie sur un demi-cercle dont M_0 est l'une des extrémités).

3. On désigne par Γ l'ensemble des déplacements de \mathcal{P} conservant l'ensemble des cinq sommets d'un pentagone régulier.

(a) Montrer que les éléments de Γ autres que l'identité sont des rotations de centre O et que Γ est un sous-groupe du groupe $\operatorname{Isom}^+(\mathcal{P})$ des déplacements de \mathcal{P} .

(b) Montrer que Γ est isomorphe à un sous-groupe de $SO(E)$. Déterminer le cardinal de Γ .

- (c) Montrer que Γ est cyclique. Par lesquels de ses éléments est-il engendré ?

Partie II. Mise en place du dodécaèdre

Pour toute la suite du problème, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois et \mathcal{E} est un espace affine euclidien associé à E , rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. On ne manquera pas, pour tout ce qui suit, de se rapporter, pour plus de commodité, au dessin fourni à la fin de l'énoncé.

On définit les huit sommets $ABCD A' B' C' D'$ d'un cube noté \mathcal{C}_0 comme suit par leurs coordonnées dans le repère \mathcal{R} :

$$A = (1, 1, 1), B = (-1, 1, 1), C = (-1, -1, 1), D = (1, -1, 1)$$

A', B', C', D' désignent leurs symétriques respectifs par rapport à O .

1. (a) Montrer l'existence d'un point unique $J = (a, 0, b')$ avec $b' > 1$ tel que

$$\|\overrightarrow{JA}\| = \|\overrightarrow{JD}\| = 2a$$

et exprimer b' en fonction de b .

- (b) I désigne le transformé de J dans le demi-tour d'axe (O, \mathbf{k}) . I' et J' sont les transformés respectifs de I et J dans la symétrie par rapport à O . Déterminer les points I, I', J' par leurs coordonnées dans \mathcal{R} .
2. On définit de même K, L, M, N ainsi que leurs symétriques respectifs K', L', M', N' par rapport à O par les conditions suivantes :
- (a) $\overrightarrow{KL} = 2a\mathbf{j}$, $\|\overrightarrow{KB'}\| = \|\overrightarrow{KD}\| = 2a$, K et L se correspondent dans le demi-tour d'axe $(0, \mathbf{i})$ et la première coordonnée de K est supérieure à 1.
- (b) $\overrightarrow{MN} = 2a\mathbf{k}$, $\|\overrightarrow{NA}\| = \|\overrightarrow{NB}\| = 2a$, M et N se correspondent dans le demi-tour d'axe $(0, \mathbf{j})$ et la seconde coordonnée de N est supérieure à 1.

Préciser en fonction de a et b les coordonnées de ces huit nouveaux points.

3. L'ensemble des vingt points $A, B, C, D, I, J, K, L, M, N, A', B', C', D', I', J', K', L', M', N'$ ainsi définis déterminent un *dodécaèdre* qui sera considéré à la fois comme ensemble de vingt points de \mathcal{E} appelés *sommets* ou comme ensemble de vingt vecteurs de E : $\overrightarrow{OA}, \dots, \overrightarrow{ON}'$.

On dira que deux sommets sont *opposés* si et seulement si ils se correspondent dans la symétrie par rapport à O ; ainsi, les paires $\{A, A'\}, \{B, B'\}, \dots, \{N, N'\}$ sont formées de sommets deux à deux opposés.

On dit que le cube $\mathcal{C}_0 = ABCD A' B' C' D'$ est *inscrit* dans le dodécaèdre.

On appelle *face* du dodécaèdre l'un des douze sous-ensembles ordonnés de sommets suivants :

$$AJDKL, LKB'I'C', ALC'MN, NMD'K'B, ANBIJ, MC'I'J'D'$$

ainsi que les six autres obtenus par symétrie par rapport à O .

Montrer que les points $AJDKL$ appartiennent à un même plan et donner une équation de ce plan.

(On pourra commencer par établir qu'une telle équation est de la forme $\alpha x + \beta z = \gamma$ puis déterminer les coefficients en fonction de a et b .) Donner de même une équation de la face $ANBIJ$.

4. (a) Déterminer les coordonnées de O_1 , isobarycentre de la face $AJDKL$ et de O_2 , isobarycentre de la face $ANBIJ$.
(N.B. On laissera ces coordonnées sous la forme $x + y\sqrt{5}$ avec x et y rationnels).

- (b) Vérifier que $\overrightarrow{OO_1}$ définit un vecteur normal à la face $AJDKL$.
- (c) Montrer que la face $AJDKL$ du dodécaèdre est un pentagone régulier (on pourra utiliser la question I.2). Il en est de même pour les autres faces, ce que l'on admettra.
- (d) Déterminer par son cosinus l'angle (non orienté) des vecteurs $\overrightarrow{OO_1}$ et $\overrightarrow{OO_2}$.

Partie III. Matrice de Gram et isométries

1. On appelle *simplexe* un triplet de vecteurs $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ})$, déterminé par trois sommets consécutifs X, Y, Z de l'une des faces du dodécaèdre et pris dans un ordre tel que $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ})$ soit une base directe de E . Un tel simplexe est noté $[XYZ]$. Ainsi $[AJD]$ est un simplexe. Combien les sommets du dodécaèdre déterminent-ils de simplexes?
2. On appelle *matrice de Gram* associée à un triplet $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ d'éléments de E la matrice :

$$Gram(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = [g_{i,j}]$$

de coefficient générique $g_{i,j}$, $(i, j) \in [1..3]^2$, défini par :

$$\forall (i, j) \in [1..3]^2, g_{i,j} = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle$$

Calculer la matrice de Gram associée au simplexe $[AJD]$; on donnera ses coefficients sous la forme $x + y\sqrt{5}$ avec x et y entiers.

N.B. On pourra admettre que tous les simplexes définissent la même matrice de Gram, notée \mathcal{G} .

3. (a) Montrer qu'étant donné deux des simplexes précédents, soit $\mathcal{S} = [XYZ]$ et $\mathcal{S}' = [X'Y'Z']$, il existe un automorphisme $f_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}'}$ unique de E transformant le premier en le second.
- (b) Montrer que cet automorphisme est orthogonal, i.e. qu'il vérifie :

$$\forall \mathbf{u} \in E, \|f_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}'}(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$$

On pourra utiliser l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} définie par :

$$(x, y, z) \mapsto \|x\overrightarrow{OX'} + y\overrightarrow{OY'} + z\overrightarrow{OZ'}\|^2$$

en exprimant sa valeur à l'aide de la matrice \mathcal{G} et de la matrice colonne :

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- (c) Montrer que $f_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}'}$ est une rotation.
- (d) On désigne par G l'ensemble des automorphismes directs de E conservant le dodécaèdre, considéré ici comme ensemble des vecteurs

$$\overrightarrow{OA}, \dots, \overrightarrow{ON'}$$

On pourra admettre que les faces du dodécaèdre sont transformées en des faces par les éléments de G .

Montrer que G est un sous-groupe de $SO(E)$ de cardinal au plus égal à 60.

4. On considère les endomorphismes r , s et t de E définis par leurs matrices respectives dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b & -1 & a \\ 1 & a & -b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$T = SR = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ a & -b & 1 \\ b & 1 & a \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que r , s et t sont des rotations qu'on écrira sous la forme $Rot(\mathbf{u}, \theta)$ en précisant \mathbf{u} et θ dans chaque cas.
N.B. On choisira dans chaque cas un vecteur \mathbf{u} dont la troisième coordonnée soit positive et on désignera par Ω le milieu de AJ .
- (b) Dire brièvement ce que sont les effets respectifs de ces rotations sur le simplexe $[AJD]$.
- (c) Quels sont les ordres respectifs de ces rotations dans le groupe $SO(E)$?
5. (a) On donnera sous forme d'un tableau à double entrée à trois lignes et douze colonnes la liste des transformés respectifs de $ABCDEFGHIJKLMN$ par r , s et t (on ne fera pas figurer les éventuels calculs sur la copie).
- (b) Préciser comment obtenir simplement les transformés des dix autres points à l'aide du tableau précédent.
- (c) En déduire que r, s, t sont bien des éléments de G .
6. En mettant brièvement en évidence d'autres éléments de G analogues à r, s, t , en déduire que le cardinal de G est égal à 60.

Partie IV. Isomorphisme de G et de \mathcal{A}_5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La notation \mathcal{S}_n désigne le groupe des permutations de l'ensemble $[1..n]$. ε désigne l'unique morphisme surjectif du groupe \mathcal{S}_n sur le groupe multiplicatif à deux éléments $U_2 = \{-1, 1\}$ et qui prend la valeur -1 pour les transpositions. Si σ est un élément quelconque de \mathcal{S}_n , $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ .

La notation \mathcal{A}_n désigne le groupe des permutations paires de l'ensemble $[1..n]$; c'est le noyau de ε . Si p est un entier au moins égal à 2 et au plus égal à n , et si a_1, a_2, \dots, a_p sont des éléments distincts de $[1..n]$, la notation (a_1, a_2, \dots, a_p) désigne le p -cycle envoyant a_i sur a_{i+1} pour i variant de 1 à $p-1$ et a_p sur a_1 , les autres éléments étant fixes.

Ces notions et notations s'étendent au cas du groupe des permutations d'un ensemble quelconque fini non vide.

Si $ABCDE$ est un pentagone régulier, on appelle diagonale du pentagone tout segment déterminé par deux sommets non consécutifs; ainsi, chaque pentagone régulier possède cinq diagonales.

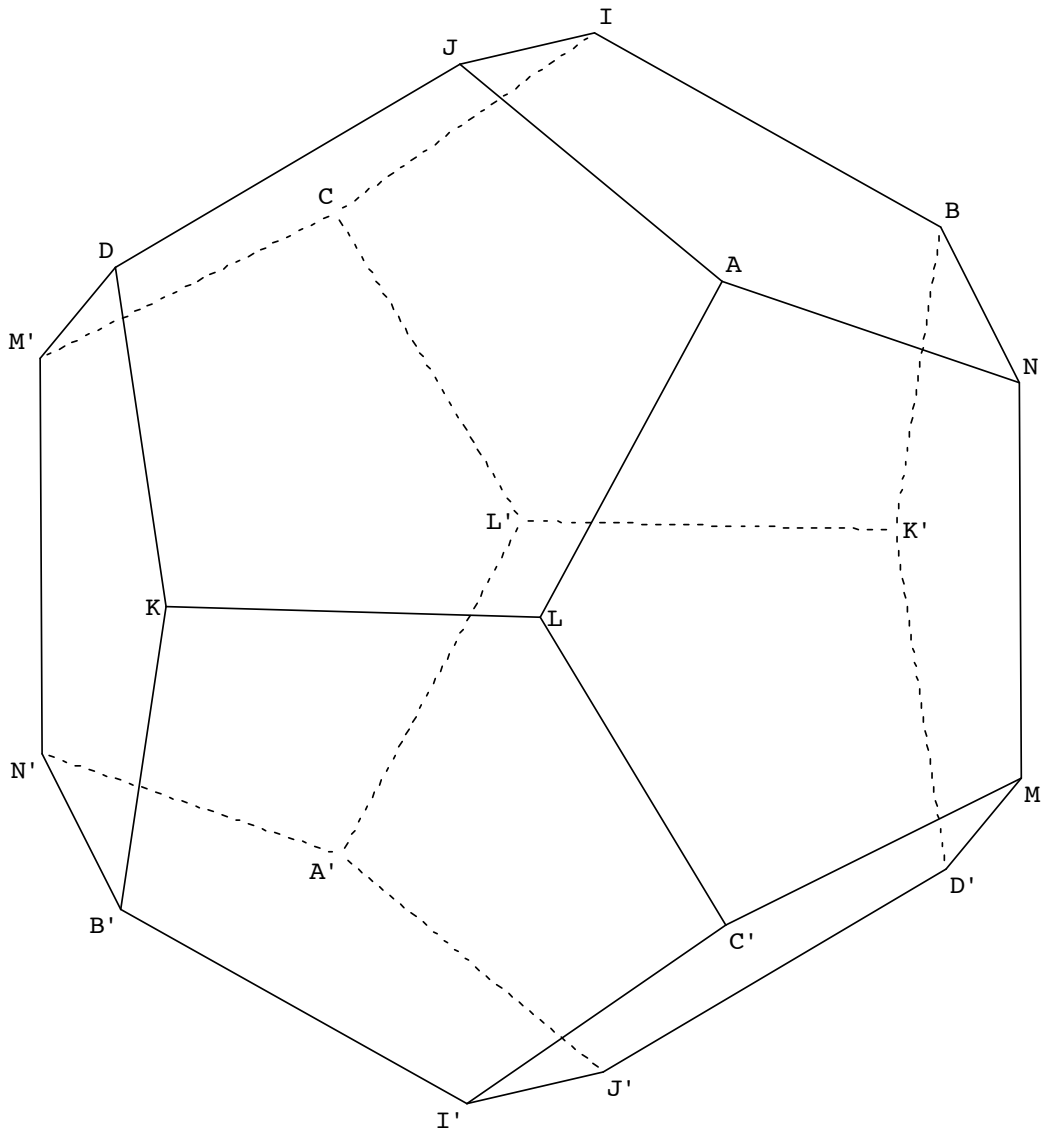
- Rappeler sans démonstration le cardinal de \mathcal{A}_5 .
- On appelle *f-diagonale* du dodécaèdre une diagonale de l'une quelconque des faces du dodécaèdre. Ainsi, AB, BD', KJ sont par exemple des f-diagonales. On désigne par \mathcal{D} l'ensemble des f-diagonales.
 Quel est le cardinal de \mathcal{D} ?

3. On met ici en évidence l'existence de cinq cubes inscrits dans le dodécaèdre. Le cube initial est noté $\mathcal{C}_0 = ABCDA'B'C'D'$.
- On désigne par $\mathcal{C}_i, i = 1, 2, 3, 4$ le cube déduit de \mathcal{C}_0 par s^i . Montrer qu'on obtient ainsi cinq cubes distincts inscrits dans le dodécaèdre et que chaque arête de l'un de ces cinq cubes est un élément de \mathcal{D} .
 - Montrer que chaque élément de \mathcal{D} est arête de l'un de ces cinq cubes et un seul (on pourra raisonner sur la seule f-diagonale AD).
 - En déduire que les cinq cubes \mathcal{C}_i sont les seuls cubes de centre 0 et isométriques à \mathcal{C}_0 inscrits dans le dodécaèdre.
4. (a) Montrer que tout élément f de G permute l'ensemble \mathcal{K} des cinq cubes précédents. On désigne par Φ l'application ainsi définie de G dans le groupe $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ des permutations de \mathcal{K} . On notera $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ l'ensemble des permutations paires de $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$.
- Montrer que Φ est un morphisme de groupes.
 - Expliciter par un tableau à double entrée à trois lignes et cinq colonnes l'effet produit par r, s, t sur les cubes $\mathcal{C}_i, (i = 0, 1, 2, 3, 4)$.
 - Montrer que $\Phi(r), \Phi(s), \Phi(t)$ sont des permutations paires de \mathcal{K} .
5. (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le triplet $(f(\mathbf{i}), f(\mathbf{j}), f(\mathbf{k}))$ pour qu'un élément f de $SO(E)$ laisse le cube \mathcal{C}_0 globalement invariant (on pourra considérer les axes des faces de ce cube).
- En déduire que le cardinal du sous-groupe G_0 de G constitué des isométries directes laissant globalement invariant le cube \mathcal{C}_0 (c'est le *stabilisateur* de \mathcal{C}_0 dans G) est égal à 12 et préciser l'ensemble de ses éléments.
 - Montrer que, pour tout i de 1 à 4, le stabilisateur G_i de \mathcal{C}_i dans G est un sous-groupe de G isomorphe à G_0 .
 - Préciser $G_0 \cap G_1$ puis $G_0 \cap G_1 \cap G_2$.
En déduire que Φ est injectif.
6. (a) Soit S un sous-groupe de $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$; on note :

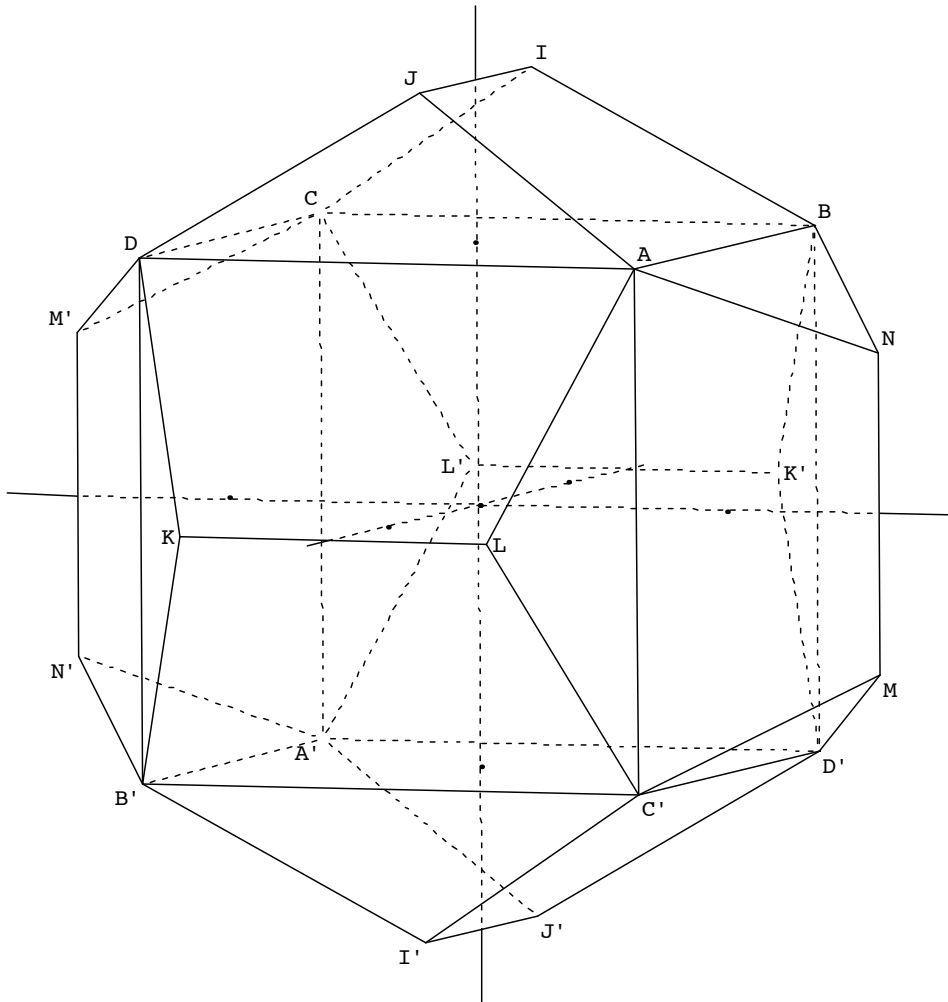
$$S_+ = S \cap \mathcal{A}_{\mathcal{K}} \quad \text{et} \quad S_- = S \cap (\mathcal{S}_{\mathcal{K}} \setminus \mathcal{A}_{\mathcal{K}})$$

Montrer que, si S_- est non vide, alors S_+ et S_- ont même cardinal; en déduire que, si $\Phi(G)$ possède un élément impair, alors il en contient nécessairement 30.

- Montrer que, si f est un élément de G tel que : $\varepsilon(\Phi(f)) = -1$, alors f est d'ordre pair dans G .
 - En déduire, en utilisant les ordres des éléments de G , étudiés dans III.6, que G est isomorphe à \mathcal{A}_5 .
7. Combien y a-t-il d'éléments de G transformant l'un quelconque des cinq cubes en un autre?



Le dodécaèdre construit au II



Construction du dodécaèdre