AGRÉGATION INTERNE
DE MATHÉMATIQUES
Session 2010, épreuve 1

– NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES –

- Étant donnés deux entiers p et q tels que $p \leqslant q$, on note $[p, q]$ l'ensemble des **entiers** k vérifiant $p \leqslant k \leqslant q$.
- Dans ce problème K désigne un corps commutatif de caractéristique différente de deux.
- Pour tout polynôme P de $K[X]$, on note $d^\circ P$ le degré de P (on rappelle que, par convention, le polynôme 0 a pour degré $-\infty$).
- Un polynôme non nul P de $K[X]$ est dit normalisé si le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.
- Pour tout entier naturel m, $K_m[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $K[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à m.
- Si E est un K-espace vectoriel, on notera E^* son espace dual.
- Soient E et F deux K-espaces vectoriels. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E à valeurs dans F. Pour toute application $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle transposée de f l'application (linéaire) notée ${}^t f$ définie sur F^* et à valeurs dans E^* par :
$$\forall\, \varphi \in F^*,\ {}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$$
- On note $\mathcal{M}_p(K)$ l'algèbre des matrices carrées de taille p à coefficients dans K.
- On identifiera les vecteurs de K^p aux matrices correspondantes de $\mathcal{M}_{p,1}(K)$.
- Si A et B sont deux polynômes de $K[X]$, avec B non nul, on note $A \bmod B$ le reste de la division euclidienne de A par B.
- Soient A, B, C des polynômes de $K[X]$. On écrira $A \equiv B \bmod C$ si C divise $A - B$.
- Pour tout couple $(A, B) \in K[X]^2$ avec $(A, B) \neq (0, 0)$, on note $A \wedge B$ le pgcd du couple (A, B) (c'est donc un polynôme normalisé).
- Soit E un K-espace vectoriel non nul. On note $\mathcal{S}(E)$ l'espace vectoriel des suites de E indexées par $\mathbf{N}$. On aura l'occasion d'utiliser l'application $\sigma : \mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}(E)$ qui à une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E associe la suite $\sigma(u)$ définie par :
$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ [\sigma(u)]_n = u_{n+1}$$
Cette application σ, nommée **décalage d'indices**, est clairement un endomorphisme de l'espace $\mathcal{S}(E)$.
- Soit $P = \sum_{k=0}^{r} p_k X^k \in K[X]$. On désigne par $P(\sigma)$ l'endomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ défini par substitution de σ à X :
$$P(\sigma) = p_0 \operatorname{Id} + p_1\sigma + \cdots + p_r\sigma^r$$
On rappelle que, pour tout couple $(P, Q) \in K[X]^2$ on a :
$$(P + Q)(\sigma) = P(\sigma) + Q(\sigma) \quad \text{et} \quad (PQ)(\sigma) = P(\sigma) \circ Q(\sigma)\,.$$
- Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(E)$, on appelle **annulateur** de u le sous-ensemble de $K[X]$, noté $\operatorname{Ann}(u)$, défini par :
$$\operatorname{Ann}(u) = \{P \in K[X] \,/\, P(\sigma)(u) = 0\}$$
- Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(E)$ est dite **linéaire récurrente** s'il existe un entier $r \geqslant 0$ ainsi que des scalaires $q_0, q_1, \ldots, q_r$ tels que $q_0 \neq 0$ et :
$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ q_0 u_{n+r} + q_1 u_{n+r-1} + \cdots + q_{r-1} u_{n+1} + q_r u_n = 0$$

– Partie I : polynôme minimal d'une suite linéaire récurrente –

Dans cette partie E et F sont des K-espaces vectoriels non nuls.

1. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(E)$, $P = \sum_{k=0}^{r} p_k X^k \in K[X]$. Calculer, pour $n \in \mathbf{N}$, $[P(\sigma)(u)]_n$.

2. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(E)$.

(a) Démontrer que la suite u est linéaire récurrente si et seulement si $\mathrm{Ann}(u) \neq \{0\}$.
(b) Démontrer que si u est linéaire récurrente, alors il existe un unique polynôme normalisé noté π_u tel que $\mathrm{Ann}(u) = \pi_u.K[X]$.

Le polynôme π_u s'appelle le ***polynôme minimal*** *de la suite u.*

3. Dans cette question on prend $E = K = \mathbf{R}$.

(a) Démontrer que la suite $(2^n + 3^n)$ est linéaire récurrente et donner son polynôme minimal.
(b) Démontrer que la suite $\left(n^2 2^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est linéaire récurrente et donner son polynôme minimal.
(c) Est-ce que la suite $(n!)_{n\in\mathbf{N}}$ est linéaire récurrente ?

4. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(E)$, on note $T(u)$ la suite de F définie par :

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ [T(u)]_n = T(u_n)$$

Démontrer que si u est linéaire récurrente, alors il en est de même de $T(u)$ et le polynôme $\pi_{T(u)}$ divise π_u.

5. On note $\mathcal{R}(E)$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}(E)$ formé des suites linéaires récurrentes. $\mathcal{R}(E)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(E)$?

6. **Un exemple important :** dans cette question on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_p(K)$ ainsi que deux éléments non nuls V et W de K^p. On leur associe la suite scalaire $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = {}^tWA^nV$.

(a) Démontrer que la suite $(A^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est linéaire récurrente et que le polynôme minimal de cette suite est égal au polynôme minimal de la matrice A.
Dans la suite ce polynôme minimal sera noté π_A.
(b) Vérifier que les suites $\beta = (A^nV)_{n\in\mathbf{N}}$ et u sont linéaires récurrentes et que :

$$\pi_u \mid \pi_\beta \quad \text{et} \quad \pi_\beta \mid \pi_A$$

Dans la suite π_β sera noté $\pi_{A,V}$ et π_u sera noté $\pi_{W,A,V}$.
(c) Donner un majorant du degré de $\pi_{W,A,V}$.
(d) Que peut-on dire de $\pi_{W,A,V}$, $\pi_{A,V}$, π_A lorsque $\pi_{W,A,V}(A)$ est nul ?

– Partie II : une caractérisation des suites linéaires récurrentes scalaires –

Dans cette partie on cherche à caractériser les suites récurrentes à valeurs dans le corps K. On introduit à cette fin les notations suivantes : pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(K)$ et pour tout entier $m \geqslant 0$, on note $H_m(u)$ la matrice de $\mathcal{M}_{m+1}(K)$ définie par $H_m(u) = \left[u_{i+j-2}\right]_{(i,j)\in[1,m+1]^2}$ et on désigne par $D_m(u)$ son déterminant (rappel : ce déterminant est de taille $m+1$).

1. On suppose ici que $K = \mathbf{R}$ et on choisit pour u la suite de Fibonacci définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1;\ \forall\, n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

(a) Calculer $D_m(u)$ pour tout entier $m \geqslant 0$.
(b) Quel est le polynôme minimal de la suite u ?

2. On suppose ici que $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(K)$ est une suite linéaire récurrente de polynôme minimal

$$\pi_u = X^s + q_1X^{s-1} + \cdots + q_{s-1}X + q_s$$

Démontrer que pour tout entier $m \geqslant s,\ D_m(u) = 0$.

3. Réciproquement soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(K)$ pour laquelle il existe un entier $s \geqslant 1$ vérifiant :

$$D_{s-1}(u) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall\, m \geqslant s,\ D_m(u) = 0$$

On se propose de démontrer que u est linéaire récurrente et de donner une méthode de calcul de son polynôme minimal.

(a) Quel est le rang de la matrice $H_s(u)$?

(b) Démontrer qu'il existe un unique s-uplet $(q_1, q_2, \ldots, q_s) \in K^s$ tel que :

$$H_s(u).\begin{bmatrix} q_s \\ q_{s-1} \\ \vdots \\ q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) On pose, pour tout entier $m \geqslant s$:

$$\lambda_m = u_m + q_1u_{m-1} + \cdots + q_{s-1}u_{m-s+1} + q_su_{m-s}$$

Que vaut λ_m lorsque m appartient à l'intervalle $[s, 2s]$?

(d) Démontrer que :

$$D_{s+1}(u) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{s-1} & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_s & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{s-1} & u_s & \cdots & u_{2s-2} & 0 & 0 \\ u_s & u_{s+1} & \cdots & u_{2s-1} & 0 & \lambda_{2s+1} \\ u_{s+1} & u_{s+2} & \cdots & u_{2s} & \lambda_{2s+1} & \lambda_{2s+2} \end{vmatrix}$$

En déduire que $\lambda_{2s+1} = 0$.

(e) Plus généralement, soit $m \geqslant s+1$ pour lequel

$$\lambda_s = \lambda_{s+1} = \cdots = \lambda_{2s} = \cdots = \lambda_{m+s-1} = 0$$

Démontrer que :

$$D_m(u) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{s-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{s-1} & \cdots & \cdots & u_{2s-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_s & \cdots & \cdots & u_{2s-1} & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{m+s} \\ \vdots & & & \vdots & 0 & & \iddots & * \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \iddots & & \vdots \\ u_m & \cdots & \cdots & u_{m+s-1} & \lambda_{m+s} & * & \cdots & * \end{vmatrix}$$

(On détaillera les opérations effectuées ainsi que l'ordre dans lequel elles sont faites).

(f) Conclure que la suite u est linéaire récurrente de polynôme minimal

$$\pi_u = X^s + q_1X^{s-1} + \cdots + q_{s-1}X + q_s$$

– Partie III : polynômes minimaux en algèbre linéaire –

Pour tout polynôme $P \in K[X]$, on note coeff(P, k) le coefficient d'indice k de P.

1. Soit $F \in K[X]$ un polynôme normalisé, de degré $m \geqslant 1$. On lui associe l'application

$$\Phi : K[X] \times K[X] \to K,\ (P, Q) \mapsto \text{coeff}(PQ \bmod F, m-1)$$

(a) Vérifier que Φ est bilinéaire et symétrique.

(b) Soit $P \in K[X]$ tel que pour tout $Q \in K[X]$, $\Phi(P, Q) = 0$. Démontrer que F divise P. Étudier la réciproque.
Indication : on pourra introduire $r = d^\circ(P \bmod F)$.

(c) Soit Φ_{m-1} la restriction de Φ à $K_{m-1}[X] \times K_{m-1}[X]$. Φ_{m-1} est-elle dégénérée ?

(d) Soit $G \in K_{m-1}[X]$. On considère la suite $u = (u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ définie par $u_k = \Phi\left(X^k, G\right)$.
i) Démontrer qu'un polynôme P appartient à Ann(u) si et seulement si pour tout entier i on a $\Phi\left(PG, X^i\right) = 0$.
ii) En déduire que u est linéaire récurrente et que son polynôme minimal est donné par :

$$\pi_u = \frac{F}{F \wedge G}$$

Dans la suite du problème on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ainsi qu'un vecteur $V \in K^n$ non nul. On utilise les notations des questions précédentes en prenant $F = \pi_{A,V}$, de degré m.

2. Soit E le sous-espace de K^n engendré par $\left\{A^k V,\ k \in \mathbf{N}\right\}$. Démontrer que l'application

$$\Theta : K_{m-1}[X] \to E,\ P \mapsto P(A).V$$

est un isomorphisme de K-espaces vectoriels.

3. Soit $\rho : K^n \to E^*$ l'application qui, à $W \in K^n$ associe la forme linéaire

$$\rho(W) : E \to K,\ z \mapsto {}^tW.z\ .$$

Montrer que ρ est linéaire et surjective.

4. Soit $\varphi : K_{m-1}[X] \to K_{m-1}[X]^*$ l'application définie par :

$$\forall\ (P, Q) \in K_{m-1}[X] \times K_{m-1}[X],\ \varphi(P)(Q) = \Phi\left(P, Q\right)$$

Expliquer pourquoi φ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels.

5. On note $\Gamma = \varphi^{-1} \circ {}^t\Theta \circ \rho$.

(a) Que peut-on dire de Γ ?

(b) Démontrer que pour tout $P \in K_{m-1}[X]$ et pour tout $W \in K^n$:

$$\Phi\left(\Gamma(W), P\right) = {}^tW.P(A).V$$

(c) Vérifier que cette relation est vraie pour tout polynôme P de $K[X]$.

(d) Conclure que pour tout $W \in K^n$:

$$\pi_{W,A,V} = \frac{\pi_{A,V}}{\pi_{A,V} \wedge \Gamma(W)}$$

(e) En déduire qu'il existe au moins un vecteur W de K^n pour lequel $\pi_{W,A,V} = \pi_{A,V}$.

Dans la fin de cette partie on cherche dans quelle mesure on peut « espérer » que $\pi_{W,A,V}$ soit égal à $\pi_{A,V}$.

Notations : on rappelle qu'un polynôme $P = P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ à n indéterminées est un élément de l'algèbre $K\left[X_1, X_2, \ldots, X_n\right]$ qui peut se définir comme $(K[X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}])[X_n]$ pour $n > 1$. On peut noter P ainsi :

$$P = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}\ .$$

Pour un tel polynôme, chacun de ses **monômes** $a_{i_1,\ldots,i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$ a pour degré total $i_1 + \cdots + i_n$, et le **degré total** de P est le plus grand des degrés totaux de ses monômes non nuls.

6. Soient $R \in K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ un polynôme **non nul** de degré total d, à n indéterminées et S un sous-ensemble fini non vide de K. Montrer que l'ensemble

$$\Omega_S = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S^n \ / \ R(s_1, s_2, \ldots, s_n) = 0\}$$

possède au plus $d.[\mathrm{Card}\, S]^{n-1}$ éléments.

Indication : on pourra procéder par récurrence sur n.

7. On admet le résultat suivant : étant donnés deux polynômes non nuls

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \quad B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k \in K[X]$$

avec $b_m \neq 0$, ces polynômes sont premiers entre eux si et seulement si le déterminant ci-dessous n'est pas nul :

$$\begin{vmatrix}
a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & \vdots & b_0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & a_1 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & a_0 & b_m & \vdots & \ddots & 0 \\
a_n & \vdots & & a_1 & 0 & b_m & & b_0 \\
0 & a_n & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_n & 0 & \cdots & 0 & b_m
\end{vmatrix}$$

$\leftarrow\!\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!\rightarrow\!\leftarrow\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!\rightarrow$
$m \qquad\qquad n$

Ce déterminant s'appelle le **résultant** de (A, B). On le notera $\mathrm{Res}(A, B)$.

On considère comme dans la question **6** un sous-ensemble S de K qui est fini et admet au moins m éléments.

(a) Démontrer que l'ensemble :

$$\Big\{W = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in S^n \ / \ \pi_{A,V} \wedge \Gamma(W) = 1\Big\}$$

possède au moins $[\mathrm{Card}\, S]^n - m.[\mathrm{Card}\, S]^{n-1}$ éléments.

(b) On choisit au hasard (de manière équiprobable) un n-uplet W dans S^n. Déduire de ce qui précède un minorant de la probabilité pour que $\pi_{W,A,V} = \pi_{A,V}$.

– Partie IV : l'algorithme de Berlekamp-Massey –

Le but de cette partie est de fournir un algorithme efficace dans la recherche du polynôme minimal d'une suite linéaire récurrente scalaire lorsqu'on connait à l'avance une majoration du degré de ce polynôme. La méthode proposée est indépendante des parties II et III.

Dans cette partie A et B sont deux polynômes de $K[X]$ pour lesquels $d^\circ A = m,\ d^\circ B = n$, avec $m \geqslant n \geqslant 1$. On rappelle que l'algorithme d'Euclide fournit par divisions euclidiennes successives deux familles finies $(Q_i)_{i\in[1,l]}$ et $(R_i)_{i\in[0,l+1]}$ de $K[X]$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{rl} R_0 & = A,\ R_1 = B \\ R_{i-1} & = Q_i R_i + R_{i+1} \quad \text{pour } i \in [1,l] \quad \text{avec} \quad \forall\, i \in [1,l[,\ 0 \leqslant d^\circ R_{i+1} < d^\circ R_i \\ R_l & = A \wedge B,\ \ R_{l+1} = 0 \end{array}\right.$$

On considère les deux familles finies de polynômes $(S_i)_{i\in[0,l+1]}$ et $(T_i)_{i\in[0,l+1]}$ définies par :

$$S_0 = 1,\ S_1 = 0,\ T_0 = 0,\ T_1 = 1 \quad \text{et pour} \quad i \in [1,l]\,, \left\{\begin{array}{l} S_{i+1} = S_{i-1} - Q_i S_i \\ T_{i+1} = T_{i-1} - Q_i T_i \end{array}\right.$$

1. Démontrer les propriétés suivantes :

(a) Pour tout $i \in [0, l+1]$, $S_i A + T_i B = R_i$.

(b) Pour tout $i \in [0, l]$, $S_{i+1}T_i - S_i T_{i+1} = (-1)^{i+1}$. En déduire la valeur de $S_i \wedge T_i$, pour $i \in [0, l+1]$.

(c) Pour tout $i \in [0, l+1]$, $R_i \wedge T_i = A \wedge T_i$.

(d) $d^\circ T_1 \leqslant d^\circ T_2$, et pour tout $i \in [2, l]$, $d^\circ T_i < d^\circ T_{i+1}$.

(e) Pour tout $i \in [1, l+1]$, $d^\circ T_i = m - d^\circ R_{i-1}$.
On peut alors démontrer de même (mais cela n'est pas demandé) que pour tout $i \in [2, l+1]$, $d^\circ S_i = n - d^\circ R_{i-1}$.

2. On fixe ici un entier $k \in [0, m[$ et on s'intéresse aux deux problèmes suivants :
$(\mathcal{P}_1)$: trouver un couple $(R, T) \in K[X]^2$ vérifiant :

$$TB \equiv R \bmod A,\ T \wedge A = 1,\ d^\circ R < k,\ d^\circ T \leqslant m - k$$

$(\mathcal{P}_2)$: trouver un couple $(R, T) \in K[X]^2$ vérifiant :

$$TB \equiv R \bmod A,\ d^\circ R < k,\ d^\circ T \leqslant m - k$$

Soit $j \in [1, l+1]$ pour lequel $d^\circ R_j < k \leqslant d^\circ R_{j-1}$.

(a) Démontrer que le couple (R_j, T_j) est une solution de $(\mathcal{P}_2)$. À quelle condition est-il une solution de $(\mathcal{P}_1)$?

(b) Inversement, on suppose qu'il existe un couple (R, T) solution de $(\mathcal{P}_1)$. Démontrer que :

$$\begin{cases} R_j \wedge T_j = 1 \\ \text{il existe } P \in K[X] \setminus \{0\} \text{ tel que } R = PR_j,\ T = PT_j \\ P \wedge A = 1 \end{cases}$$

Indication : on pourra s'intéresser au polynôme $R_j T - R T_j$ puis à $S_j T - T S_j$.

3. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{S}(K)$. On lui associe la suite de polynômes $(B_r)_{r \in \mathbf{N}^*}$ définie par : $B_r = \sum_{k=0}^{2r-1} u_k X^k$. On suppose qu'il existe deux polynômes $H = \sum_{k=0}^{s} q_k X^k$ et R vérifiant :

$$q_0 = 1,\ d^\circ R < s, \quad \text{et} \quad \forall\, r \geqslant s,\ HB_r \equiv R \bmod X^{2r}$$

Démontrer alors que u est linéaire récurrente et que $\sum_{k=0}^{s} q_{s-k} X^k \in \mathrm{Ann}(u)$.

4. Réciproquement, soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{S}(K)$ une suite linéaire récurrente non nulle dont $Q = \sum_{k=0}^{s} q_k X^{s-k}$ (avec $q_0 = 1$) est un polynôme annulateur.

(a) Dans ces conditions, démontrer que :
i) il existe un polynôme R de degré strictement inférieur à s tel que pour tout entier $r \geqslant s$:

$$Q^* B_r \equiv R \bmod X^{2r}, \quad \text{où} \quad Q^*(X) = X^s Q\big(\tfrac{1}{X}\big) = \sum_{k=0}^{s} q_k X^k$$

ii) Si $Q = \pi_u$, alors $s = \max(1 + d^\circ R,\ d^\circ Q^*)$ et $Q^* \wedge R = 1$.

(b) On reprend les notations de la question **1** avec $A = X^{2r}$, $B = B_r$, pour $r \geqslant s$; on choisit $k = r$ et on considère un entier $j \in [1, l+1]$ tel que $d^\circ R_j < r \leqslant d^\circ R_{j-1}$.
i) Vérifier que

$$T_j B_r \equiv R_j \bmod X^{2r},\ R_j \wedge T_j = T_j \wedge X^{2r} = 1,\ d^\circ T_j \leqslant r,\ d^\circ R_j < r$$

ii) En déduire qu'il existe $P \in K[X] - \{0\}$ tel que :

$$\pi_u^* = PT_j,\ R = PR_j \quad \text{et} \quad P \wedge X^{2r} = 1$$

iii) Conclure que, quitte à multiplier T_j, R_j par un élément non nul de K, on peut supposer que $T_j(0) = 1$ et que le polynôme minimal π_u est alors donné par :

$$\pi_u(X) = X^s T_j\big(\tfrac{1}{X}\big) \quad \text{où} \quad s = \max(1 + d^\circ R_j,\ d^\circ T_j)$$

FIN DU SUJET