FORMES QUADRATIQUES ET HERMITIENNES
(exercices)

I

Ex 1: Réduire, c'est à dire décomposer en somme de carrés les formes quadratiques sur $\mathbf{R}^n$ par la méthode de Gauss et par réduction matricielle.

$$Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\alpha x_1x_2 - 2\beta x_1x_3 \qquad (n=3)$$

$$Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 \qquad (n=4)$$

Ex 2: Donner la signature de la forme quadratique sur $\mathbf{R}^3$ qui s'écrit dans la base canonique:

$$Q(x_1,x_2,x_3) = (x_2-x_3)^2 + (x_3-x_1)^2 + (x_1-x_2)^2$$

Ex 3: Réduire la forme quadratique hermitienne sur $\mathbf{C}^3$:

$$Q(z_1,z_2,z_3) = z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 - iz_1\overline{z}_2 + i\overline{z}_1z_2.$$

Donner sa signature.

II
La trace, forme bilinéaire symétrique sur $M_n(\mathbf{R})$.

On note $E_{ij} = (\delta_{ij})_{1\leq i\leq n 1\leq j\leq n}$. On rappelle que $\{E_{ij}\}_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}}$ est une base de E qu'on dit canonique.
Soient $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $f : E\times E \to \mathbf{R}$, $\quad (A,B) \mapsto tr(AB)$, $\quad trM$ désignant la trace de la matrice M.
a) Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique. montrer qu'elle est non dégénérée? A-t-elle des éléments isotropes?
b) Montrer que toute matrice symétrique est f-orthogonale à toute matrice antisymétrique.
Quelle est la signature de f?
c) Montrer que les matrices

$$\frac{1}{2}(E_{ij}+E_{ji}) \qquad (i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\} \quad \text{et} \quad i\leq j$$

et

$$\frac{1}{2}(E_{ij}-E_{ji}) \qquad (i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\} \quad \text{et} \quad i< j$$

constituent une base f-orthogonale de E.
d) Soient $l\in E^*$ telle que $(A,B)\mapsto l(AB)$ soit une forme bilinéaire symétrique.
Montrer que la forme l est proportionnelle à la forme $t$race, c'est à dire qu'il existe $\lambda\in\mathbf{R}$ tel que $l = \lambda tr$.
e) Montrer que la forme trace induit une norme sur le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $M_n(\mathbf{R})$.

Ex 1: *Endomorphismes symétriques ou autoadjoints*
Soit E un espace euclidien de dimension n dont on note $< .,. >$ le produit scalaire et soit f un endomorphisme de E.
1) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:
(i) $< x,f(y) >=< f(x),y >$ quels que soient $x, y \in E$.
(ii) La matrice de f relativement à une quelconque base orthonormée de E est symétrique.
(iii) Il existe une base orthonormée de E relativement à laquelle la matrice de f est symétrique.
Un endomorphisme f de E est dit *symétrique* (ou *autoadjoint*) s'il vérifie (i) (ii) ou (iii).
2) Montrer que $f \mapsto ((x,y) \mapsto < x,f(y) >)$ établit une bijection entre les endomorphismes symétriques de E et les formes bilinéaires symétriques sur E.

Ex 2: *Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée* ou, ce qui est équivalent *Tout endomorphisme symétrique (i.e. autoadjoint) réel est diagonalisable dans une base orthonormée.*
Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E dont on note $< .,. >$ le produit scalaire.
a) Posons $q(x) =< x,f(x) >$ (q est la forme quadratique associée à f).
Montrer que

$$\{q(x)/ \parallel x \parallel^2 \mid x \in E, x \neq 0\}$$

admet un plus grand élément λ tel que $\lambda =< x_0,f(x_0) >$ pour un élément x_0 de E de norme 1.
(i) Montrer que pour tout $z \in E, q(z) \leq \lambda \parallel z \parallel^2$.
(ii) Calculer $q(tx + y)$ pour $t \in \mathbf{R}$.
(iii) Montrer $\lambda < x,y > - < y.f(x) >= 0$ quel que soit $y \in E$.
(iv) Montrer que λ est (la plus grande)valeur propre de f.
b) Montrer que si E_λ désigne le sous-espace propre associé à la valeur propre λ, on a

$$f(E_\lambda^\perp) \subset E_\lambda^\perp.$$

c) Démontrer, par récurrence sur n, le résultat cherché.
remarques:
(i) Toutes les valeurs propres de f sont réelles .
(ii) Les sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Ex 3: Montrer, en adaptant la démonstration de l'exercice 2) que si E est un espace hermitien, tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable dans une base orthonormée.

Ex 4: *Racine carrée d'une matrice symétrique positive*
1) Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n.
Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $AB = BA$
(ii) AB symétrique

(iii) Il existe $P \in O(n)$, tel que ${}^tPAP$ et ${}^tPBP$ soient diagonales.
2) On rappelle qu'une matrice symétrique est dite *positive* si ${}^tXAX \geq 0$ quel que soit X ou, ce qui est équivalent, si toutes ses valeurs propres sont positives.
Si de plus ${}^tTXAX = 0 \Leftrightarrow X = 0$ A est dite *définie positive*, ce qui est équivalent à dire que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.
Soit A une matrice symétrique réelle positive .
Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique réelle positive B telle que $B^2 = A$.

IV

Ex 1: Montrer que dans un espace euclidien, toute boule est convexe.

Ex 2:*caractérisation des projections orthogonales.*
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie dont on note $< .,. >$ le produit scalaire.

Soit p un endomorphisme de E qui vérifie $p \circ p = p$ (i.e. p est une projection).
Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:
(i) p est une projection orthogonale
(ii) p est un endomorphisme symétrique.
(iii) $\| p(x) \| \leq \| x \|$ pour tout $x \in E$.

Ex 3:*approximation au sens des moindres carrés.*
Soit $A \in M_{n,p}(\mathbf{R})$ de rang n (on a donc $n \leq p$)
et soit $B \in \mathbf{R}^n$.
1) Montrer qu'il existe $X \in \mathbf{R}^p$ unique tel que $\|AX - B\|^2$ soit minimum, où $\| \, \|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^p$.
(ind: AX est alors la projection orthogonale de B sur l'image de A).
2) Montrer que X est l'unique solution du système ${}^tAAX = {}^tAB$.
3)
a) Etant donnés n points $(x_i,y_i)_{i=1..n}$ de $\mathbf{R}^2$, déterminer un polynôme $P(X) \in \mathbf{R}[X]$ de degré $< p$ $(p \leq n)$ dont le graphe approche au mieux ces points au sens des moindres carrés, c'est à dire qui minimise la quantité

$$\Sigma_{i=1}^{n}(\Sigma_{j=0}^{p-1} a_j x_i^j - y_i)^2$$

b) Que peut-on dire si $n = p$?
c) Montrer que si $p = 2$, le graphe est une droite passant par l'isobarycentre du système $(x_i,y_i)\, i = 1..n$.
4) Montrer l'équivalence

$${}^tAAX = {}^tAB \Longleftrightarrow \overrightarrow{grad}\,(\|AX - B\|^2) = 0$$

(rappel:$f(X + \Delta X) = f(X) + \overrightarrow{grad}.\Delta X + O(\| \overrightarrow{\Delta X} \|^2)$).

V

Décompositions dans le groupe linéaire.

Ex 1: *La décomposition d'Iwasawa.*
Dans $\mathcal{M}(n,\mathbf{R})$, montrer que pour toute matrice A inversible, on peut trouver une matrice orthogonale O et une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux $> 0, T$ telles que $A = OT$.
Montrer qu'une telle décomposition est unique.
On dit que c'est la *décomposition d'Iwasawa* de la matrice M.
Que pensez-vous de la même question quand on remplace OT par TO?
(ind: utiliser l'orthogonalisation de Schmidt).

Ex 2:*La décomposition de Cholevski.*
Montrer qu'une matrice M est la matrice d'une forme définie positive si et seulement s'il existe une matrice triangulaire supérieure inversible T vérifiant $A = T^*T, \quad T^*$ désignant la matrice adjointe de T.

Ex 3:*La décomposition polaire.*
Montrer que pour toute matrice $A \in SL(n,\mathbf{R})$, il existe un couple unique (O,S) de matrices avec $O \in SO(n,\mathbf{R})$ et S symétrique définie positive tel que $M = OS$.

Ex 4: Enoncer des décompositions de matrices dans le cas complexe correspondant à celles données dans les trois exercices précédents et les démontrer.