

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1998

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE

FILIÈRE MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'emploi de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition du concours E.N.T.P.E. ; suite à l'arrêté du 9 décembre 1997.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 6 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 ; soit (e_1, e_2, \dots, e_n) la base canonique de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . L'espace \mathbb{R}^n est muni d'une structure d'espace vectoriel euclidien grâce au produit scalaire $(x | y)$ défini par la relation :

$$(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^t X \cdot Y ;$$

x et y sont deux vecteurs de \mathbb{R}^n de coordonnées respectives $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$; X et Y désignent les matrices colonnes associées aux vecteurs x et y .

Soit Z^n le sous-ensemble des vecteurs x de \mathbb{R}^n dont les coordonnées dans la base canonique de \mathbb{R}^n sont toutes des entiers relatifs :

$$Z^n = \{ x \mid x \in \mathbb{R}^n, x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}, x_i \in \mathbb{Z} \} .$$

Par définition une "base" de l'ensemble Z^n est une suite $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de vecteurs tels que :

- i/ La suite $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n ;
- ii/ Chaque vecteur $\varepsilon_i, 1 \leq i \leq n$, appartient à l'ensemble Z^n ;
- iii/ Tout vecteur x appartenant à Z^n est une combinaison linéaire des vecteurs $\varepsilon_i, 1 \leq i \leq n$:

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i ; \text{ les coefficients } \lambda_i, 1 \leq i \leq n, \text{ sont des entiers relatifs.}$$

Soit M une matrice appartenant à l'espace vectoriel réel $M(n; \mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n ; le réel m_{ij} est le coefficient de la matrice M à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne. Le sous-ensemble des matrices réelles d'ordre n inversibles est noté $GL(n; \mathbb{R})$.

Soit $M(n; Z)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n de coefficients égaux à des entiers relatifs. Soit $GL(n; Z)$ le sous-ensemble des matrices inversibles de $M(n; Z)$ dont l'inverse appartient à $M(n; Z)$.

$$GL(n; Z) = \{ M \mid M \in M(n; Z) \leftrightarrow GL(n; Z) \text{ et } M^{-1} \in M(n; Z) \} .$$

Notation : soient A, B, \dots des matrices appartenant à $M(n; R)$, les endomorphismes de R^n associés à ces matrices dans la base canoniques de R^n sont notés a, b, \dots .

Soit $S^+(n; R)$ l'ensemble des matrices symétriques A telles que la forme quadratique $x \cdot (x \mid a(x)) = {}^t X \cdot A \cdot X$ soit définie et positive.

Le but du problème est d'établir, pour une matrice A de $S^+(n; R)$, une relation entre le minimum $m(A)$ de la forme quadratique $x \cdot (x \mid a(x)) = {}^t X \cdot A \cdot X$, lorsque x est un vecteur appartenant à Z^n différent du vecteur nul, noté 0 , et le déterminant de la matrice A .

Première partie.

Construction d'une "base" de Z^n à partir d'un vecteur donné de Z^n .

I-1°) Déterminant d'une matrice de $GL(n; Z)$:

Soit M une matrice appartenant à l'espace $M(n; Z)$; démontrer que, pour que cette matrice M appartienne à l'ensemble $GL(n; Z)$, il faut et il suffit que le déterminant $\det(M)$ de cette matrice soit égal à 1 ou à -1 .

I-2°) Un résultat préliminaire :

Soit P l'application de $Z \times Z$ dans Z qui, à deux entiers relatifs a et b , associe l'entier $P(a, b)$ égal :

- au P.G.C.D. des entiers relatifs a et b s'ils sont tous les deux différents de 0 ,
- à l'entier relatif a ou b lorsque respectivement b ou a est nul ; il vient :

$$P(a, 0) = a, P(0, b) = b, P(0, 0) = 0 .$$

Soit x un vecteur appartenant à l'ensemble Z^2 de coordonnées a et b . Établir l'existence d'un endomorphisme v de R^2 associé à une matrice V , appartenant à $GL(2; Z)$, telle que l'image du vecteur x par l'endomorphisme v soit le vecteur de coordonnées $(d, 0)$ où d est l'entier $P(a, b)$:
$$V \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} ; \text{ poser : } V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} .$$

I-3°) Recherche de "base" dans Z^n :

Soit $x = ((x_i)_{1 \leq i \leq n})$ un vecteur appartenant à l'ensemble Z^n , différent de 0 , dont les coordonnées différentes de 0 sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble.

- a. L'entier n est égal à 2 : démontrer, qu'il existe un endomorphisme u de matrice U appartenant à $GL(2; Z)$ tel que le vecteur x soit l'image du vecteur e_1 par u :

$x = u(e_1)$. En déduire qu'il existe un vecteur y , appartenant à l'ensemble Z^2 , tel que l'ensemble $\{x, y\}$ soit une "base" de Z^2 .

b. L'entier n est supérieur ou égal à 3 ($n \geq 3$) : soit $(d_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ la suite des entiers définis par les relations suivantes :

- $d_{n-1} = P(x_n, x_{n-1})$;
- pour tout entier i compris entre 1 et $n-2$ ($1 \leq i \leq n-2$), $d_i = P(d_{i+1}, x_i)$.

Pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$ ($1 \leq k \leq n-1$), y^k est le vecteur dont les coordonnées sont $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, d_k, 0, \dots, 0$.

Démontrer l'existence d'un endomorphisme v_{n-1} tel que $v_{n-1}(x) = y^{n-1}$ (de coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, d_{n-1}, 0$).

Démontrer, pour tout entier k , l'existence d'un endomorphisme v_k de matrice V_k appartenant à $GL(n; Z)$, telle que l'image du vecteur x par l'endomorphisme v_k , soit le vecteur y^k :

$$v_k(x) = y^k .$$

En déduire l'existence d'un endomorphisme u de matrice U appartenant à $GL(n; Z)$ tel que la relation $x = u(e_1)$ ait lieu.

c. Démontrer qu'il existe $n-1$ vecteurs z^2, z^3, \dots, z^n tels que la suite x, z^2, z^3, \dots, z^n soit une "base" de Z^n .

Deuxième partie

Deux matrices A et B , appartenant à $M(n; R)$, sont dites Z -congruentes si et seulement s'il existe une matrice U appartenant à l'ensemble $GL(n; Z)$ telle que la relation $B = {}^tU.A.U$ ait lieu. Il est admis que cette propriété est une relation d'équivalence notée : $A \sim B$.

Soit A une matrice, appartenant à $S^+(n; R)$. L'ensemble des valeurs prises par la forme quadratique $x \rightarrow a(x) = {}^tX.A.X$, lorsque x est un vecteur, différent de 0, appartenant à Z^n , est un ensemble de réels strictement positifs. Il est admis que la borne inférieure $m(A)$ de cet ensemble existe et est un réel positif ou nul :

$$m(A) = \inf_{x \neq 0, x \in Z^n} (x | a(x)) > 0 .$$

Le but de cette partie est de montrer que, dans l'ensemble $S^+(n; R)$, toute matrice A est Z -congruente à une matrice B de $S^+(n; R)$ telle que $m(B)$ soit égal au coefficient b_{11} .

II-1°) Propriétés des matrices Z -congruentes :

Soient A et B deux matrices de $M(n; R)$ Z -congruentes. La matrice A appartient à l'ensemble $S^+(n; R)$.

- Démontrer que la matrice B appartient aussi à l'ensemble $S^+(n; R)$.
- Établir les relations : $\det(A) = \det(B)$, $m(A) = m(B)$.

- c. Soit B la matrice définie par la relation : $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Établir que la matrice B appartient à l'ensemble $S^+(2; \mathbb{R})$ (utiliser la forme quadratique associée à cette matrice) ; déterminer le réel $m(B)$.

II-2°) Propriétés du réel $m(A)$:

Dans cette question la matrice A , associée à l'endomorphisme a , appartient à l'ensemble $S^+(n; \mathbb{R})$.

- a. Comparer les réels $m(A)$ et a_{11} . Il est admis qu'il n'existe qu'un nombre fini de vecteurs x appartenant à l'ensemble \mathbb{Z}^n tels que la relation $(x | a(x)) \geq a_{11}$ ait lieu. En déduire l'existence d'au moins un vecteur z appartenant à \mathbb{Z}^n vérifiant l'égalité $(z | a(z)) = m(A)$.
- Soient z_1, z_2, \dots, z_n les coordonnées de ce vecteur z . Démontrer que les coordonnées différentes de 0 sont des entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble et que le réel $m(A)$ est strictement positif.
- b. Démontrer qu'il existe une matrice B congruente à la matrice A telle que la relation $b_{11} = m(B)$ ait lieu.

Troisième partie

Le but de cette partie est d'établir, pour toute matrice A appartenant à l'ensemble $S^+(n; \mathbb{R})$, une relation simple donnant une majoration du réel $m(A)$ au moyen du déterminant de A . Cette relation est d'abord établie pour les matrices d'ordre 2 en introduisant la définition de matrice "réduite" puis établie pour les matrices d'ordre n .

III-1°) Relations vérifiées par les coefficients d'une matrice de $S^+(2; \mathbb{R})$:

Étant donnée une matrice A symétrique d'ordre 2, soient a, b et c ses coefficients définis par la relation suivante : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

- a. Démontrer qu'une matrice A appartient à $S^+(2; \mathbb{R})$ si et seulement si ses coefficients vérifient les relations : $a > 0, c > 0$ et $a c - b^2 > 0$.
- b. Démontrer que, pour qu'une matrice A appartienne à $S^+(2; \mathbb{R})$, il suffit que ses coefficients vérifient les relations : $0 < a, 2 |b| \leq a + c$.
- Déterminer le réel $m(A)$ lorsque les coefficients a, b et c vérifient les inégalités ci-dessus.

Une matrice A , appartenant à $S^+(2; \mathbb{R})$, est dite "réduite" lorsque ses coefficients a , b et c vérifient les relations :

$$0 < a, \quad 0 < 2b < a < c.$$

III-2°) Matrice "réduite" Z-congruente à une matrice donnée :

Soit $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$ une matrice appartenant à $S^+(2; \mathbb{R})$ telle que le réel $m(A_1)$ soit égal au coefficient a_1 .

Démontrer qu'il existe une matrice $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$, Z-congruente à la matrice A_1 , dont les coefficients vérifient les relations : $0 < a_2, \quad 2|b_2| < a_2 < c_2$. Établir cette propriété en recherchant une matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où λ est un entier relatif, qui vérifie la relation

$$\text{suivante : } A_2 = {}^tU \cdot A_1 \cdot U.$$

En déduire qu'il existe une matrice A_3 (appartenant à $S^+(2; \mathbb{R})$), "réduite" et Z-congruente à la matrice A_1 .

III-3°) Relation entre les réels $m(A)$ et $\det(A)$:

Démontrer que, pour toute matrice A appartenant à l'ensemble $S^+(2; \mathbb{R})$, les réels $m(A)$ et $\det(A)$ sont liés par la relation suivante : $m(A) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\det(A)}$.

Vérifier la relation ci-dessus pour la matrice B définie à la question II-1.c.

III-4°) Matrice B induite par une matrice A :

L'entier n est supposé supérieur ou égal à 3 ($n \geq 3$). Étant donnée une matrice $A = (a_{ij})$ appartenant à l'ensemble $S^+(n; \mathbb{R})$, dont le coefficient a_{11} est différent de 0 ($a_{11} \neq 0$), soit V la matrice dont les coefficients $v_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n$, sont définis par les relations :

$$v_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ \frac{a_{1j}}{a_{11}}, & \text{si } i = 1 \text{ et } j \geq 2, \\ 0, & \text{dans les autres cas.} \end{cases} ; \quad V = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient a l'endomorphisme de matrice associée A dans la base canonique (e_1, e_2, \dots, e_n) de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . Soit f l'endomorphisme défini par les relations :

$$\text{pour tout entier } i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad f(e_i) = a_{11} a(e_i) - a_{1i} a(e_1).$$

- a. Démontrer que le sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^n engendré par les vecteurs e_2, e_3, \dots, e_n est stable par l'endomorphisme f .

Soit B la matrice d'ordre $n-1$ associée à la restriction de l'endomorphisme f (notée encore f) au sous-espace vectoriel F dans la base (e_2, e_3, \dots, e_n) . Il est admis que la matrice V , définie ci-dessus vérifie la relation ci-après : $A = {}^tV \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{11}} B \end{pmatrix} V$.

b. Établir la relation qui lie les déterminants des matrices A et B entre eux.

c. Étant donné un vecteur x de \mathbb{R}^n : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, soit x_F le vecteur du sous-espace vectoriel F défini par la relation : $x_F = \sum_{i=2}^n x_i e_i$. Soit y le vecteur $v(x)$ image du vecteur x par l'endomorphisme v de matrice associée V . Démontrer la relation :

$$(x | a(x)) = a_{11} (y_1)^2 + \frac{1}{a_{11}} (x_F | f(x_F)) .$$

Démontrer que la matrice B appartient à l'ensemble $S^{+(n-1)}(\mathbb{R})$.

III-5°) Relation entre les réels $\det(A)$ et $m(A)$:

Le but de cette question est d'établir, pour toute matrice A de l'ensemble $S^{+(n)}(\mathbb{R})$, la relation ci-dessous, établie lorsque l'entier n est égal à 2 :

$$(\mathbf{R}) \quad m(A) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} (\det(A))^{1/n} .$$

a. Deux hypothèses sur la matrice A sont formulées :

- $m(A) = a_{11}$;
- la relation **(R)** ci-dessus est vraie pour la matrice B construite à partir de la matrice A comme à la question précédente.

D'après la question II-2.a, il existe un vecteur $z_F = \sum_{i=2}^n z_i e_i$ (appartenant à Z^{n-1}) pour lequel l'égalité $(z_F | f(z_F)) = m(B)$ a lieu.

Démontrer qu'il existe un entier relatif z_1 tel que le vecteur z , de Z^n , défini par la relation : $z = z_1 e_1 + z_F$, est transformé par l'endomorphisme v , de matrice associée V , en un vecteur y ($y = v(z)$) dont la première coordonnée y_1 a une valeur absolue inférieure ou égale à $1/2$: $|y_1| \leq 1/2$.

En déduire que la matrice A vérifie la relation **(R)**.

b. Démontrer, pour toute matrice A de $S^{+(n)}(\mathbb{R})$, la relation **(R)**.

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE