Soit n un entier supérieur ou égal à 1. $M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$) désigne l'algèbre des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). I_n désigne la matrice identité.

On rappelle que $M_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel normé muni de la norme

$$||(a_{ij})|| = \sup_{ij} |a_{ij}|.$$

Pour $p \geq 1$, $M_{n,p}(\mathbb{C})$ désigne le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des matrices à coefficients complexes ayant n lignes et p colonnes. On identifiera $M_{n,1}(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}^n$. Pour $A \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A, élément de $M_{p,n}(\mathbb{C})$.

$GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) désigne le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$).

S_n désigne le sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques réelles.

S_n^+ désigne le sous-ensemble de S_n formé des matrices réelles symétriques à valeurs propres positives ou nulles.

S_n^{++} est le sous-ensemble de S_n^+ formé des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives.

$\mathbb{C}_n[X]$ (resp. $\mathbb{R}_n[X]$) est le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes (resp. le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels) de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que $\mathbb{C}_n[X]$ est un espace vectoriel normé avec

$$||\sum_{i=0}^{n} a_i X^i|| = \sup_{0 \leq i \leq n} |a_i| \quad .$$

Pour A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, on désigne par χ_A le polynôme caractéristique de A : $\chi_A(X) = det(A - XI_n)$.

Pour A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, on désigne par $P_{m,A}$ le polynôme minimal de A. On rappelle que $P_{m,A}$ est le polynôme unitaire générateur de l'idéal I de $\mathbb{C}[X]$ défini par $I = \{P \in \mathbb{C}[X] \quad | \quad P(A) = 0\}$ et que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si $P_{m,A}$ est à racines simples.

Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on rappelle qu'il existe un couple unique $(D, N) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$, où D est diagonalisable et N est nilpotente, vérifiant : $DN = ND$ et $A = D + N$.

On rappelle que, si M appartient à $M_n(\mathbb{C})$, on note

$$exp(M) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^i}{i!},$$

et que si A et B appartiennent à $M_n(\mathbb{C})$ et vérifient $AB = BA$ alors on a l'égalité : $exp(A + B) = exp(A)exp(B)$.

Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, $Spec(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de A.

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $z = a + ib \in \mathbb{C}$ on pose $Im(z) = b$.

On désigne par $\mathfrak{S}_n$ le groupe des bijections de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Partie I

Soient A et B deux éléments de $M_n(\mathbb{C})$ et soit $\phi_{A,B}$ l'application de $M_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$ définie par $\phi_{A,B}(X) = AX + XB$.

1) Montrer que, si $X \in M_n(\mathbb{C})$, $Spec(X) = Spec({}^tX)$.

2) Soit $b \in Spec(B), a \in Spec(A)$. Montrer qu'il existe $(V,W) \in (\mathbb{C}^n \backslash \{0\})^2$ tel que ${}^tWB = b{}^tW$, $AV = aV$. Calculer $\phi_{A,B}(V{}^tW)$. Que peut-on en déduire pour l'application $\phi_{A,B}$?

3)

a) Soient $0 \neq Y \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\phi_{A,B}(Y) = \lambda Y$. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P(A)Y = YP(\lambda I_n - B)$. En utilisant une factorisation de $P_{m,A}$, montrer qu'il existe $a \in Spec(A)$ tel que $(\lambda - a)I_n - B$ ne soit pas inversible.

b) Déduire de ce qui précède que :

$$Spec(\phi_{A,B}) = Spec(A) + Spec(B).$$

4) Que peut-on dire de $Spec(\phi_{A,A})$ si A appartient à S_n^{++} ?

5)

a) Soit $X_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $1 \leq i \leq n$, où 1 est situé à la $i^{ème}$ ligne. Calculer $X_i\,{}^tX_j$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

b) Montrer que si A et B sont diagonalisables alors $\phi_{A,B}$ est diagonalisable.

6)

a) Déterminer le polynôme minimal de $\phi_{A,0}$ en fonction de celui de A ainsi que celui de $\phi_{0,B}$ en fonction de celui de B.

b) En déduire une nouvelle démonstration de la question I)5)b).

c) Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ avec $d_i \neq d_j$ pour $i \neq j$. Trouver la dimension de $Ker\phi_{D,-D}$.

Partie II

Soit h l'application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ définie par $h(X) = X^2$.

1) Montrer que h est de classe C^1 et montrer que sa différentielle au point X est l'application $H \rightarrow XH + HX$.

Tournez la page S.V.P.

2) On suppose dans cette question uniquement que $n \geq 2$ et on désigne par $\tilde{h}$ l'application de $M_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$ définie par $\tilde{h}(X) = X^2$. Montrer que $\tilde{h}$ n'est pas surjective. (On pourra construire et utiliser une matrice $X \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $X^n = 0$, $X^{n-1} \neq 0$, en montrant qu'elle n'a pas d'antécédent par $\tilde{h}$).

3) Soit $X \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = I_n$. Montrer que X est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et que X est semblable à $X' = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \epsilon_n \end{pmatrix}$ où $\epsilon_i = \pm 1$, $\quad i = 1, ..., n$. Le résultat demeure-t-il pour $X \in M_n(\mathbb{R})$?

4) Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que pour tout g de G on ait $g^2 = I_n$.
   a) Montrer que G est commutatif.
   b) On désigne par $Vect(G)$ le $\mathbb{C}$- sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ engendré par G.
      i) Montrer qu'il existe $(g_1, \dots, g_p)$ appartenant à G^p tel que : $Vect(G) = Vect(\{g_1, \dots, g_p\})$.
      ii) Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que pour tout g de G la matrice $P^{-1}gP$ soit diagonale.
   c) Déduire du b) que G est fini et qu'il existe un entier $m \leq n$ tel que l'ordre de G soit 2^m.

5) Montrer que les groupes $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL_m(\mathbb{C})$ sont isomorphes si et seulement si $m = n$. (On pourra supposer que $n > m$ et qu'il existe un isomorphisme ϕ de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $GL_m(\mathbb{C})$ et introduire un sous-groupe approprié de $GL_n(\mathbb{C})$).

6) Montrer le même résultat pour les groupes $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_m(\mathbb{R})$. Les groupes $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL_m(\mathbb{R})$ sont-ils isomorphes ?

Partie III

On désigne par $U_n(\mathbb{C}_n[X])$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et soit s l'application de $\mathbb{C}^n$ dans $U_n(\mathbb{C}_n[X])$ définie par :

$$s(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i).$$

1) Montrer que s est une application continue et surjective.

2) Soit $P \in U_n(\mathbb{C}_n[X])$ et $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $a_n = 1$. Montrer que si z est une racine de P dans $\mathbb{C}$ on a : $|z| \leq 1 + ||P||$. (on pourra envisager les deux cas $|z| \leq 1$ et $|z| > 1$).

3) Montrer que l'application de $M_n(\mathbb{C})$ dans $U_n(\mathbb{C}_n[X])$ définie par $A \to (-1)^n \chi_A$ est continue.

4) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et soit $(P_k)_{k \in N}$ une suite de polynômes appartenant à $U_n(\mathbb{C}_n[X]) \backslash s(\Omega)$ convergeant vers $P \in U_n(\mathbb{C}_n[X])$. Soit, pour tout entier naturel k, $(\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n,k})$ tel que $s(\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n,k}) = P_k$.

a) Montrer que, pour tout entier k et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $(\lambda_{\sigma(1),k}, \dots, \lambda_{\sigma(n),k})$ n'appartient pas à Ω et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout i et tout k, $|\lambda_{i,k}| \leq M$.

b) Déduire du a) que $P \notin s(\Omega)$.

5) Montrer que si ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres appartiennent à ω est un ouvert non vide de $M_n(\mathbb{C})$.

6) Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres λ vérifient $|Im(\lambda)| < \pi$.

a) Montrer que $\mathcal{U}$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{C})$.

b) Soit $\mathcal{N} = \{N \in M_n(\mathbb{C}), \quad \exists p(N) \in I\!N, \quad N^{p(N)} = 0\}$. On considère l'ensemble $\mathfrak{L} = \{I_n + N, \quad N \in \mathcal{N}\}$. Pour $v = I_n + N$ appartenant à $\mathfrak{L}$ on pose :

$$ln(v) = ln(I_n + N) = \sum_{q=1}^{p(N)-1} \frac{(-1)^{q+1} N^q}{q}.$$

i) Montrer que si X appartient à $\mathcal{N}$, $exp(X) \in \mathfrak{L}$.

ii) Soient X appartenant à $\mathcal{N}$ et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{C})$ définie par:

$$f(t) = ln(exp(tX)).$$

Montrer que f est dérivable, que $f'(t) = X$, puis que pour tout t réel $f(t) = tX$. (On pourra écrire $exp(tX) = I_n + Z(t)$).

iii) En déduire que pour tout X appartenant à $\mathcal{N}$, $ln(exp(X)) = X$.

c) Montrer que si D et D' appartiennent à $\mathcal{U}$, sont diagonalisables et telles que $exp(D) = exp(D')$, alors $D = D'$. (On pourra montrer que D et D' ont les mêmes sous-espaces propres) .

d) Montrer que exp est injective sur $\mathcal{U}$. (On pourra décomposer une matrice M de $\mathcal{U}$ en la somme de deux éléments appropriés et utiliser III) 6)b)iii) et III) 6)c)).

7) Soit $\mathfrak{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{D}_1$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres distinctes.

a) Montrer que $\mathfrak{D}_1$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{C})$ en utilisant 3) et 4).

b) Quel est l'intérieur de $\mathfrak{D}$?

c) Expliciter le polynôme caractéristique de $\phi_{A,0}$ en fonction de χ_A si A appartient à $M_n(\mathbb{C})$.

d) L'application de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ qui à A associe son polynôme minimal $P_{m,A}$ est-elle continue sur $\mathfrak{D}_1$? Est-elle continue sur $M_n(\mathbb{C})$?

8)

a) Soit P appartenant à $U_n(\mathbb{R}_n[X])$ (P est unitaire de degré n à coefficients réels). Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ (ie a toutes ses racines réelles) si et seulement si pour tout z de $\mathbb{C}$ on a : $|P(z)| \geq |Im(z)|^n$.

b) On désigne par $\mathfrak{D}'$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$. Caractériser l'adhérence de $\mathfrak{D}'$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

c) En déduire que $\mathfrak{D}'$ n'est pas dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

9) Soit $p \geq 1$ et q deux entiers naturels. On considère l'ensemble $\mathfrak{F}$ des matrices A appartenant à $M_p(\mathbb{C})$ et de rang strictement supérieur à q. Montrer que $\mathfrak{F}$ est un ouvert de $M_p(\mathbb{C})$.

10) Montrer que, pour tout A de $M_n(\mathbb{C})$, la dimension du $\mathbb{C}$ - espace vectoriel $Ker\phi_{A,-A}$ est supérieure ou égale à n .

11) En déduire que, si A appartient à $M_n(\mathbb{R})$, la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\{X \in M_n(\mathbb{R}) \,, XA = AX\}$ est supérieure ou égale à n .

12) Soit ϕ l'application de S_n dans $M_n(\mathbb{R})$ définie par $\phi(X) = X^2$.

   a) Montrer que $g = \phi_{|S_n^+}$ est injective.

   b) A l'aide de III) 5), montrer que S_n^{++} est un ouvert de S_n. Montrer que $\phi_{|S_n^{++}}$ est un C^1-difféomorphisme de S_n^{++}.