## Préambule : notations et rappels

### Notations

- ▷ On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs et par $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers relatifs.
- ▷ On désigne par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, par $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes et par $\mathbf{K}$ l'un de ces deux corps lorsqu'on ne souhaite pas le préciser.
- ▷ Si $m$ et $n$ sont deux entiers relatifs, on pose $[\![ m\,;\,n ]\!] = \{k \in \mathbf{Z} ; m \leqslant k \leqslant n\}$.
- ▷ Pour $n$ entier naturel non nul, on note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $[\![ 1\,;\,n ]\!]$.
- ▷ Si $E$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, on note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$ et $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des endomorphismes inversibles.
- ▷ Pour une famille $(u_1, \ldots, u_k)$ de vecteurs de $E$, on note $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_k)$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par cette famille.
- ▷ Soit $n$ un entier naturel non nul. On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ la $\mathbf{K}$-algèbre des matrices $(n, n)$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ et $I_n$ la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
- ▷ On note $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ le groupe multiplicatif des matrices inversibles, $\mathrm{O}_n(\mathbf{K})$ celui des matrices orthogonales et $\mathrm{SO}_n(\mathbf{K})$ le groupe des matrices orthogonales de déterminant égal à 1.
- ▷ On note $T_n^+(\mathbf{K})$ le groupe multiplicatif des matrices triangulaires supérieures inversibles et $T_n^-(\mathbf{K})$ le groupe multiplicatif des matrices triangulaires inférieures inversibles.
- ▷ Soit $n$ un entier naturel non nul et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
  Pour $i \in [\![ 1\,;\,n ]\!]$, on note $L_i$ la $i$-ème ligne de la matrice $A$. Pour $j \in [\![ 1\,;\,n ]\!]$, on note $C_j$ la $j$-ème colonne de la matrice $A$.
- ▷ Soit $n$ un entier naturel non nul et $(i, j) \in [\![ 1\,;\,n ]\!]^2$. On note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient situé à la $i$-ème ligne et à la $j$-ème colonne qui vaut 1.
  Par exemple lorsque $n = 2$, on a :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Rappels et compléments sur les actions de groupe (pour la partie IV)

- ▷ Soient $(G, *)$ un groupe dont l'élément neutre est noté $e$ et $X$ un ensemble non vide. On appelle **action** de $G$ sur $X$ toute application :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array} \right.$$

  vérifiant les deux propriétés suivantes :
  1. $\forall x \in X,\ e \cdot x = x$
  2. $\forall g, h \in G,\ \forall x \in X,\ g \cdot (h \cdot x) = (g * h) \cdot x$

Lorsque l'on dispose d'une telle action, on dit que le groupe $G$ **agit** sur l'ensemble $X$.

▷ Pour tout $x \in X$, on désigne par $O_x$ l'**orbite** de $x$. Par définition :

$$O_x = \{y \in X,\ \exists g \in G,\ y = g \cdot x\}.$$

On rappelle que la relation binaire $\mathcal{R}$, définie sur $X$ par $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y \in O_x$, est une relation d'équivalence sur $X$.

▷ Le **stabilisateur** d'un élément $x$ de $X$ est le sous-groupe de $G$ défini par :

$$\mathrm{Stab}_x = \{g \in G,\ g \cdot x = x\}.$$

▷ On dit qu'une action est **transitive** (ou que le groupe $G$ **agit transitivement** sur $X$) lorsque l'action ne possède qu'une seule orbite. Autrement dit :

$$\forall (x, y) \in X \times X,\ \exists g \in G \text{ tel que } y = g \cdot x.$$

▷ On dira qu'une action est **fidèle** (ou que le groupe $G$ **agit fidèlement** sur $X$) lorsque l'intersection de tous les stabilisateurs est le sous-groupe $\{e\}$ :

$$\bigcap_{x \in X} \mathrm{Stab}_x = \{e\}.$$

## Partie I : drapeaux de sous-espaces vectoriels

Dans toute cette partie, $E$ est un espace vectoriel de dimension finie $n$ ($n \geqslant 1$) sur $\mathbf{K}$ (on rappelle que $\mathbf{K}$ désigne indifféremment le corps des réels ou des complexes).

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Une famille $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ de sous-espaces vectoriels de $E$ est appelée drapeau si elle vérifie :

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_p = E$$

En particulier pour tout entier $i$ compris entre 0 et $p-1$, $E_i$ est un sous-espace vectoriel strict de $E_{i+1}$. On dit qu'un drapeau $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ est **total** lorsque $p = n$.

**1.** Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. On pose $E_0 = \{0\}$ et, $\forall j \in [\![ 1 ; n ]\!]$, $E_j = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$. Montrer que $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est un drapeau total de $E$.

Etant donné un drapeau total $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, on dit qu'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E$ est **adaptée** à ce drapeau si $\forall j \in [\![ 1 ; n ]\!]$, $E_j = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$.

**2.** Montrer que tout drapeau total admet une base adaptée.

**3.** Soit $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ un drapeau total de $E$. Montrer que si $E$ est un espace euclidien, alors il existe une base orthonormée de $E$ adaptée au drapeau.

Soit $u \in L(E)$. On dit qu'un drapeau $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est stable par $u$ lorsque, pour tout $i \in [\![ 0 ; n ]\!]$, le sous-espace $E_i$ est stable par $u$.

Dans la suite de cette partie, $u$ désigne un endomorphisme de $E$.

**4.** On suppose *dans cette question uniquement* que $u$ est diagonalisable. Montrer qu'il existe un drapeau total de $E$, stable par $u$.

**5.** On suppose *dans cette question uniquement* que $u$ est nilpotent d'indice $n$, c'est-à-dire que $u$ vérifie $u^n = 0_{L(E)}$ et $u^{n-1} \neq 0_{L(E)}$.

**(a)** Soit $k \in [\![ 1\,;\, n ]\!]$ et $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(u^{n-j}(x))_{j\in[\![ 1\,;\,k ]\!]}$ est libre.

**(b)** Montrer que $(\operatorname{Ker} u^i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est un drapeau total de $E$, stable par $u$. Construire une base adaptée à ce drapeau.

**6.** Montrer que $u$ est trigonalisable si et seulement si $E$ admet un drapeau total stable par $u$.

**7.** Montrer à l'aide des questions précédentes que si $E$ est euclidien et que $u$ est trigonalisable, alors il existe une base orthonormée de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est triangulaire supérieure.

## Partie II : des groupes quotients

Dans cette partie, on désigne par $G$ un groupe dont la loi est notée multiplicativement et $H$ un sous-groupe de $G$. On note $1_G$ l'élément neutre de $G$.
On rappelle que si $g \in G$, on désigne par $gH$ l'ensemble appelé **classe à gauche** :

$$gH = \{gh,\ h \in H\}.$$

De manière analogue, on appelle l'ensemble $Hg$ une classe à droite.
On rappelle que la relation binaire définie par : $g_1 \mathcal{R} g_2 \Leftrightarrow g_2 \in g_1 H$ est une relation d'équivalence, dont les classes sont les ensembles du type $gH$ et que l'on désigne par $G/H$ l'ensemble quotient pour cette relation.
On dit que le sous-groupe $H$ est distingué dans $G$ lorsque : $\forall g \in G,\ gH = Hg$. On note dans ce cas $H \triangleleft G$. On remarquera que $H \triangleleft G \Leftrightarrow \forall g \in G,\ g^{-1}Hg \subset H$.

**8.** Soit $H \triangleleft G$.

**(a)** Montrer que $G/H$ peut être muni d'une structure de groupe en considérant la loi de composition $\star$ définie par $(g_1H) \star (g_2H) = g_1g_2H$.
*On expliquera pourquoi on a bien défini ainsi une loi de composition interne sur $G/H$.*

**(b)** Montrer que l'application $\pi : G \to G/H$ définie pour tout $g \in G$ par $\pi(g) = gH$ est un morphisme de groupe surjectif.

**9.** On désigne dans cette question par $TU_n^+(\mathbf{K})$ le groupe des matrices triangulaires supérieures dont tous les coefficients diagonaux valent 1.

**(a)** Montrer que $TU_n^+(\mathbf{K}) \triangleleft T_n^+(\mathbf{K})$.

**(b)** A-t-on $TU_n^+(\mathbf{K}) \triangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ ?

**10.** Soit $H$ un sous-groupe quelconque de $G$. On suppose que $G/H$ est un ensemble fini à deux éléments. Montrer que $H \triangleleft G$.



**Tournez la page S.V.P.**

**11.** *Dans cette question uniquement*, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On désigne par

$$\Delta = \left\{I_2, A, A^2, A^3, B, AB, A^2B, A^3B\right\}.$$

**(a)** Vérifier que $A^3B = BA$, et montrer que $\Delta$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

**(b)** On définit $\Gamma =< A >$ le sous-groupe de $\Delta$ engendré par $A$ et $R =< B >$ le sous-groupe de $\Delta$ engendré par $B$. Montrer que $\Delta/\Gamma$ est un groupe, isomorphe à $R$.

**(c)** Existe-t-il un isomorphisme entre les groupes $\Delta$ et $\Gamma \times R$ ?

Soient $H$ et $K$ deux sous-groupes quelconques de $G$. Pour tout $g \in G$ on appelle double classe de $g$ relative aux sous-groupes $H$ et $K$ l'ensemble :

$$HgK = \left\{hgk,\ (h,k) \in H \times K\right\}.$$

Dans la suite, $H$ et $K$ étant fixés, on parlera simplement de « la double classe d'un élément de G ».

**12.** **(a)** Montrer qu'une double classe est une réunion de classes à gauche, et aussi une réunion de classes à droite.

**(b)** Montrer que les doubles classes relatives aux sous-groupes $H$ et $K$ constituent une partition de $G$.

## Partie III : décomposition de Bruhat et matrices

Dans cette partie, $E$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
On munit $E$ d'une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

**13.** Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, soit $u_\sigma$ l'endomorphisme de $E$ défini par l'égalité :

$$\forall i \in [\![ 1\,;\, n ]\!],\ u_\sigma(\varepsilon_i) = \varepsilon_{\sigma(i)}$$

et $P_\sigma$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Une telle matrice $P_\sigma$ est appelée matrice de permutation.

**(a)** *Dans cette question uniquement*, $\sigma$ est le $n$-cycle $(1, 2, \dots, n)$. Expliciter la matrice $P_\sigma$.

**(b)** Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On note $\sigma = c_1 \dots c_k$ une décomposition de $\sigma$ en cycles de supports disjoints, où $k \in \mathbf{N}^*$.
Exprimer la matrice $P_\sigma$ en fonction des matrices $P_{c_j}$ pour $j \in [\![ 1\,;\, k ]\!]$.

**(c)** Montrer que $P_\sigma \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

**(d)** À quelle condition sur $\sigma$ la matrice $P_\sigma$ appartient-elle à $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ ?

**14.** Pour $\lambda \in \mathbf{K}$ et $(i, j) \in [\![ 1\,;\, n ]\!]^2$, on note $T_{i,j}(\lambda)$ la matrice $I_n + \lambda E_{i,j}$.
Pour $\lambda \in \mathbf{K}$ et $i \in [\![ 1\,;\, n ]\!]$, on note $D_i(\lambda)$ la matrice $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

**(a)** Montrer que la matrice $T_{i,j}(\lambda)A$ est obtenue à partir de $A$ en effectuant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

**(b)** De manière analogue, donner les opérations élémentaires à effectuer pour obtenir les matrices $D_i(\lambda)A$, $AT_{i,j}(\lambda)$ et $AD_i(\lambda)$.

**(c)** Donner les opérations élémentaires à effectuer pour obtenir les matrices $P_{i,j}A$ et $AP_{i,j}$, où $P_{i,j}$ désigne la matrice $P_\sigma$ lorsque $\sigma$ est la transposition $(i, j)$. Expliquer sans démonstration comment obtenir $P_\sigma A$ et $AP_\sigma$ à partir de $A$, lorsque $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation quelconque.

**15.** Soient $U$ et $V$ deux matrices triangulaires supérieures inversibles et soient $\sigma$ et $\sigma'$ deux permutations.
On suppose que $P_\sigma^{-1} U P_{\sigma'} = V$. Montrer que $\sigma = \sigma'$. *Indication :* On pourra considérer le coefficient d'indice $(\sigma(j), j)$ de $P_\sigma V$, où $j \in [\![ 1\,;\, n ]\!]$.

**16.** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ une matrice inversible.

**(a)** Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure $U$ ne comportant que des 1 sur la diagonale, une matrice triangulaire supérieure $V$ et une matrice de transposition $P_\sigma$ telles que $A = UP_\sigma V$ et que cette écriture peut être obtenue à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de la matrice $A$. *On appelle cette écriture décomposition de Bruhat de la matrice $A$.*

**(b)** Montrer que la matrice $P_\sigma$ de la question précédente est uniquement déterminée par $A$.

Le résultat de la question 16 permet donc d'affirmer que

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \subset \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_n^+(\mathbf{K}) P_\sigma T_n^+(\mathbf{K}).$$

Nous admettrons par la suite que cette inclusion est une égalité.

**17.** Déterminer la décomposition de Bruhat d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$ i.e. telle que $ad - bc = 1$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se place dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et on munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ d'une norme quelconque $\|\cdot\|$.
Les **mineurs principaux** d'une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![ 1\,;\, n ]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sont les déterminants des matrices extraites $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![ 1\,;\, k ]\!]^2}$ pour tout $k \in [\![ 1\,;\, n ]\!]$, ces matrices étant obtenues en ne conservant que les $k$ premières lignes et $k$ premières colonnes de la matrice $A$.

**18.** On considère les deux propositions ci-dessous, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ :

- ▷ $(\mathbf{E}_1)$ : la matrice $A$ s'écrit comme produit d'un élément de $T_n^-(\mathbf{C})$ et d'un élément de $T_n^+(\mathbf{C})$,
- ▷ $(\mathbf{E}_2)$ : les mineurs principaux de $A$ sont tous non nuls.

**(a)** Montrer que si $A$ satisfait la propriété $(\mathbf{E}_1)$ ou la propriété $(\mathbf{E}_2)$ alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

**(b)** À l'aide d'une décomposition par blocs, montrer que $(\mathbf{E}_1) \Rightarrow (\mathbf{E}_2)$.

**(c)** En procédant par récurrence, montrer que $(\mathbf{E}_2) \Rightarrow (\mathbf{E}_1)$.

**19.** Montrer que l'ensemble des matrices qui vérifient la condition $(\mathbf{E}_2)$ est un ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.
*Indication* : on pourra considérer pour $k \in [\![ 1\,;\, n ]\!]$ l'application $\varphi_k$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ qui à une matrice $A$, associe son mineur principal d'ordre $k$.

**20.** Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$ définie, pour tout $k \in [\![ 1\,;\, n ]\!]$, par : $\tau(k) = n - k + 1$.



**Tournez la page S.V.P.**

**(a)** Montrer que : $P_\tau T_n^+(\mathbf{C})P_\tau = T_n^-(\mathbf{C})$, où $P_\tau T_n^+(\mathbf{C})P_\tau$ désigne l'ensemble $\{P_\tau U P_\tau, U \in T_n^+(\mathbf{C})\}$.

**(b)** Montrer que $P_\tau T_n^+(\mathbf{C})P_\tau T_n^+(\mathbf{C}) = \{P_\tau U P_\tau V,\ (U, V) \in T_n^+(\mathbf{C}) \times T_n^+(\mathbf{C})\}$ est un ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

**(c)** Montrer que $P_\tau T_n^+(\mathbf{C})P_\tau T_n^+(\mathbf{C})$ est dense dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

**(d)** Montrer que l'application :

$$\begin{cases} \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \\ A & \longmapsto & P_\tau A \end{cases}$$

réalise un homéomorphisme.

**(e)** En déduire que $T_n^+(\mathbf{C})P_\tau T_n^+(\mathbf{C})$ est un ouvert dense de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Que peut-on affirmer sur la topologie de l'ensemble $\bigcup\limits_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \neq \tau}} T_n^+(\mathbf{C})P_\sigma T_n^+(\mathbf{C})$ ?

## Partie IV : décomposition de Bruhat et drapeaux

Soit $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}^*$.
On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des drapeaux totaux de $E$ et $\Delta$ l'ensemble des bases de $E$.

Dans cette partie, on désigne par $\delta$ l'application de $\Delta$ à valeurs dans $\mathcal{D}$ qui, à une base $B = (e_1, \dots, e_n)$, associe le drapeau total $(\mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_i))_{i \in [\![ 1\,;n ]\!]}$.

**21.** Montrer que le groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ agit fidèlement et transitivement sur l'ensemble $\Delta$ par :

$$g \cdot (e_i)_{i \in [\![ 1\,;n ]\!]} = \big(g(e_i)\big)_{i \in [\![ 1\,;n ]\!]}.$$

**22.** Montrer que $\mathrm{GL}(E)$ agit transitivement sur l'ensemble $\mathcal{D}$ par :

$$g \cdot (E_i)_{i \in [\![ 1\,;n ]\!]} = \big(g(E_i)\big)_{i \in [\![ 1\,;n ]\!]}$$

et que les actions définies dans cette question et la question précédente sont compatibles, c'est-à-dire que :

$$\forall B \in \Delta,\ \forall g \in \mathrm{GL}(E),\ \delta(g \cdot B) = g \cdot \delta(B).$$

Dans la suite de la partie, *via* le choix d'une base $B_0 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, on identifie $E$ à $\mathbf{K}^n$ et le groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ à l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ des matrices inversibles.

**23.** Montrer que le stabilisateur de $\delta(B_0)$ s'identifie au sous-groupe $T_n^+(\mathbf{K})$ des matrices triangulaires supérieures inversibles.

**24.** On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ par : $M\ \mathcal{R}\ N$ si et seulement si $M^{-1}N \in T_n^+(\mathbf{K})$, pour $M, N \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
Pour $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, on note $\overline{M}$ la classe de $M$ dans l'ensemble quotient $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K})$.

**25.** On considère l'application $\varphi$ suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \overline{M} & \longmapsto & \varphi(\overline{M}) = M \cdot \delta(B_0) \end{array}\right.$$

**(a)** Montrer que $\varphi$ est bien définie.

**(b)** Montrer que $\varphi$ est une bijection de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K})$ sur $\mathcal{D}$.

**26.** Montrer que pour tout $X$ et $Y$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, on a $\varphi(\overline{XY}) = X \cdot \varphi(\overline{Y})$.

On considère l'action du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ sur l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K})$ définie par $A \cdot (\overline{X}, \overline{Y}) = (\overline{AX}, \overline{AY})$.

**27.** Soient $X$ et $Y$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. À l'aide de la décomposition de Bruhat, montrer qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $T_1 \in T_n^+(\mathbf{K})$ tel que $(\overline{X}, \overline{Y}) = XT_1 \cdot (\overline{I_n}, \overline{P_\sigma})$, et que $\sigma$ est unique.

**28.** En déduire le nombre d'orbites dans l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K})$.

FIN DU SUJET