Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

EAI MAT 1

SESSION 2016

AGRÉGATION
CONCOURS INTERNE
ET CAER

Section : MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Notations et rappels

Soit n un entier $\geqslant 1$. Pour tout couple d'éléments $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbf{R}^n$, où $\mathbf{R}$ désigne le corps des nombres réels, on note $x.y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$, et $\|x\| = \sqrt{x.x}$ la norme de x. On note $S_{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n;\ \|x\| = 1\}$ la sphère de rayon 1 centrée en 0 et G le groupe orthogonal $O_n(\mathbf{R})$ des endomorphismes orthogonaux de $\mathbf{R}^n$. Pour $a \in \mathbf{R}^n$ et r réel > 0, on note $B(a, r)$ la boule **fermée** de centre a et de rayon r.

On note C_n l'ensemble des fonctions de classe C^2 de $B(0, 1)$ dans $\mathbf{R}$ (*i.e.* les fonctions admettant un prolongement de classe C^2 sur un ouvert contenant $B(0, 1)$).
On note $\langle f, g\rangle$ le produit scalaire sur C_n défini par

$$\langle f, g\rangle = \left(\int_{B(0,1)} dx_1 \ldots dx_n\right)^{-1} \int_{B(0,1)} f(x)g(x)dx_1 \ldots dx_n.$$

Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, où $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers $\geqslant 0$.
On note $x^\alpha :\ B(0, 1) \to \mathbf{R}$ l'élément de C_n qui à $(x_1, \ldots, x_n)$ associe $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$.
Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on note M_k le sous-espace vectoriel de C_n formé des combinaisons linéaires des x^α, pour les α tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k$.
Pour toute $f \in C_n$, on note

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},$$

et H_k le sous-espace vectoriel de M_k égal à $\{f \in M_k;\ \Delta(f) = 0\}$.

I.

Soient $B(a, 1)$ et $B(a', 1)$ deux boules fermées de rayon 1.

1. Démontrer qu'elles sont disjointes si et seulement si $2 < \|a - a'\|$.
2. Démontrer qu'elles sont tangentes (c'est-à-dire ont un unique point d'intersection) si et seulement si $\|a - a'\| = 2$, et que dans ce cas $\frac{a+a'}{2}$ est leur point d'intersection.
3. On suppose qu'elles sont tangentes à la boule $B(0, 1)$, en respectivement les points b et b'. Démontrer qu'elles sont disjointes si et seulement si $b.b' < \frac{1}{2}$, et qu'elles sont tangentes si et seulement si le triangle de sommets $0, b, b'$ est équilatéral.

On note τ_n le nombre maximal de boules de rayon 1, deux-à-deux tangentes ou disjointes, et tangentes à la boule $B(0, 1)$.

4. Démontrer que $\tau_2 = 6$.
5. On suppose dans cette question que $n = 8$, et on note

$$A = \{(x_1, \ldots, x_8) \in \mathbf{R}^8;\ \forall i,\ |x_i| = \frac{\sqrt{2}}{4},\ \prod_{i=1}^{8} x_i > 0\},$$

   B l'ensemble des éléments de $\mathbf{R}^8$ ayant 6 coordonnées nulles, les deux autres étant de valeur absolue $\frac{\sqrt{2}}{2}$, et $C = A \cup B$.

(a) Calculer le nombre d'éléments de C, et démontrer que $C \subset S_7$.

(b) Démontrer que, pour tout couple (x, y) d'éléments distincts de C, on a $x.y \leqslant \frac{1}{2}$.

(c) Démontrer que $\tau_8 \geqslant 240$.

II.

6. Soit $x \in B(0,1)$, et $\sigma \in G$. Démontrer que $\sigma(x)$ est un élément de $B(0,1)$. On note $t_\sigma : B(0,1) \to B(0,1)$ l'application définie par $t_\sigma(x) = \sigma(x)$.

7. Soit $f \in C_n$. Démontrer que, pour tout $\sigma \in G$, $f \circ t_\sigma \in C_n$ puis que $\Delta(f \circ t_\sigma) = \Delta(f) \circ t_\sigma$.

Soit $k \in \mathbf{N}$.

8. Soit $\sigma \in G$; démontrer que si $f \in M_k$, $f \circ t_\sigma \in M_k$, et que, si $f \in H_k$, $f \circ t_\sigma \in H_k$.

9. Démontrer que, pour $f, g \in C_n$ et $\sigma \in G$, on a $\langle f \circ t_\sigma, g \circ t_\sigma \rangle = \langle f, g \rangle$.

10. Soit $f \in M_k$ telle que, pour tout $\sigma \in G$, on a $f \circ t_\sigma = f$.

(a) Démontrer que, si x et $y \in B(0,1)$ sont tels que $\|x\| = \|y\|$, on a $f(x) = f(y)$.

(b) Soit $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $g(t) = f(0, \ldots, 0, t)$. Démontrer que, pour tout $t \in [-1,1]$, on a $f(0, \ldots, 0, t) = g(|t|)$, et que pour tout $x \in B(0,1)$, on a $f(x) = g(\|x\|)$.

(c) On suppose que f n'est pas l'application nulle. Démontrer que k est pair, et qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}^*$ tel que, pour tout $x \in B(0,1)$, on a $f(x) = \lambda \|x\|^k$.

III.

11. (a) Soit $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ un élément de $\mathbf{R}[X]$.

Soit s un réel > 0. Démontrer que, si, pour tout $x \in]-s, s[$, on a $P(x) = 0$, alors $a_i = 0$ pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant k$.

(b) Soit $k \geqslant 0$. Démontrer que la famille des fonctions $x^\alpha : B(0,1) \to \mathbf{R}$, où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ parcourt les éléments de $\mathbf{N}^n$ tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqslant k$, forme une famille libre (On pourra raisonner par récurrence sur n.)

(c) Démontrer que M_k est un sous-espace vectoriel de dimension finie de C_n.

On suppose désormais $n \geqslant 2$.
Soit $k \in \mathbf{N}$, et $[k/2]$ le plus grand entier $\leqslant k/2$.
On note $K = \{\sigma \in G,\ \sigma(e_n) = e_n\}$, où $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$, et $R_k = \{f \in H_k;\ \forall \sigma \in K,\ f \circ t_\sigma = f\}$.

12. Démontrer que K est un sous-groupe de G isomorphe à $O_{n-1}(\mathbf{R})$.

13. Démontrer que l'application linéaire $\varphi : \mathbf{R}^{[k/2]+1} \to M_k$ qui, à $(c_0, \ldots, c_{[k/2]})$, associe

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{j=0}^{[k/2]} c_j (x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2)^j x_n^{k-2j}$$

est une application linéaire injective, et que $\operatorname{Im} \varphi = \{f \in M_k;\ \forall \sigma \in K,\ f \circ t_\sigma = f\}$.

14. Soit $f = \varphi(c_0, \dots, c_{[k/2]})$.

(a) Démontrer que

$$(\Delta f)(x) = \sum_{j=1}^{[k/2]} (\alpha_j c_j + \beta_j c_{j-1}) x_n^{k-2j} (x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2)^{j-1},$$

avec $\alpha_j = 2j(n + 2j - 3)$ et $\beta_j = (k - 2j + 1)(k - 2j + 2)$.

(b) Démontrer que R_k est un sous-espace vectoriel de H_k de dimension 1.

(c) On suppose que f est un élément non nul de R_k.

Démontrer que $c_j c_{j-1} < 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant [k/2]$, puis que $\displaystyle\sum_{j=0}^{[k/2]} c_j (1 - X^2)^j X^{k-2j}$ est un élément de $\mathbf{R}[X]$ de degré k.

15. Soit $a \in S_{n-1}$.

(a) Démontrer qu'il existe un unique élément $f_a \in H_k$ tel que, pour tout $f \in H_k$, on a $\langle f, f_a \rangle = f(a)$.

(b) Démontrer que, pour tout $\sigma \in G$ tel que $\sigma(a) = a$, on a $f_a \circ t_\sigma = f_a$.

(c) Démontrer qu'il existe un unique polynôme $p_k \in \mathbf{R}[X]$ tel que $f_{e_n}(x) = p_k(x_n)$ pour tout $x \in S_{n-1}$.

(d) Démontrer que p_k est de degré k, et que son coefficient de degré k est > 0.

(e) Soit $\sigma \in G$ tel que $a = \sigma(e_n)$. Démontrer que $f_a \circ t_\sigma = f_{e_n}$ et que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ on a $x.a = \sigma^{-1}(x).e_n$.

(f) Soit (u_i) une base orthonormée de H_k. Démontrer que $f_a = \displaystyle\sum_i u_i(a) u_i$.

(g) Démontrer que, si b est dans S_{n-1}, on a

$$f_a(b) = f_b(a) = p_k(a.b) = \sum_i u_i(a) u_i(b).$$

IV.

16. Calculer p_0.

17. Démontrer qu'il existe des réels λ_1 et $\lambda_2 > 0$ tels que $p_1(X) = \lambda_1 X$ et $p_2(X) = \lambda_2(nX^2 - 1)$.

18. Soient m éléments $v_1, \dots, v_m$ de S_{n-1}. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{i,j} p_k(v_i.v_j) \geqslant 0.$$

19. Soient $s \in \mathbf{N}$, $a_0, \dots, a_s$ des nombres réels $\geqslant 0$, $a_0 > 0$, et $f \in \mathbf{R}[X]$ égal à $f = \sum_{i=0}^{s} a_i p_i$.
On suppose que, pour tout $x \in [-1, 1/2]$, on a $f(x) \leqslant 0$.
Soient $v_1, \dots, v_m$ des éléments de S_{n-1}, tels que $v_i.v_j \leqslant \frac{1}{2}$ si $i \neq j$. Démontrer que $m \leqslant \frac{f(1)}{a_0}$ (on pourra encadrer $\displaystyle\sum_{i,j} f(v_i.v_j)$).

20. On suppose $n = 8$. En utilisant l'identité polynomiale suivante, qu'on ne demande pas de vérifier :

$$\frac{320}{3}(t+1)(t+\frac{1}{2})^2 t^2 (t-\frac{1}{2}) = p_0 + p_1 + \frac{5}{7}p_2 + \frac{13}{28}p_3 + \frac{19}{84}p_4 + \frac{5}{56}p_5 + \frac{5}{252}p_6,$$

démontrer que $\tau_8 = 240$.

V.

Soient m un entier $\geqslant 1$, et $k \in \mathbf{N}$. On rappelle qu'une matrice symétrique $S = (s_{i,j})$ à coefficients réels est dite *positive* si $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \sum_{i,j} s_{i,j} x_i x_j \geqslant 0$.

21. Soient m éléments $v_1, \dots, v_m$ de S_{n-1}. Démontrer que la matrice $m \times m$ de coefficients $p_k(v_i.v_j)$ est positive.

22. Soit $S = (s_{i,j})$ une matrice symétrique $m \times m$ positive, de rang $\leqslant n$, dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.

- **(a)** Démontrer qu'il existe une matrice A à m colonnes et n lignes telle que $S = {}^tAA$, où ${}^tA$ est la transposée de A.
- **(b)** Démontrer que la matrice $m \times m$ de coefficients $p_k(s_{i,j})$ est positive.
- **(c)** Démontrer que la somme des coefficients d'une matrice symétrique positive est positive.
- **(d)** Démontrer que $\sum_{i,j} s_{i,j}^2 \geqslant \frac{m^2}{n}$.

——— FIN DU SUJET ———