# Intégrale de Riemann

15 janvier 2016

# Table des matières

# 1

# Intégrales et primitives

Pour ce chapitre, $a < b$ sont des réels.

Si $f, g$ sont deux fonctions définies sur $[a, b]$ et à valeurs réelles, la notation $f \leq g$ signifie que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

## 1.1 Subdivisions. Intégrale des fonctions en escaliers

Pour ce paragraphe, $a < b$ sont des réels et $f$ est une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

**Définition 1.1** *Étant donné un entier naturel non nul $n$, on appelle subdivision d'ordre $n$ de l'intervalle $[a, b]$ toute suite $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $n + 1$ réels telle que :*

$$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$$

*Le réel :*

$$\delta(\sigma) = \max_{0 \leq k \leq n-1} (a_{k+1} - a_k)$$

*(à savoir la longueur du plus grand intervalle de la subdivision $\sigma$) est le pas de la subdivision $\sigma$.*

On notera $\Sigma_{a,b}$ l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a, b]$.

Si $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une subdivision de $[a, b]$, on alors la partition :

$$[a, b] = \{a\} \cup \bigcup_{k=0}^{n-1} ]a_k, a_{k+1}] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [a_k, a_{k+1}[ \cup \{b\}$$

**Exemple 1.1** *Pour $n \geq 1$, la subdivision $\sigma_n$ à pas constant est définie par les points :*

$$a_k = a + k\frac{b - a}{n} \quad (0 \leq k \leq n)$$

*Le pas de cette subdivision est $\delta(\sigma_n) = \dfrac{b - a}{n}$.*

**Définition 1.2** *Soient $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $\sigma' = (a'_k)_{0 \leq k \leq n'}$ deux subdivision de $[a, b]$.*
*On dit que $\sigma'$ est plus fine que $\sigma$ (ou que $\sigma$ est moins fine que $\sigma'$) et on note $\sigma \subset \sigma'$ si :*

$$\{a_0, a_1, \cdots, a_n\} \subset \{a'_0, a'_1, \cdots, a'_{n'}\}$$

*(on a donc $n \leq n'$).*

**Exemple 1.2** *La subdivision* $(a,b)$ *est moins fine que toute subdivision* $\sigma \in \Sigma_{a,b}$.

Cette relation d'inclusion est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des subdivisions $\Sigma_{a,b}$ de l'intervalle $[a,b]$.

**Exercice 1.1** *Soit* $\sigma' = (a'_k)_{0\leq k\leq n'} \in \Sigma_{a,b}$ *plus fine que* $\sigma = (a_k)_{0\leq k\leq n} \in \Sigma_{a,b}$.

1. *Montrer que pour tout* $j$ *compris entre* $0$ *et* $n'-1$, *il existe un unique entier* $k$ *compris entre* $0$ *et* $n-1$ *tel que* $\left[a'_j, a'_{j+1}\right] \subset [a_k, a_{k+1}]$.
2. *En déduire que* $\delta(\sigma') \leq \delta(\sigma)$.

**Solution 1.1**

1. *Pour tout* $j$ *compris entre* $0$ *et* $n'-1$, *il existe un unique entier* $k$ *compris entre* $0$ *et* $n-1$ *tel que* $a'_j \in [a_k, a_{k+1}[$ *et nécessairement* $a'_{j+1} \in ]a_k, a_{k+1}]$. *En effet, dans le cas contraire, on a* $a_k \leq a'_j < a_{k+1} < a'_{j+1}$ *et* $a_{k+1} \notin \{a'_0, a'_1, \cdots, a'_{n'}\}$, *ce qui contredit le fait que* $\sigma \subset \sigma'$. *On a donc* $\left[a'_j, a'_{j+1}\right] \subset [a_k, a_{k+1}]$ *et* $a'_{j+1} - a'_j \leq a_{k+1} - a_k \leq \delta(\sigma)$.
2. *Il en résulte que* $\delta(\sigma') = \max\limits_{0\leq j\leq n'-1} \left(a'_{j+1} - a'_j\right) \leq \delta(\sigma)$.

Si $\sigma = (a_k)_{0\leq k\leq n}$ et $\sigma' = (a'_k)_{0\leq k\leq n'}$ sont deux subdivisions de $[a,b]$, on peut alors les combiner pour former une nouvelle subdivision $\sigma'' = (a''_k)_{0\leq k\leq n''}$ où :

$$\{a''_0, \cdots, a''_{n''}\} = \{a_0, \cdots, a_n\} \cup \{a'_0, \cdots, a'_{n'}\}$$

et $\max(n,n') \leq n'' \leq n+n'$ (on élimine de $\sigma'$ les points qui sont déjà dans $\sigma$). On note $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$.

Cette partition $\sigma \cup \sigma'$ est plus fine que $\sigma$ et $\sigma'$.

Si $a < c < b$, pour toutes subdivisions $\sigma_{[a,c]} = (a_k)_{0\leq k\leq n}$ de $[a,c]$ et $\sigma_{[c,b]} = (a'_k)_{0\leq k\leq n'}$ de $[c,b]$, la réunion :

$$\sigma = (a_0, \cdots, a_{n-1}, c, a'_1, \cdots, a'_{n'})$$

est une subdivision de $[a,b]$. On la note $\sigma_{[a,c]} \vee \sigma_{[c,b]}$.

**Définition 1.3** *On appelle fonction en escaliers (ou fonction constante par morceaux) sur* $[a,b]$ *une fonction* $f$ *pour laquelle il existe une subdivision* $\sigma = (a_k)_{0\leq k\leq n} \in \Sigma_{a,b}$ *telle que* $f$ *soit constante sur chacun des intervalle* $]a_k, a_{k+1}[$ $(0 \leq k \leq n-1)$. *Dans ces conditions, on dit que* $\sigma$ *est une subdivision adaptée à* $f$.

On note $\mathcal{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a,b]$.

**Remarque 1.1** *On définit de manière analogue les fonctions en escaliers à valeurs dans un espace vectoriel normé* $E$.

**Remarque 1.2** *Une fonction en escaliers (à valeurs réelles ou dans espace vectoriel normé) est bornée puisqu'elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs (les* $\lambda_k$ *et les* $f(a_j)$*).*

**Remarque 1.3** *Il n'y a pas unicité des subdivisions adaptées à une fonction en escaliers. En effet si* $\sigma = (a_k)_{0\leq k\leq n} \in \Sigma_{a,b}$ *est adaptée à* $f \in \mathcal{E}([a,b])$, *alors toute subdivision plus fine* $\sigma' = (a'_k)_{0\leq k\leq n'} \in \Sigma_{a,b}$ *est aussi adaptée à* $f$ *puisque chaque intervalle* $\left[a'_j, a'_{j+1}\right]$ *est contenu dans un intervalle* $[a_k, a_{k+1}]$ *et* $f$ *qui est constante sur* $]a_k, a_{k+1}[$ *l'est aussi sur* $\left]a'_j, a'_{j+1}\right[$.
*La moins fine de toutes ces subdivisions est celle définie par* $a, b$ *et tous les points de discontinuité de* $f$.

**Exemple 1.3** *La fonction partie entière* $x \mapsto [x]$ *est en escaliers sur tout segment* $[a, b]$ .

**Exercice 1.2** *Montrer que* $\mathcal{E}([a, b])$ *est une* $\mathbb{R}$*-algèbre commutative et que, pour toutes fonctions* $f, g$ *dans* $\mathcal{E}([a, b])$ , *les fonctions* $|f|$ , $\inf(f, g)$ *et* $\sup(f, g)$ *sont dans* $\mathcal{E}([a, b])$ .

**Solution 1.2** *Les fonctions constantes sont en escaliers, donc* $f \in \mathcal{E}([a, b])$ *est non vide.*
*Si* $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ *est une subdivision adaptée à* $f \in \mathcal{E}([a, b])$ , *les fonctions* $\lambda f$ *(pour tout réel* $\lambda$*) et* $|f|$ *sont alors constantes sur chacun des intervalle* $]a_k, a_{k+1}[$ $(0 \leq k \leq n-1)$*, donc* $\lambda f$ *et* $|f|$ *sont en escaliers et* $\sigma$ *est aussi adaptée à ces fonctions.*
*Si* $\sigma' = (a'_k)_{0 \leq k \leq n'}$ *est une subdivision adaptée à* $g \in \mathcal{E}([a, b])$ , *la subdivision plus fine* $\sigma \cup \sigma'$ *est adaptée à* $f$ *et* $g$*, donc à* $f + g$ *et* $fg$ *et ces fonctions sont en escaliers, ce qui prouve que* $f + g$ *et* $fg$ *sont dans* $f \in \mathcal{E}([a, b])$ .
*Donc* $\mathcal{E}([a, b])$ *est une* $\mathbb{R}$*-algèbre et il est clair qu'elle est commutative.*
*Il en résulte que pour* $f, g$ *dans* $f \in \mathcal{E}([a, b])$ , *on a :*

$$\inf(f, g) = \frac{f + g}{2} - \frac{|g - f|}{2} \in f \in \mathcal{E}([a, b]) \text{ } \textit{et} \text{ } \sup(f, g) = \frac{f + g}{2} + \frac{|g - f|}{2} \in f \in \mathcal{E}([a, b])$$

Si $f \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \Sigma_{a,b}$ est une subdivision adaptée à $f$ avec :

$$\forall k \in \{0, \cdots, n-1\}, \ \forall x \in ]a_k, a_{k+1}[, \ f(x) = \lambda_k$$

on note alors :

$$I(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \lambda_k$$

Nous allons vérifier que cette quantité $I(f, \sigma)$ ne dépend que de $f$.

**Lemme 1.1** *Si* $f \in \mathcal{E}([a, b])$ *et* $\sigma, \sigma'$ *sont deux subdivisions adaptées à* $f$ *telles que* $\sigma \subset \sigma'$*, on a alors :*

$$I(f, \sigma) = I(f, \sigma')$$

**Démonstration.** On a $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n} \subset \sigma' = (a'_k)_{0 \leq k \leq n'}$ avec $p = n' - n \geq 0$.
On fixe $\sigma$ et on raisonne par récurrence sur $p$.
Pour $p = 0$, on a $\sigma = \sigma'$ et le résultat attendu est évident.
Pour $p = 1$, la subdivision $\sigma'$ est déduite de $\sigma$ en lui ajoutant un point $\alpha \notin \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ .
Si $j$ est l'unique entier compris entre 0 et $n - 1$ tel que $\alpha \in ]a_j, a_{j+1}[$ , on a alors :

$$\sigma' = (a_0, \cdots, a_j, \alpha, \alpha_{j+1}, \cdots, a_n)$$

la fonction $f$ est constante égale à $\lambda_j$ sur $]a_j, \alpha[ \cup ]\alpha, a_{j+1}[$ et :

$$\begin{aligned} I(f, \sigma') &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \lambda_k + \lambda_j (a_{j+1} - \alpha) + \lambda_j (\alpha - a_{j+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \lambda_k = I(f, \sigma) \end{aligned}$$

■

**Théorème 1.1** *Si* $f \in \mathcal{E}([a, b])$ *et* $\sigma, \sigma'$ *sont deux subdivisions adaptées à* $f$*, on a alors :*

$$I(f, \sigma) = I(f, \sigma')$$

**Démonstration.** La subdivision $\sigma \cup \sigma'$ étant plus fine que $\sigma$ et $\sigma'$ et adaptée à $f$, on a :

$$I(f,\sigma) = I(f,\sigma \cup \sigma') = I(f,\sigma')$$

■

Le théorème précédent nous dit que le réel $I(f,\sigma)$ ne dépend que de $f \in \mathcal{E}([a,b])$ et pas d'une subdivision adaptée à cette fonction, ce qui nous permet de donner la définition suivante.

**Définition 1.4** *Soit $f$ une fonction en escaliers sur $[a,b]$. L'intégrale de Riemann de $f$ sur $[a,b]$ est le réel :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\,\lambda_k$$

*où $\sigma = (a_k)_{0\leq k\leq n} \in \Sigma_{a,b}$ est une subdivision adaptée à $f$ telle que pour tout $k$ compris entre $0$ et $n-1$ et tout $x \in ]a_k, a_{k+1}[$, on ait $f(x) = \lambda_k$.*

On prolonge cette définition dans le cas où $b = a$, en posant :

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

**Exemple 1.4** *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ constante égale à $\lambda$ sur $]a,b[$ est Riemann-intégrable et on a :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lambda(b-a)$$

Avec le théorème qui suit, on donne les propriétés essentielles de l'intégrale de Riemann des fonctions en escaliers sur $[a,b]$.

**Théorème 1.2** *Soient $f, g$ dans $\mathcal{E}([a,b])$ et $\lambda$ un réel.*

1. *Si $f$ est nulle sur $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points, on a alors $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.*
2. $$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
   *(linéarité de l'intégrale).*
3. *Si $f = g$ sur $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points, on a alors $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ (on ne change pas la valeur de l'intégrale si on modifie une fonction en escaliers en un nombre fini de points).*
4. *Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x$ dans $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points, on a $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.*
5. *Pour tout segment $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ avec $\alpha < \beta$, la restriction de $f$ à $[\alpha,\beta]$ est dans $\mathcal{E}([\alpha,\beta])$ et, dans le cas où $f$ est à valeurs positives ou nulles, on a $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$.*
6. *Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x$ dans $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points, on a alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.*

7. *La fonction* $|f|$ *est en escaliers et :*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

8. *Pour tout* $c \in ]a,b[$ *, on a :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

*(relation de Chasles).*

**Démonstration.**

1. Si $f$ est nulle sur $[a,b] \setminus \{a_1, \cdots, a_{n-1}\}$ où $a \leq a_1 < \cdots < a_{n-1} \leq b$, en notant $a_0 = a$ et $a_n = b$ (dans le cas où $a_1 = a$ [resp. $a_{n-1} = b$], on décale judicieusement les indices), la subdivision $\sigma = (a_k)_{0\leq k\leq n}$ est alors adaptée à $f$ et on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = I(f,\sigma) = 0.$
2. Toute subdivision $\sigma = (a_k)_{0\leq k\leq n}$ adaptée à $f$ est aussi adaptée à $\lambda f$ et :

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = I(\lambda f,\sigma) = \lambda I(f,\sigma) = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

Pour toute subdivision $\sigma' = (a'_k)_{0\leq k\leq n'}$ adaptée à $g$, la subdivision plus fine $\sigma \cup \sigma'$ est adaptée à $f$ et $g$, donc à $f+g$ et on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx &= I(f+g,\sigma\cup\sigma') = I(f,\sigma\cup\sigma') + I(g,\sigma\cup\sigma') \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

3. Si $f = g$ sur $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points,on a alors $f - g = 0$ sur $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points, donc $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = 0$ et par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$
4. En modifiant au besoin $f$ en un nombre fini de points, on se ramène à $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$ et dans ce cas, il est clair que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$
5. Soit $\sigma = (a_k)_{0\leq k\leq n} \in \Sigma_{a,b}$ une subdivision adaptée à $f$. Il existe deux entiers $i \leq j$ compris entre 0 et $n-1$ tels que $\alpha \in [a_i, a_{i+1}]$ et $\beta \in [a_j, a_{j+1}]$ et la subdivision $\sigma' = (\alpha, a_{i+1}, \cdots, a_j, \beta)$ est alors adaptée à $f_{|[\alpha,\beta]}$ qui est donc dans $\mathcal{E}([\alpha,\beta])$.
Pour $f$ à valeurs positives, on a :

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx &= (a_{i+1} - \alpha)\lambda_i + \sum_{k=i+1}^{j-1} (a_{k+1} - a_k)\lambda_k + (\beta - a_j)\lambda_j \\ &\leq \sum_{k=i}^{j} (a_{k+1} - a_k)\lambda_k \leq I(f,\sigma) = \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

(pour $\alpha = a_{i+1}$, ou $\beta = a_j$, ou $j = i$, ou $j = i+1$, le terme correspondant est nul).

6. Résulte de $g - f \geq 0$ sur $[a, b]$ privé d'un nombre fini de points.
7. Soit $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \Sigma_{a,b}$ une subdivision adaptée à $f$ telle pour tout $k$ compris entre $0$ et $n-1$ et tout $x \in ]a_k, a_{k+1}[$, on ait $f(x) = \lambda_k$. Comme $|f(x)| = |\lambda_k|$ pour tout $x \in ]a_k, a_{k+1}[$ et tout $k$ compris entre $0$ et $n-1$, on a $|f| \in \mathcal{E}([a, b])$ et :
$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \lambda_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) |\lambda_k| = \int_a^b |f(x)|\, dx$$
8. La restriction de $f \in \mathcal{E}([a, b])$ à tout segment $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ est dans $\mathcal{E}([\alpha, \beta])$ et les fonctions $f_1, f_2$ définies sur $[a, b]$ par :
$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in [a, c] \\ 0 \text{ si } x \in ]c, b] \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [a, c] \\ f(x) \text{ si } x \in ]c, b] \end{cases}$$
sont dans $\mathcal{E}([a, b])$ avec $f_1 + f_2 = f$, donc :
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

■

**Exercice 1.3** *Soit $f \in \mathcal{E}([a, b])$. Montrer que la fonction $F$ définie sur $[a, b]$ par :*
$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$
*est affine par morceaux et continue.*

**Solution 1.3** *On a vu que pour tout $x \in [a, b]$, la restriction de $f$ à $[a, x]$ est en escaliers, donc la fonction $F$ est bien définie sur $[a, b]$.*
*Soit $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \Sigma_{a,b}$ adaptée à $f$.*
*Pour tout $x \in [a_0, a_1]$, on a :*
$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt = \lambda_0 (x - a)$$
*et pour tout $k$ compris entre $1$ et $n-1$, tout $x \in [a_k, a_{k+1}]$, on a :*
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^{a_k} f(t)\, dt + \int_{a_k}^x f(t)\, dt \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (a_{j+1} - a_j) \lambda_j + (x - a_k) \lambda_k \end{aligned}$$
*Cette fonction $F$ est donc affine sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$.*
*Sur chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$, elle est continue et avec :*
$$0 = F(a) = \lim_{x \to a^+} F(x)$$
$$\sum_{j=0}^{k-1} (a_{j+1} - a_j) \lambda_j = F(a_k) = \lim_{x \to a_k^+} F(x) = \lim_{x \to a_k^-} F(x)$$
*on déduit qu'elle est aussi continue en chaque point $a_k$.*

**Exercice 1.4** *Pour tout entier naturel non nul $n$, on désigne par $a_n$ la fonction qui à tout réel $x$ appartenant à $[0,1]$ associe la $n$-ème décimale dans le développement décimal propre de $x$ si $x \in [0,1[$ (voir le chapitre 3 du volume 1) et 9 si $x = 1$ (pour $x = 1$ on utilise le développement décimal illimité impropre). Vérifier que $a_n$ est une fonction en escaliers et calculer $\int_0^1 a_n(x)\,dx$.*

**Solution 1.4** *On rappelle que pour $x \in [0,1[$, on a $a_n(x) = [10^n x] - 10\,[10^{n-1}x]$. Pour tout entier $k$ compris entre 0 et $10^n - 1$ et $x \in \left[\frac{k}{10^n}, \frac{k+1}{10^n}\right[$, on a $a_n(x) = k - 10\,[10^{n-1}x]$. De plus avec :*

$$10\left[10^{n-1}x\right] \leq 10^n x < k+1$$

*on déduit que*

$$\left[10^{n-1}x\right] \leq \frac{k}{10} \leq 10^{n-1}x < \left[10^{n-1}x\right] + 1$$

*et $\left[\frac{k}{10}\right] = [10^{n-1}x]$. La fonction $a_n$ est donc constante sur $\left[\frac{k}{10^n}, \frac{k+1}{10^n}\right[$ égale à $k - 10\left[\frac{k}{10}\right]$. La fonction $a_n$ est donc en escaliers et son intégrale sur $[0,1]$ est donnée par :*

$$\int_0^1 a_n(x)\,dx = \frac{1}{10^n}\sum_{k=0}^{10^n-1}\left(k - 10\left[\frac{k}{10}\right]\right)$$

*En remarquant que la fonction $\varphi : k \mapsto k - 10\left[\frac{k}{10}\right]$ est périodique de période 10 et en écrivant tout entier $k$ compris entre 0 et $10^n - 1$ sous la forme $k = 10q + r$ avec $0 \leq q \leq 10^{n-1} - 1$ et $0 \leq r \leq 9$, on a :*

$$\int_0^1 a_n(x)\,dx = \frac{1}{10^n}\sum_{q=0}^{10^{n-1}-1}\sum_{r=0}^{9}\varphi(r) = \frac{1}{10}\sum_{r=0}^{9} r = \frac{45}{10}$$

## 1.2 Fonctions Riemann-intégrables

**Définition 1.5** *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escaliers $\varphi, \psi$ sur $[a,b]$ telles que :*

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } 0 \leq \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,dx \leq \varepsilon$$

On note $\mathcal{R}([a,b])$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles Riemann-intégrables sur $[a,b]$.

De l'encadrement $\varphi \leq f \leq \psi$ avec $\varphi, \psi$ en escaliers, on déduit qu'une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$ est nécessairement bornée.

Il est clair que $\mathcal{E}([a,b]) \subset \mathcal{R}([a,b])$ (pour $f \in \mathcal{E}([a,b])$, prendre $\varphi = f = \psi$).

**Exercice 1.5** *Montrer que si $f \in \mathcal{R}([a,b])$, alors sa restriction à tout segment $[\alpha,\beta]$ contenu dans $[a,b]$ (avec $\alpha < \beta$) est intégrable sur $[\alpha,\beta]$.*

**Solution 1.5** *Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver deux fonctions en escaliers $\varphi, \psi$ sur $[a,b]$ telles que :*

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } 0 \leq \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,dx \leq \varepsilon$$

*En notant encore $\varphi, \psi$ les restrictions de ces fonctions à $[\alpha, \beta]$, on a des fonctions en escaliers sur $[\alpha, \beta]$ telles que $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ pour tout $x \in [\alpha, \beta]$ et :*

$$0 \leq \int_{\alpha}^{\beta} (\psi(x) - \varphi(x))\, dx \leq \int_{a}^{b} (\psi(x) - \varphi(x))\, dx \leq \varepsilon$$

*puisque $\psi - \varphi$ est en escaliers positive. Donc $f_{|[\alpha,\beta]} \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$.*

**Exercice 1.6** *Montrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon n'est pas Riemann-intégrable sur $[a, b]$.*

**Solution 1.6** *Pour toute subdivision $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[a, b]$ adaptée à une fonction en escaliers $\psi$ telle que $f \leq \psi$, il existe dans chacun des intervalles $]a_k, a_{k+1}[$ au moins un nombre rationnel $r_k$ (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$), donc $\psi(x) = \psi(r_k) \geq f(r_k) = 1$ pour tout $x \in ]a_k, a_{k+1}[$ et :*

$$\int_a^b \psi(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, \psi(r_k) \geq \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = b - a$$

*Pour toute subdivision $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[a, b]$ adaptée à une fonction en escaliers $\varphi$ telle que $\varphi \leq f$, il existe dans chacun des intervalles $]a_k, a_{k+1}[$ au moins un nombre irrationnel $\rho_k$ (densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$), donc $\varphi(x) = \varphi(\rho_k) \leq f(\rho_k) = 0$ pour tout $x \in ]a_k, a_{k+1}[$ et :*

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, \varphi(\rho_k) \leq 0$$

*On a donc $\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\, dx \geq b - a$ pour toutes fonctions $\varphi, \psi$ dans $\mathcal{E}([a, b])$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et l'inégalité $\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\, dx \leq \varepsilon$ ne peut être réalisée pour $\varepsilon \in ]0, b - a[$.*
*En définitive, la fonction $f$ n'est pas Riemann-intégrable sur $[a, b]$.*

Pour toute fonction $f \in \mathcal{R}([a, b])$, les ensembles :

$$E_-(f) = \left\{ \int_a^b \varphi(x)\, dx \mid \varphi \in \mathcal{E}([a, b]) \text{ et } \varphi \leq f \right\}$$

$$E_+(f) = \left\{ \int_a^b \psi(x)\, dx \mid \psi \in \mathcal{E}([a, b]) \text{ et } f \leq \psi \right\}$$

sont non vides dans $\mathbb{R}$.

Pour tout élément $\alpha = \int_a^b \varphi(x)\, dx$ de $E_-(f)$ et tout élément $\beta = \int_a^b \psi(x)\, dx$ de $E_+(f)$, on a $\varphi \leq f \leq \psi$, donc :

$$\alpha = \int_a^b \varphi(x)\, dx \leq \beta = \int_a^b \psi(x)\, dx$$

c'est-à-dire que $E_-(f)$ est majoré par tout élément de $E_+(f)$ et $E_+(f)$ est minoré par tout élément de $E_-(f)$.

On peut donc poser :

$$I_-(f) = \sup E_-(f) = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)\, dx \mid \varphi \in \mathcal{E}([a, b]) \text{ et } \varphi \leq f \right\}$$

et :

$$I_+(f) = \inf E_+(f) = \inf \left\{ \int_a^b \psi(x)\,dx \mid \psi \in \mathcal{E}([a,b]) \text{ et } f \leq \psi \right\}$$

Par définition des bornes inférieure et supérieure, on a $I_-(f) \leq I_+(f)$. En effet pour tout $\beta \in E_+(f)$, on a $I_-(f) \leq \beta$ puisque $\beta$ majore $E_-(f)$ et $I_-(f) = \sup E_-(f)$ est le plus petit des majorants, donc $I_-(f) \leq I_+(f)$ puisque $I_+(f) = \inf E_+(f)$ est le plus grand des minorants.

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver deux fonctions $\varphi$ et $\psi$ dans $\mathcal{E}([a,b])$ telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } 0 \leq \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,dx \leq \varepsilon$$

Comme $\alpha = \int_a^b \varphi(x)\,dx \in E_-(f)$ et $\beta = \int_a^b \psi(x)\,dx \in E_+(f)$, on a :

$$0 \leq I_+(f) - I_-(f) \leq \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,dx \leq \varepsilon$$

et il en résulte que $I_+(f) - I_-(f) = 0$, soit $I_+(f) = I_-(f)$.

On peut donc donner la définition suivante.

**Définition 1.6** *L'intégrale de Riemann d'une fonction $f \in \mathcal{R}([a,b])$ est le réel :*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx \mid \varphi \in \mathcal{E}([a,b]) \text{ et } \varphi \leq f \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_a^b \psi(x)\,dx \mid \psi \in \mathcal{E}([a,b]) \text{ et } f \leq \psi \right\}\end{aligned}$$

**Exemple 1.5** *On a vu que toute fonction $f$ en escaliers sur $[a,b]$ est Riemann intégrable et pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$ telle que $\varphi \leq f$, on a $\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$ avec $f \in E_-(f)$, donc $I_-(f) = \sup E_-(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.*
*On vérifie de manière analogue que $I_+(f) = \int_a^b f(x)\,dx$. Tout cela est don cohérent.*

**Théorème 1.3** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$f \in \mathcal{R}([a,b])$ ;*
2. *il existe deux suites $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers sur $[a,b]$ telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n \leq f \leq \psi_n \tag{1.1}$$

*et :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\,dx = 0 \tag{1.2}$$

*Dans ce cas, on a :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx$$

**Démonstration.** Soit $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Prenant, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, on peut trouver $\varphi_n, \psi_n$ dans $\mathcal{E}([a,b])$ telles que $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ et :

$$0 \leq \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\, dx \leq \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

La réciproque est évidente.

Par définition de la borne inférieure et de la borne supérieure, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver deux fonction en escaliers $\varphi_n, \psi_n$ telles que $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ et :

$$I_-(f) - \frac{1}{n+1} < \int_a^b \varphi_n(x)\, dx \leq I_-(f) = I_+(f) \leq \int_a^b \psi_n(x)\, dx < I_+(f) + \frac{1}{n+1}$$

avec $I_+(f) = I_-(f) = \int_a^b f(x)\, dx$.

Il en résulte que :

$$0 \leq \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b \varphi_n(x)\, dx < \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

$$0 \leq \int_a^b \psi_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx < \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

■

Le résultat qui suit est plus commode que le précédent pour démontrer les principales propriétés de l'intégrale de Riemann et il nous permettra d'étendre notre définition au cas des fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

**Théorème 1.4** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $f \in \mathcal{R}([a,b])$ *;*
2. *il existe deux suites $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers sur $[a,b]$ telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f - \varphi_n| \leq \theta_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \theta_n(x)\, dx = 0$$

*Dans ce cas, on a :*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\, dx$$

**Démonstration.** Soit $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Il existe deux suites $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers sur $[a,b]$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n \leq f \leq \psi_n$$

et :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\, dx = 0$$

En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n = \psi_n - \varphi_n$, on a $|f - \varphi_n| \leq \theta_n$ avec $\theta_n \in \mathcal{E}([a,b])$ et $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \theta_n(x)\, dx = 0$.

Réciproquement, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de fonctions en escaliers sur $[a,b]$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f - \varphi_n| \leq \theta_n$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \theta_n(x)\, dx = 0$$

en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \varphi_n - \theta_n$, $\beta_n = \varphi_n + \theta_n$, on a $\alpha_n \leq f \leq \beta_n$ avec $\alpha_n$ et $\beta_n$ en escaliers telles que $\alpha_n \leq f \leq \beta_n$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\beta_n(x) - \alpha_n(x))\, dx = 2 \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \theta_n(x)\, dx = 0$$

donc $f \in \mathcal{R}([a,b])$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \alpha_n(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\, dx.$ ■

Avec le théorème qui suit, on vérifie que l'intégrale de Riemann sur $\mathcal{R}([a,b])$ vérifie les mêmes propriétés sur $\mathcal{E}([a,b])$.

**Théorème 1.5** *Soient $f, g$ dans $\mathcal{R}([a,b])$ et $\lambda$ un réel.*

1. *Si $f$ est nulle sur $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points, on a alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0$.*
2. *$\lambda f + g$ est Riemann-intégrable et :*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

   *(linéarité de l'intégrale).*

3. *Si $h = f$ sur $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points, on a alors $h \in \mathcal{R}([a,b])$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b h(x)\, dx$ (on ne change pas la valeur de l'intégrale si on modifie une fonction intégrable en un nombre fini de points).*
4. *Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x$ dans $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$.*
5. *Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x$ dans $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points, on a alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$.*
6. *La fonction $|f|$ est dans $\mathcal{R}([a,b])$ et :*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

7. *Soit $c \in \,]a,b[$.*
   *La fonction $f$ est Riemann-intégrable sur $[a,c]$ et $[c,b]$ et on a :*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

   *(relation de Chasles).*

**Démonstration.**

1. Une telle fonction est en escaliers et dans ce cas le résultat a été prouvé.
2. Soient $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions en escaliers sur $[a,b]$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f-\varphi_n| \leq \theta_n,\ |g-\Psi_n| \leq \chi_n$$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \theta_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \chi_n(x)\,dx = 0$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx,\ \int_a^b g(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \Psi_n(x)\,dx$$
Les suites $(\lambda\varphi_n+\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|\lambda|\,\theta_n+\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de fonctions en escaliers telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\lambda f+g-(\lambda\varphi_n+\Psi_n)| \leq |\lambda|\,|f-\varphi_n|+|g-\Psi_n| \leq |\lambda|\,\theta_n+\chi_n$$
et :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b (|\lambda|\,\theta_n(x)+\chi_n(x))\,dx = 0$$
donc $\lambda f+g \in \mathcal{R}([a,b])$ et avec :
$$\left|\int_a^b (\lambda f(x)+g(x))\,dx - \int_a^b (\lambda\varphi_n(x)+\Psi_n(x))\,dx\right| \leq \int_a^b (|\lambda|\,\theta_n(x)+\chi_n(x))\,dx$$
on déduit que :
$$\int_a^b (\lambda f(x)+g(x))\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b (\lambda\varphi_n(x)+\Psi_n(x))\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$
3. Si $h=f$ sur $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points, on a alors $h-f=0$ sur $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points, elle est donc en escaliers d'intégrale nulle et $h=(h-f)+f$ est intégrable avec :
$$\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b (h(x)-f(x))\,dx+\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$
4. En modifiant au besoin $f$ en un nombre fini de points, on se ramène à $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Dans ce cas, on a $0 \in E_-(f)$ et $\int_a^b f(x)\,dx = I_-(f) \geq 0$.
5. Résulte de $g-f \geq 0$ sur $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points.
6. Soient $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions en escaliers sur $[a,b]$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f-\varphi_n| \leq \theta_n$$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \theta_n(x)\,dx = 0 \text{ et } \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$$
Les fonctions $|\varphi_n|$ sont en escaliers telles que :
$$||f|-|\varphi_n|| \leq |f-\varphi_n| \leq \theta_n$$

donc $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ et avec :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b |f(x)|\,dx - \int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx\right| &= \left|\int_a^b (|f(x)| - |\varphi_n(x)|)\,dx\right| \\ &\leq \int_a^b ||f(x)| - |\varphi_n(x)||\,dx \leq \int_a^b \theta_n(x)\,dx\end{aligned}$$

on déduit que :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\int_a^b \varphi_n(x)\,dx\right| \leq \lim_{n\to+\infty}\int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

7. Vérifions que les fonctions $f_1, f_2$ définies sur $[a,b]$ par :

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in [a,c] \\ 0 \text{ si } x \in ]c,b] \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [a,c] \\ f(x) \text{ si } x \in ]c,b] \end{cases}$$

sont dans $\mathcal{R}([a,b])$ et que :

$$\int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx, \quad \int_a^b f_2(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$$

En effet, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de fonctions en escaliers sur $[a,b]$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f - \varphi_n| \leq \theta_n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \theta_n(x)\,dx = 0 \text{ et } \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$$

les suites $\left(\varphi_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\theta_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\varphi_n^{(1)}(x) = \begin{cases} \varphi_n(x) \text{ si } x \in [a,c] \\ 0 \text{ si } x \in ]c,b] \end{cases} \quad \theta_n^{(1)}(x) = \begin{cases} \theta_n(x) \text{ si } x \in [a,c] \\ 0 \text{ si } x \in ]c,b] \end{cases}$$

sont dans $\mathcal{E}([a,b])$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|f^1 - \varphi_n^{(1)}\right| \leq \theta_n^{(1)}$$

$$0 \leq \int_a^b \theta_n^{(1)}(x)\,dx = \int_a^c \theta_n(x)\,dx \leq \int_a^b \theta_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$$

donc $f_1 \in \mathcal{R}([a,b])$.
Puis avec :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx\right| &\leq \left|\int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b \varphi_n^{(1)}(x)\,dx\right| + \left|\int_a^b \varphi_n^{(1)}(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx\right| \\ &\leq \int_a^b \left|f_1(x)\,dx - \varphi_n^{(1)}(x)\right|dx + \int_a^c |\varphi_n(x)\,dx - f(x)|\,dx \\ &\leq 2\int_a^c \theta_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0\end{aligned}$$

on déduit que :

$$\int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

On vérifie de manière analogue que $f_2 \in \mathcal{R}([a,b])$ et $\int_a^b f_2(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx.$

Enfin avec $f_1 + f_2 = f$, on déduit que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

■

De la propriété **5.** du théorème précédent, en notant $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, pour $f \in \mathcal{R}([a,b])$, on déduit que :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \tag{1.3}$$

Pour ce qui est de la propriété de Chasles, on a une réciproque qui nous sera utile.

**Théorème 1.6 (Chasles)** *Soient $c \in ]a,b[$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*
*La fonction $f$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si, et seulement si, elle est Riemann-intégrable sur $[a,c]$ et $[c,b]$.*

**Démonstration.** On a déjà vu que la condition est nécessaire.

Réciproquement si $f$ est Riemann-intégrable sur $[a,c]$ et $[c,b]$, il existe des suites $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers sur $[a,c]$ et des suites $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers sur $[c,b]$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|f_{|[a,c]} - \varphi_n\right| \leq \theta_n,\ \left|f_{|[c,b]} - \Psi_n\right| \leq \chi_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^c \theta_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_c^b \chi_n(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^c \varphi_n(x)\,dx,\ \int_c^b g(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_c^b \Psi_n(x)\,dx$$

Les suites de fonctions $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\alpha_n(x) = \begin{cases} \varphi_n(x) \text{ si } x \in [a,c] \\ \Psi_n \text{ si } x \in ]c,b] \end{cases} \quad \gamma_n(x) = \begin{cases} \theta_n(x) \text{ si } x \in [a,c] \\ \chi_n \text{ si } x \in ]c,b] \end{cases}$$

sont en escaliers sur $[a,b]$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f - \alpha_n| \leq \gamma_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \gamma_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^c \theta_n(x)\,dx + \lim_{n\to+\infty} \int_c^b \chi_n(x)\,dx = 0$$

donc $f \in \mathcal{R}([a,b])$ ■

Si $f$ est intégrable sur $[a,b]$, on convient de poser :

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Avec cette convention, la relation de Chasles est valable quel que soit l'ordre des réels $a,b,c$, dans la mesure où les intégrales considérées ont un sens.

**Corollaire 1.1** *Soit* $\sigma = (c_i)_{0 \leq i \leq n} \in \Sigma_{a,b}$.
*La fonction $f$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si, et seulement si, elle est Riemann-intégrable sur chaque intervalle $[c_i, c_{i+1}]$, pour $i$ compris entre $0$ et $n-1$. Dans ce cas, on a :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)\,dx$$

**Démonstration.** On procède par récurrence sur $n \geq 1$. ∎

**Remarque 1.4** *Pour toute fonction $f$ intégrable sur $[a,b]$, on a :*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq (b-a)\,\|f\|_\infty$$

*ou on a noté :*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

**Remarque 1.5** *Avec* $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$ *pour $\alpha, \beta$ quelconques dans $[a,b]$, on déduit que :*

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \right| \leq \left| \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx \right| \leq |\beta - \alpha|\,\|f\|_\infty$$

*En effet, pour $\alpha \leq \beta$, c'est clair et pour $\beta < \alpha$, on a :*

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \right| = \left| \int_\beta^\alpha f(x)\,dx \right| \leq \int_\beta^\alpha |f(x)|\,dx = -\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx = \left| \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx \right|$$

**Exercice 1.7** *Montrer que si $f, g$ sont deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$, les fonctions* $\inf(f,g)$ *et* $\sup(f,g)$ *sont alors intégrable.*

**Démonstration.** Cela résulte de :

$$\inf(f,g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|g-f|}{2} \text{ et } \sup(f,g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|g-f|}{2}$$

∎

**Théorème 1.7** *Si $f, g$ sont deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$, la fonction $f \cdot g$ est alors intégrable.*

**Démonstration.** Considérons tout d'abord le cas de deux fonctions intégrables à valeurs positives.

Pour $f \in \mathcal{R}([a,b])$ à valeurs positives et $\varepsilon > 0$, on peut trouver des fonctions en escaliers sur $[a,b]$ telles que :

$$\varphi' \leq f \leq \psi',\ 0 \leq \int_a^b (\psi'(x) - \varphi'(x))\,dx \leq \varepsilon$$

En remplaçant $\varphi'$ par $\varphi = \max(0, \varphi')$ et $\psi'$ par $\psi = \min(M_f, \psi')$ où $M_f = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, on définit des fonctions en escaliers telles que :

$$0 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq M_f$$

et :

$$0 \leq \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\, dx \leq \int_a^b (\psi'(x) - \varphi'(x))\, dx \leq \varepsilon$$

De même, pour $g \in \mathcal{R}([a,b])$ à valeurs positives, on peut trouver des fonctions en escaliers sur $[a,b]$ telles que :

$$0 \leq \alpha \leq g \leq \beta \leq M_g$$

$$0 \leq \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x))\, dx \leq \varepsilon$$

où $M_g = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

On a alors :

$$\varphi\alpha \leq fg \leq \psi\beta$$

où $\varphi\alpha$ et $\psi\beta$ sont en escaliers avec :

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\psi(x)\beta(x) - \varphi(x)\alpha(x))\, dx &= \int_a^b \psi(x)(\beta(x) - \alpha(x))\, dx + \int_a^b \alpha(x)(\psi(x) - \varphi(x))\, dx \\
&\leq M_f \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x))\, dx + M_g \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\, dx \\
&\leq (M_f + M_g)\,\varepsilon
\end{aligned}$$

La fonction $fg$ est donc intégrable sur $[a,b]$.

Pour $f,g$ non nécessairement positives, en notant respectivement $m_f$ et $m_g$ les bornes inférieures de $f$ et $g$ sur $[a,b]$, les fonctions $f - m_f$ et $g - m_g$ sont intégrables positives, donc $h = (f - m_f)(g - m_g)$ est intégrable et aussi :

$$fg = h + m_f g + m_g f - m_f m_g$$

■

En définitive, $\mathcal{R}([a,b])$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.

**Exercice 1.8**

1. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que pour tout réel $\varepsilon > 0$, l'ensemble :*

$$|f|^{-1}(]\varepsilon, +\infty[) = \{x \in [0,1] \mid |f(x)| > \varepsilon\}$$

*soit fini. Montrer que $f$ est intégrable d'intégrale nulle.*

2. *Soit $f$ la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 0$ si $x$ est irrationnel ou $x = 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{q}$ si $x = \dfrac{p}{q}$ est rationnel non nul où $p,q$ sont entiers naturels non nuls premiers entre eux. Montrer que $f$ est intégrable d'intégrale nulle.*

**Solution 1.7**

1. *Soit $\varepsilon > 0$. L'ensemble $E_\varepsilon = \left\{x \in [0,1] \mid |f(x)| > \dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$ étant fini, on a $-\dfrac{\varepsilon}{2} \leq f(x) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x$ dans $[0,1]$ privé d'un nombre fini de points. Il existe donc une subdivision $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[0,1]$ telle que $-\dfrac{\varepsilon}{2} \leq f(x) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \in [0,1] \setminus \{a_0, \cdots, a_n\}$. En désignant par $\varphi$ et $\psi$ les fonctions en escaliers définies par $\varphi(x) = -\dfrac{\varepsilon}{2}$, $\Psi(x) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour*

*tout* $x \in [0,1] \setminus \{a_0, \cdots, a_n\}$ *et* $\varphi(a_k) = \Psi(a_k) = f(a_k)$ *pour tout* $k$ *compris entre* $0$ *et* $n$, *on a* $\varphi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x)$ *pour tout* $x \in [0,1]$ *et :*

$$\int_0^1 (\psi(x) - \varphi(x))\, dx = \varepsilon$$

*La fonction* $f$ *est donc intégrable.*
*Puis avec :*

$$-\frac{\varepsilon}{2} = \int_0^1 \varphi(x)\, dx \leq \int_0^1 f(x)\, dx \leq \int_0^1 \psi(x)\, dx = \frac{\varepsilon}{2}$$

*le réel* $\varepsilon > 0$ *étant quelconque, on en déduit que* $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = 0.$

2. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Si* $x \in [0,1]$ *est tel que* $f(x) > \varepsilon$, *on a alors* $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *où* $1 \leq p \leq q$ *sont des entiers premiers entre eux et* $f(x) = \dfrac{1}{q}$, *donc :*

$$1 \leq p \leq q < \frac{1}{\varepsilon}$$

*ce qui n'est réalisable que pour un nombre fini de couples* $(p,q)$. *L'ensemble* $f^{-1}(]\varepsilon, +\infty[)$ *est donc fini.*
*Le résultat découle alors de la question précédente.*

**Remarque 1.6** *On peut vérifier que la fonction* $f$ *de la deuxième question de l'exercice précédent est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel de* $]0,1[$.

## 1.3 Exemples de fonctions intégrables

On a déjà vu que les fonctions en escaliers sont Riemann-intégrables.

### 1.3.1 Fonctions localement intégrables

Si $I$ est un intervalle réel non réduit à un point d'extrémités $-\infty \leq u < v \leq +\infty$, son intérieur est l'intervalle ouvert $\overset{\circ}{I} = ]u, v[$.

**Définition 1.7** *On dit que la fonction* $f$, *définie sur un intervalle réel* $I$ *non réduit à un point, est localement intégrable sur* $I$, *si elle est intégrable sur tout segment* $[\alpha, \beta]$ *contenu dans* $\overset{\circ}{I}$.

**Théorème 1.8** *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction bornée localement intégrable sur* $]a,b[$, *elle est alors intégrable sur* $[a,b]$.

**Démonstration.** Si $f$ est constante, c'est alors clair. On suppose donc $f$ non constante.
Comme $f$ est bornée, on peut définir les réels $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $\alpha < \beta$ dans $]a,b[$ tels que $\alpha - a < \dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}$ et $b - \beta < \dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}$ ($f$ n'est pas constante, donc $m < M$).

Comme $f$ est intégrable sur $[\alpha, \beta]$, il existe deux fonctions en escaliers sur $[\alpha, \beta]$ telles que :

$$\varphi_1 \leq f \leq \psi_1 \text{ sur } [\alpha, \beta]$$

et :

$$0 \leq \int_\alpha^\beta (\psi_1(x) - \varphi_1(x))\, dx \leq \varepsilon$$

En désignant par $\varphi$ et $\psi$ les fonctions en escaliers définies par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} m \text{ si } x \in [a,\alpha] \cup [\beta, b] \\ \varphi_1(x) \text{ si } x \in [\alpha,\beta] \end{cases} \quad \psi'(x) = \begin{cases} M \text{ si } x \in [a,\alpha] \cup [\beta, b] \\ \psi_1(x) \text{ si } x \in [\alpha,\beta] \end{cases}$$

on a :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ sur } [a,b]$$

et :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\, dx = (\alpha - a + b - \beta)(M - m) + \int_\alpha^\beta (\psi_1(x) - \varphi_1(x))\, dx \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

On a donc $f \in \mathcal{R}([a,b])$. ■

### 1.3.2 Les fonctions monotones et monotones par morceaux

**Théorème 1.9** *Une fonction $f$ monotone sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable.*

**Démonstration.** Quitte à changer $f$ en $-f$, on peut supposer que $f$ est croissante.

En désignant, pour tout $n \geq 1$, par $\sigma_n = (a_k)_{0 \leq k \leq n} = \left(a + k\frac{b-a}{n}\right)_{0 \leq i \leq n}$ la subdivision de pas constant $\delta(\sigma_n) = \frac{b-a}{n}$ et par $\varphi_n, \psi_n$ les fonctions en escaliers définies par :

$$\forall k \in \{0, \cdots, n-1\},\ \forall x \in [a_k, a_{k+1}[,\ \varphi_n(x) = f(a_k),\ \psi_n(x) = f(a_{k+1})$$

et $\varphi_n(b) = \psi_n(b) = f(b)$, on a $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ pour tout $n \geq 1$ et :

$$\int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\, dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(a_{k+1}) - f(a_k)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

Il en résulte que $f$ est Riemann-intégrable. ■

Le théorème précédent nous dit aussi que, pour $f$ monotone, on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\, dx &= \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \psi_n(x)(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+1}) \end{aligned}$$

En prenant dans chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ un point $x_k$, on a $f(a_k) \leq f(x_k) \leq f(a_{k+1})$ (pour $f$ croissante) et en conséquence :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

Les quantités $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ sont des sommes de Riemann associées à la fonction $f$ (voir le paragraphe 1.6).

**Définition 1.8** *On dit que la fonction $f$ est monotone par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (c_i)_{0\leq i\leq n} \in \Sigma_{a,b}$ telle que la fonction $f$ soit monotone sur chacun des intervalle $]c_i, c_{i+1}[$ $(0 \leq i \leq n-1)$.*

**Théorème 1.10** *Une fonction bornée et monotone par morceaux sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable.*

**Démonstration.** La fonction $f$ étant monotone sur chacun des intervalle $]c_i, c_{i+1}[$ , elle y est localement intégrable et comme elle est bornée sur $[c_i, c_{i+1}]$ , elle est intégrable sur cet intervalle. Elle est donc intégrable sur $[a,b]$ . ■

### 1.3.3 Les fonctions continues et continues par morceaux

En utilisant le fait qu'une fonction continue sur un segment est uniformément continue, qu'elle bornée et atteint ses bornes, on déduit qu'elle est intégrable.

**Théorème 1.11** *Une fonction continue sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable.*

**Démonstration.** On désigne, pour tout entier $n \geq 1$, par $\sigma_n = (a_k)_{0\leq k\leq n} = \left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)_{0\leq i\leq n}$ la subdivision de pas constant $\delta(\sigma_n) = \dfrac{b-a}{n}$ et pour tout entier $k$ compris entre 0 et $n-1$, on note :

$$m_k = f(x_k) = \inf_{x\in[a_i,a_{i+1}]} f(x) \text{ et } M_k = f(y_k) = \sup_{x\in[a_i,a_{i+1}]} f(x)$$

(une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes).

Avec ces notations, on définit les fonctions en escaliers $\varphi_n$ et $\psi_n$ par :

$$\forall k \in \{0, \cdots, n-1\}, \ \forall x \in [a_k, a_{k+1}[, \ \varphi_n(x) = m_k, \ \psi_n(x) = M_k$$

et $\varphi_n(b) = \psi_n(b) = f(b)$ .

On a alors $\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)$ pour tout $x \in [a,b]$ .

La fonction $f$ étant continue sur le compact $[a,b]$ , elle est uniformément continue, c'est-à-dire que pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\left((x,y) \in [a,b]^2 \text{ et } |y-x| < \eta\right) \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon \tag{1.4}$$

En désignant par $n_0 \geq 1$ un entier tel que $\dfrac{b-a}{n_0} < \eta$, on a pour tout $n \geq n_0$ et tous $x, y$ dans $[a_k, a_{k+1}]$ :

$$|y-x| \leq a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n} < \eta$$

donc :

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

et en conséquence :

$$\begin{aligned}\int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\,dx &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)(M_k - m_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(y_k) - f(x_k)) \\ &\leq \frac{b-a}{n} n\varepsilon = \varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b (\psi_n(x)-\varphi_n(x))\,dx = 0$ et $f$ est Riemann-intégrable. ■

Le théorème précédent nous dit aussi que, pour $f$ continue, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n(x)(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(y_k)\end{aligned}$$

où $f(x_k) = \inf\limits_{x\in[a_i,a_{i+1}]} f(x)$ et $f(y_k) = \sup\limits_{x\in[a_i,a_{i+1}]} f(x)$

En prenant dans chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ un point $\xi_k$, on a $f(x_k)\leq f(\xi_k)\leq f(y_k)$ et en conséquence :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \tag{1.5}$$

Nous verrons au paragraphe 1.6 que ce résultat est en fait valable pour toute fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Du théorème 1.8, on déduit le résultat suivant.

**Théorème 1.12** *Une fonction bornée sur $[a,b]$ et continue sur $]a,b]$ est Riemann-intégrable.*

**Démonstration.** Une telle fonction est bornée et localement intégrable sur $]a,b[$, donc intégrable sur $[a,b]$ d'après le théorème 1.8. ■

**Exemple 1.6** *La fonction $f$ définie sur $[0,1]$ par $f(0)=0$ et $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x\in\,]0,1]$ est continue sur $]0,1]$ et bornée sur $[0,1]$, donc elle est Riemann-intégrable.*

**Remarque 1.7** *La fonction de l'exemple précédent ne peut se prolonger en fonction continue sur $[0,1]$ puisqu'elle n'a pas de limite à droite en 0.*

**Exercice 1.9** *En utilisant les sommes de Riemann (c'est-à-dire la formule (1.5)), calculer les intégrales suivantes :*

1. $\int_a^b x\,dx$ *et* $\int_a^b x^2\,dx$.
2. $\int_0^\pi \ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,dt$, *pour tout réel $x\notin\{-1,1\}$.*

**Solution 1.8**

1. *Les fonctions considérées étant toutes continues, elles sont intégrables sur l'intervalle considéré et on peut utiliser (1.5).*

   (a) *Soit $f : x\in[a,b]\mapsto f(x)=x$.*
   *Pour tout entier $n\geq 1$, on a :*

   $$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = a(b-a)+\frac{n(n-1)}{2}\frac{(b-a)^2}{n^2}$$

   *donc :*

   $$\int_a^b x\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

(b) *Pour* $f : x \in [a,b] \longmapsto x^2$, *on a :*

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)^2 \\ &= a^2(b-a)+2a\frac{n(n-1)}{2}\frac{(b-a)^2}{n^2}+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\frac{(b-a)^3}{n^3} \end{aligned}$$

*et :*

$$\int_a^b x dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = a^2(b-a)+a(b-a)^2+\frac{(b-a)^3}{3}=\frac{b^3-a^3}{3}$$

2. *On a, pour* $|x| \neq 1$ *et* $t \in [0,\pi]$ *:*

$$f(x,t)=\ln\left(1-2x\cos(t)+x^2\right)=\ln\left(\left|x-e^{it}\right|^2\right)$$

*avec* $|x-e^{it}|>0$. *La fonction* $t \longmapsto f(x,t)$ *est donc bien définie et continue sur* $[0,\pi]$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
*Ces fonctions sont donc Riemann-intégrables sur* $[0,\pi]$ *et on peut utiliser les sommes de Riemann :*

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\left|x-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right|^2\right)=\frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\left(x-e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{n}\ln\left((x-1)^2\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\left(x-e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{n}\ln\left((x-1)^2\frac{1-x^{2n}}{1-x^2}\right) \\ &= \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\left(1-x^{2n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\to}\left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } |x|<1 \\ 2\pi\ln(|x|) \text{ si } |x|>1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

*donc :*

$$\int_0^\pi \ln\left(1-2x\cos(t)+x^2\right)dt=\left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } |x|<1 \\ 2\pi\ln(|x|) \text{ si } |x|>1 \end{array}\right.$$

**Exercice 1.10** *On désigne par* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite des intégrales de Wallis définie par :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ W_n=\int_0^\pi \cos^{2n}(t)\,dt$$

1. *Montrer que pour tout entier* $n \geq 1$ *et tout réel* $t$, *on a :*

$$(\cos(t))^{2n}=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{p=0}^{2n}\binom{2n}{p}\cos(2(p-n)t)$$

2. *Montrer que pour tout entier* $m \geq 1$ *et tout réel* $\theta \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, *on a :*

$$\sum_{k=0}^{m-1}\cos(k\theta)=\frac{\sin\left(m\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left((m-1)\frac{\theta}{2}\right)$$

3. *En utilisant les sommes de Riemann, montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a :*

$$W_n = \frac{\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

**Solution 1.9**

1. *Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $t$, on a :*

$$\begin{aligned}(\cos(t))^{2n} &= \frac{\left(e^{it} + e^{-it}\right)^{2n}}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} e^{ipt} e^{-i(2n-p)t} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} e^{i2(p-n)t}\end{aligned}$$

*et comme $(\cos(t))^{2n}$ est réel, on en déduit que :*

$$(\cos(t))^{2n} = \Re\left(\frac{1}{2^{2n}} \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} e^{i2(p-n)t}\right) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} \cos(2(p-n)t)$$

2. *On a :*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1} \cos(k\theta) &= \Re\left(\sum_{k=0}^{m-1} e^{ik\theta}\right) = \Re\left(\sum_{k=0}^{m-1} \left(e^{i\theta}\right)^k\right) \\ &= \Re\left(\frac{1 - e^{im\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right) = \Re\left(\frac{e^{im\frac{\theta}{2}}\left(e^{-im\frac{\theta}{2}} - e^{im\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}\right) \\ &= \Re\left(\frac{\sin\left(m\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i(m-1)\frac{\theta}{2}}\right) = \frac{\sin\left(m\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cos\left((m-1)\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

*(comme $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{i\theta} \neq 1$ et $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$).*

3. *Pour $n = 0$, on a $W_0 = \pi$.*
*Pour $n \geq 1$, on utilise les somme de Riemann, pour $m > n$ :*

$$\begin{aligned}S_m &= \frac{\pi}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \cos^{2n}\left(\frac{k\pi}{m}\right) \\ &= \frac{\pi}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^{2n}} \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} \cos\left(2(p-n)\frac{k\pi}{m}\right) \\ &= \frac{\pi}{m} \frac{1}{2^{2n}} \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} \sum_{k=0}^{m-1} \cos\left(2(p-n)\frac{k\pi}{m}\right)\end{aligned}$$

*Pour $p = n$, on a :*

$$\sum_{k=0}^{m-1} \cos\left(2(p-n)\frac{k\pi}{m}\right) = m$$

*et pour $p$ compris entre 0 et $2n$, différent de $n$, on a $\theta = 2(p-n)\dfrac{\pi}{m} \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ (on a $1 \leq |p-n| \leq n < m$, donc $0 < |\theta| < 2\pi$) et :*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1} \cos\left(2(p-n)\frac{k\pi}{m}\right) &= \frac{\sin\left(m\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cos\left((m-1)\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{\sin\left((p-n)\pi\right)}{\sin\left((p-n)\frac{\pi}{m}\right)} \cos\left((m-1)(p-n)\frac{\pi}{m}\right) = 0\end{aligned}$$

*donc :*

$$\forall m > n,\ S_m = \frac{\pi}{m}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} m = \frac{\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

*et en conséquence :*

$$\int_0^{\pi} \cos^n(t)\, dt = \lim_{m \to +\infty} S_m = \frac{\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

**Exercice 1.11** *Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{2n^2}\right) \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

*est convergente et calculer sa limite.*

**Solution 1.10** *En utilisant le développement limité :*

$$\tan(x) = x + O\left(x^3\right) = x + x^3\varphi(x)$$

*où $\varphi$ est une fonction bornée sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, on a pour $n \geq 2$ :*

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \frac{\pi^3}{8n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 \varphi\left(\frac{k\pi}{2n^2}\right) \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \\ &= v_n + r_n\end{aligned}$$

*avec :*

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{\pi}{2}\int_0^1 x \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{x}{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)} dx$$

*(sommes de Riemann de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ qui est continue sur $[0,1]$ avec $f(0) = \dfrac{2}{\pi}$).*

*En désignant par $M$ un majorant de la fonction $|\varphi|$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, on a :*

$$\begin{aligned}|r_n| &\leq M\frac{\pi^3}{8n^6} \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right) \sum_{k=1}^{n} k^3 = M\frac{\pi^3}{8n^6} \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right) \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &\leq M\frac{\pi^3}{32}\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\frac{(n+1)^2}{n^4} \underset{n \to +\infty}{\sim} M\frac{\pi^2}{16}\frac{1}{n}\end{aligned}$$

*donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$ *et :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{x}{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)}dt$$

*Une intégration par parties nous donne :*

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)}dt &= [t\ln(\sin(t))]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt = \frac{\pi}{2}\ln(2)\end{aligned}$$

*(voir l'exercice* **??***), donc :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)$$

**Définition 1.9** *On dit que la fonction $f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (c_i)_{0\leq i\leq n} \in \Sigma_{a,b}$ telle que, pour tout entier $k$ compris entre $0$ et $p-1$, la restriction de la fonction $f$ à l'intervalle ouvert $]c_k, c_{k+1}[$ se prolonge en une fonction continue sur le segment $[c_k, c_{k+1}]$.*

**Théorème 1.13** *Une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable.*

**Démonstration.** La fonction $f$ étant continue sur chacun des intervalle $]c_i, c_{i+1}[$, elle y est localement intégrable et comme elle est bornée sur $[c_i, c_{i+1}]$, elle est intégrable sur cet intervalle. Elle est donc intégrable sur $[a,b]$. ■

On vu que l'on peut avoir $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ pour une fonction $f$ non identiquement nulle. Mais dans la cas des fonctions continues de signe constant, on a le résultat suivant.

**Théorème 1.14** *Soit $f$ continue sur $[a,b]$ de signe constant. L'égalité $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ est réalisée si, et seulement si, la fonction $f$ est identiquement nulle.*

**Démonstration.** Il est clair que si $f = 0$, on a alors $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Supposons que $f$ soit continue sur $[a,b]$ non identiquement nulle et à valeurs positives (quitte à remplacer $f$ par $-f$, on peut se ramener à ce cas).

Il existe alors un réel $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$ et par continuité, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [\alpha,\beta] = [x_0-\eta, x_0+\eta] \cap [a,b],\ f(x) > \mu = \frac{f(x_0)}{2}$$

En utilisant la relation de Chasles, on en déduit alors que :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta \mu dx = \mu(\beta-\alpha) > 0$$

On en déduit que si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, on a alors $f = 0$. ■

**Corollaire 1.2** *Soit $f$ continue par morceaux sur $[a,b]$ de signe constant.*
*L'égalité $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ est réalisée si, et seulement si, la fonction $f$ est nulle sur $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points.*

Le théorème des valeurs intermédiaires nous donne le résultat important suivant.

**Théorème 1.15 (Première formule de la moyenne)** *Si $f$ est continue sur $[a,b]$, il existe alors un réel $c \in [a,b]$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

**Démonstration.** La fonction $f$ étant continue sur le compact $I$ est bornée et atteint ses bornes, il existe donc deux réels $\alpha, \beta$ dans $[a,b]$ tels que $m = \inf_{x\in I} f(x) = f(\alpha)$ et $M = \sup_{x\in I} f(x) = f(\beta)$. De l'encadrement $(1.3)$, on déduit que :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \in [f(\alpha), f(\beta)]$$

et le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe un réel $c$ compris entre $\alpha$ et $\beta$ tel que $\delta = f(c)$, ce qui donne la formule de la moyenne. ■

Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ est la valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $[a,b]$.

Le théorème précédent peut être généralisé comme suit.

**Théorème 1.16 (Première formule de la moyenne)** *Soient $f, g$ deux fonctions continues sur $[a,b]$, la fonction $g$ étant de signe constant. Il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

**Démonstration.** Voir le chapitre 2 du volume 2. ■

## 1.4 Intégrale de Riemann et primitives

Sauf précision contraire $f$ est une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$.

**Définition 1.10** *Soit $I$ un intervalle réel non réduit à un point. Si $f$ est une fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$, on appelle primitive de $f$, toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ qui est dérivable sur $I$ de dérivée $F' = f$.*

Dans la définition précédente, pour $I = [a,b]$, il s'agit de dérivée à droite en $a$ et à gauche en $b$.

**Théorème 1.17** *Si $I$ est un intervalle réel non réduit à un point et $F, G$ sont deux primitives d'une même fonction $f : I \to \mathbb{R}$, elle diffèrent alors d'une constante, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\lambda$ tel que $G = F + \lambda$.*

**Démonstration.** C'est une conséquence immédiate du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $H = G - F$ : pour $x < y$ dans $I$, il existe $c \in I$ tel que $H(y) - H(x) = (y-x) H'(c)$ et dans le cas où $F' = G' = f$, on a $H' = 0$ et en conséquence $H(y) = H(x)$ pour tous $x, y$ dans $I$, ce qui signifie que $H$ est constante. ■

Le fait que $I$ soit un intervalle est essentiel dans le théorème précédent.

**Exemple 1.7** *Si $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et ce sont les fonctions :*

$$F : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \lambda$$

**Remarque 1.8** *Une fonction continue par morceaux sur un intervalle $I$, qui est localement intégrable sur $I$, n'admet pas nécessairement de primitive. Le théorème de Darboux nous dit qu'une fonction admettant des primitives vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. .*

**Exercice 1.12** *Montrer que la fonction en escaliers $f$ définie sur $I = [0,2]$ par $f(x) = 0$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 1$ si $x \in ]1,2]$ n'admet pas de primitives sur $I$.*

**Solution 1.11** *Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, on a alors $F'(x) = 0$ sur $[0,1]$ et $F'(x) = 1$ sur $]1,2]$, ce qui donne $F(x) = \alpha$ sur $[0,1]$ et $F(x) = x + \beta$ sur $]1,2]$, où $\alpha, \beta$ sont des constantes réelles. Avec la continuité de $F$ en 1, on déduit que $\alpha = 1 + \beta$ et $F$ est définie par $F(x) = 1 + \beta$ sur $[0,1]$ et $F(x) = x + \beta$ sur $]1,2]$. Mais une telle fonction ne peut être dérivable en 1, puisque :*

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = 0 \neq \lim_{x \to 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = 1$$

**Remarque 1.9** *Une fonction $f$ admettant des primitives sur un segment n'est pas nécessairement Riemann-intégrable.*
*Considérons la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$$

*(exemple de Volterra).*
*Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ F'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

*et de $\left|\dfrac{F(x) - F(0)}{x}\right| = |x| \left|\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right| \leq |x|$ sur $\mathbb{R}^*$, on déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x} = 0$, ce qui signifie que $F$ est dérivable en $0$ avec $F'(0) = 0$.*
*La fonction $f = F'$ admet donc des primitives sur $[-1,1]$, mais avec :*

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) = -2\sqrt{2n\pi} \underset{n \to +\infty}{\to} -\infty$$

*on déduit que $f$ n'est pas bornée sur $[-1,1]$ et en conséquence, elle n'est pas Riemann-intégrable sur cet intervalle.*

**Théorème 1.18** *Soit $f$ une fonction intégrable sur $[a,b]$ et $F$ la fonction définie sur $[a,b]$ par :*

$$\forall x \in [a,b]\,,\ F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

*Cette fonction $F$ est continue sur $[a,b]$, dérivable en tout point $x_0$ où la fonction $f$ est continue avec $F'(x_0) = f(x_0)$.*

**Démonstration.** Le théorème 1.6 nous assure que la fonction $F$ est bien définie et pour tous $x, y$ dans $[a,b]$, on a :

$$F(y) = \int_a^y f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^y f(t)\,dt = F(x) + \int_x^y f(t)\,dt$$

donc :

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,dt$$

et :

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq |y-x|\,\|f\|_\infty$$

La fonction $F$ est donc lipschitzienne sur $[a,b]$ et en conséquence, elle est continue.

Supposons que $f$ soit continue en un point $x_0$ de $[a,b]$.

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$(t \in [a,b] \text{ et } |t - x_0| < \eta) \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

donc pour $x \in [a,b]$ tel que $0 < |x - x_0| < \eta$ et tout $t$ compris entre $x_0$ et $x$, on a :

$$|t - x_0| \leq |x - x_0| < \eta$$

(le segment d'extrémités $t$ et $x_0$ est contenu dans le segment d'extrémités $x_0$ et $x$ qui a une longueur strictement inférieure à $\eta$) et :

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|}\varepsilon\,|x - x_0| = \varepsilon\end{aligned}$$

On a donc ainsi prouvé que :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

ce qui signifie que $F$ est dérivable en $x_0$ de nombre dérivé $F'(x_0) = f(x_0)$. ∎

**Corollaire 1.3** *Une fonction $f$ continue sur $[a,b]$ admet des primitives et toutes les primitives de $f$ sont de la forme :*

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt + \lambda$$

*où $\lambda$ est une constante réelle.*

*La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de $f$ nulle en $a$.*

**Démonstration.** Dans le cas où $f$ est continue, le théorème précédent nous dit que la fonction $F$ est dérivable sur tout $[a,b]$ avec $F' = f$. ■

**Remarque 1.10** *Le corollaire précédent peut être utilisé pour montrer qu'une fonction continue de signe constant et d'intégrale nulle est nécessairement nulle (théorème 1.14).*
*En effet, avec les notations du théorème, on a $F'(x) = f(x) \geq 0$, donc $F$ est croissante et avec $F(a) = 0 \leq F(x) \leq F(b) = 0$, on déduit que $F = 0$ et $f = F' = 0$.*

**Corollaire 1.4** *Soient $f$ une fonction continue sur $[a,b]$ et $u, v$ deux fonctions dérivables de $[\alpha,\beta]$ dans $[a,b]$. La fonction :*

$$\varphi : x \in [\alpha,\beta] \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt$$

*est dérivable avec :*

$$\forall x \in [\alpha,\beta],\ \varphi'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x))$$

**Démonstration.** En désignant par $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ la primitive de $f$ nulle en $a$ et en utilisant la relation de Chasles, on a pour tout $x \in [\alpha,\beta]$ :

$$\varphi(x) = \int_a^{v(x)} f(t)\, dt - \int_a^{u(x)} f(t)\, dt = F(v(x)) - F(u(x))$$

elle est donc dérivable de dérivée :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= v'(x) F'(v(x)) - u'(x) F'(u(x)) \\ &= v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x)) \end{aligned}$$

■

**Corollaire 1.5** *Si $f$ est une fonction continûment dérivable sur $[a,b]$, on a alors :*

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)$$

**Démonstration.** Comme $f'$ est continue, la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f'(t)\, dt$ est dérivable de dérivée $\varphi' = f'$, on a donc $\varphi = f + \lambda$ avec $\lambda = \varphi(a) - f(a) = -f(a)$ donc :

$$\int_a^x f'(t)\, dt = f(x) - f(a)$$

pour tout $x \in [a,b]$. ■

Le corollaire précédent est en fait valable en supposant seulement $f'$ Riemann-intégrable, ce que nous démontrerons en utilisant les sommes de Riemann et le théorème des accroissements finis (théorème 1.23).

## 1.5 Les fonctions logarithme népérien et exponentielle

Le corollaire 1.3 nous permet de donner la définition suivante.

**Définition 1.11** *La fonction logarithme népérien est la primitive nulle en* 1 *sur* $\mathbb{R}^{+,*}$ *de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. *On la note* ln *et on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

De cette définition on déduit immédiatement que :
- $\ln(x) < 0$ pour tout $x \in \left]0,1\right[$, $\ln(1) = 0$ et $\ln(x) > 0$ pour tout $x \in \left]1,+\infty\right[$ ;
- la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

  elle est donc strictement croissante.

En étudiant les variations de la fonction $x \mapsto \ln(x) - x$, on déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \ln(x) \leq x$$

Les primitives sur $\mathbb{R}^{-,*}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont les fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{-,*},\ F(x) = \ln(-x) + \lambda$$

où $\lambda$ est une constante réelle. En effet, la fonction $F_0 : x \mapsto \ln(-x)$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}^{-,*}$ avec $F_0'(x) = -\ln'(-x) = \dfrac{1}{x}$.

On en déduit que la fonction $x \mapsto \ln(|x|)$ est une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Toutes les autres primitives sont les fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ G(x) = \begin{cases} \ln(x) + \lambda_1 \text{ si } x > 0 \\ \ln(-x) + \lambda_2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

où $\lambda_1, \lambda_2$ sont deux constantes réelles.

Plus généralement si $u$ est une fonction définie sur un intervalle réel non réduit à un point $I$, ne s'annulant jamais et dérivable, la fonction $f = \ln(|u|)$ est alors dérivable sur $I$ de dérivé $\dfrac{u'}{u}$. En effet, comme $u$ est dérivable, elle est continue et ne s'annulant jamais sur $I$, elle garde un signe constant (théorème des valeurs intermédiaires). On a donc $f = \ln(u)$ ou $f = \ln(-u)$. Par composition, on en déduit que $f$ est dérivable avec $f' = \dfrac{u'}{u}$.

Ce quotient $\dfrac{u'}{u}$ est la dérivée logarithmique de $u$.

Le résultat qui suit nous dit que les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+,*}$ solutions de l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R}^{+,*},\ f(xy) = f(x) + f(y) \tag{1.6}$$

sont les fonctions $\lambda \cdot \ln$, où $\lambda$ est une constante réelle

**Théorème 1.19** *Pour tous réels* $x, y$ *dans* $\mathbb{R}^{+,*}$, *on a* $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ *et réciproquement toute fonction dérivable sur* $\mathbb{R}^{+,*}$ *vérifiant l'équation fonctionnelle* (1.6) *est proportionnelle au logarithme népérien.*

**Démonstration.** Pour $y$ fixé dans $\mathbb{R}^{+,*}$, la fonction $f_y : x \mapsto \ln(xy)$ est dérivable de dérivée $f_y'(x) = \dfrac{1}{x}$, il existe donc une constant $\lambda_y$ telle que $f_y(x) = \ln(x) + \lambda_y$. Prenant $x = 1$, on obtient $\lambda_y = \ln(y)$.

Réciproquement, soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ vérifiant (1.6).

Prenant $x = 1$ dans (1.6), on obtient $f(1) = 2f(1)$ et nécessairement $f(1) = 0$.

En fixant $y > 0$ et en dérivant par rapport à $x$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ y f'(xy) = f'(x)$$

et prenant $x = 1$, on en déduit que :

$$\forall y \in \mathbb{R}^{+,*},\ y f'(y) = f'(1) = \lambda$$

soit :

$$\forall y \in \mathbb{R}^{+,*},\ f'(y) = \frac{\lambda}{y} = \lambda \ln'(y)$$

donc :

$$\forall y \in \mathbb{R}^{+,*},\ f(y) = \lambda \ln(y) + f(1) = \lambda \ln(y)$$

■

Par récurrence, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ln(x^n) = n \ln(x)$$

Avec $0 = \ln(1) = \ln\left(\dfrac{x}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$, on déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

et pour $x, y$ dans $\mathbb{R}^{+,*}$ :

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

Il en résulte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(x^n) = n \ln(x)$$

Pour $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(x) = \ln\left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n\right) = n \ln\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$, donc :

$$\ln\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{\ln(x)}{n}$$

Il en résulte que pour tous $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln(x^r) = \ln\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right) = p \ln\left(x^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{p}{q} \ln(x)$$

soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \forall r \in \mathbb{Q},\ \ln(x^r) = r \ln(x)$$

**Théorème 1.20** *On a* $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ *et la fonction* ln *est un homéomorphisme de* $\mathbb{R}^{+,*}$ *sur* $\mathbb{R}$.

**Démonstration.** Avec $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$, il suffit de montrer que $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

Comme la fonction ln est strictement croissante, on a $\ln(2) > \ln(1) = 0$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(2^n) = \lim_{n\to+\infty} n\ln(2) = +\infty$$

donc la fonction ln est non majorée. Il en résulte que $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

La fonction ln est donc continue strictement croissante de $\mathbb{R}^{+,*}$ sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}^{+,*}$ sur $\mathbb{R}$. ■

**Définition 1.12** *Le nombre réel e défini par* $\ln(e) = 1$ *est la base du logarithme népérien (on dit aussi la constante de Néper).*

**Exercice 1.13** *Montrer que* $1 + \sqrt{2} < e < 3$.

**Solution 1.12** *Comme la fonction* $t \mapsto \frac{1}{t}$ *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}^{+,*}$, *pour tout réel* $h > 0$ *et tout entier* $n \geq 1$, *on a :*

$$\ln(1+h) = \int_1^{1+h} \frac{dt}{t} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{1+k\frac{h}{n}}^{1+(k+1)\frac{h}{n}} \frac{dt}{t}$$

*avec :*

$$\frac{1}{\frac{n}{h}+k+1} = \frac{h}{n}\frac{1}{1+(k+1)\frac{h}{n}} \leq \int_{1+k\frac{h}{n}}^{1+(k+1)\frac{h}{n}} \frac{dt}{t} \leq \frac{h}{n}\frac{1}{1+k\frac{h}{n}} = \frac{1}{\frac{n}{h}+k}$$

*donc :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{n}{h}+k+1} \leq \ln(1+h) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{n}{h}+k}$$

*Prenant* $h = \sqrt{2}$, $n = 4$, *on a :*

$$\ln\left(1+\sqrt{2}\right) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}+2} + \frac{1}{2\sqrt{2}+3} \approx 0.993\,44 < 1$$

*et prenant* $h = 2$, $n = 8$, *on a :*

$$\ln(3) \geq \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \approx 1.019\,9 > 1$$

*Avec la stricte croissance de la fonction* ln, *on en déduit que* $1 + \sqrt{2} < e < 3$.

Les limites suivantes sont souvent utiles.

**Théorème 1.21** *On a :*

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \ \lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0, \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

**Démonstration.** Par définition du nombre dérivé, on a :

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = \ln'(1) = 1$$

Pour tout $x > 1$, on a $\frac{\ln(x)}{2} = \ln(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x}$, donc $0 < \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Enfin, avec $x\ln(x) = -\frac{\ln(x^{-1})}{x^{-1}}$, on déduit que $\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$. ■

**Exercice 1.14** *Montrer que la fonction* $\ln$ *n'est pas une fonction rationnelle.*

**Solution 1.13** *Supposons qu'il existe deux fonctions polynomiales* $P, Q$ *avec* $Q(x) \neq 0$ *pour tout* $x > 0$ *telles que* $\ln(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. *Comme* $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$, *on a nécessairement* $\deg(P) > \deg(Q)$ *et comme* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, *on a nécessairement* $\deg(P) < \deg(xQ) = 1 + \deg(Q)$, *soit* $\deg(P) \leq \deg(Q)$, *ce qui donne une contradiction.*

La fonction réciproque de la fonction ln est la fonction exponentielle notée $\exp(x)$ ou $e^x$, elle est donc définie par :

$$(x \in \mathbb{R} \text{ et } y = e^x) \Leftrightarrow \left(y \in \mathbb{R}^{+,*} \text{ et } x = \ln(y)\right)$$

Cette fonction est continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et on a :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \ \lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Elle est aussi dérivable de dérivée $\exp'(x) = \exp(x)$. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, l'égalité $y = \exp(x)$ équivaut à $y \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $x = \ln(y)$ et on a :

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(y)} = y = \exp(x)$$

Par définition du nombre dérivé, on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Pour $x, y$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)\exp(y)}\right) &= \ln(\exp(x+y)) - \ln(\exp(x)) - \ln(\exp(y)) \\ &= x + y - x - y = 0 = \ln(1) \end{aligned}$$

donc $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)\exp(y)} = 1$ et $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Avec $\exp(0) = \exp(x - x) = 1$, on en déduit que $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ pour tout réel $x$.

## 1.6 Sommes de Riemann

En gardant toujours les mêmes les notations, étant donnée une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$, on choisit, pour tout $i$ compris entre 0 et $n-1$, un point $x_i$ dans $[a_i, a_{i+1}]$ et on note :

$$R\left(f, \dot{\sigma}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(x_i)$$

On dit que $R\left(f, \dot{\sigma}\right)$ est la somme de Riemann associée à la subdivision pointée $\dot{\sigma} = (a_i, x_i)_{0 \leq i \leq n}$.

On note $\Sigma_{a,b}$ l'ensemble de toutes les subdivisions pointées $\dot{\sigma} = (a_i, x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ et pour une telle subdivision $\delta(\sigma)$ est le pas de la subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$.

**Théorème 1.22** *Soit $f$ bornée sur $[a,b]$. Cette fonction est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ d'intégrale égale à $I(f)$ si, et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :*

$$\left(\dot{\sigma} \in \dot{\Sigma}_{a,b} \text{ et } \delta(\sigma) < \eta\right) \Rightarrow \left(\left|I(f) - R\left(f, \dot{\sigma}\right)\right| < \varepsilon\right)$$

*ce qui peut se traduire par :*

$$\lim_{\delta(\sigma)\to 0} R\left(f, \dot{\sigma}\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

**Démonstration.** Supposons que $f$ soit Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Pour $f = 0$, il n'y a rien à montrer. On suppose donc $f \neq 0$, de sorte que $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| > 0$.

Le théorème 1.4 nous dit que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escaliers $\varphi$ et $\theta$ sur $[a,b]$ telles que :

$$|f - \varphi| \leq \theta \text{ et } 0 \leq \int_a^b \theta(x)\,dx \leq \varepsilon$$

Si $\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont des subdivisions adaptées à $\varphi$ et $\theta$ respectivement, la subdivision plus fine $\sigma_\varepsilon = (\alpha_k)_{0\leq k\leq r} = \sigma_1 \cup \sigma_2$ est adaptée à $\varphi$ et $\theta$.

Si $\dot{\sigma} = (a_i, x_i)_{0\leq i\leq n}$ est une subdivision pointée de $[a,b]$, chaque point $\alpha_k$ de la subdivision $\sigma_\varepsilon$ appartient à au plus deux intervalles de la subdivision $\sigma$. Il existe donc au maximum $2r$ intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ qui contiennent tous les points $\alpha_k$.

Notons $J$ l'ensemble des indices $i$ compris entre $0$ et $n-1$ tels que l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ contienne des $\alpha_k$ et $K$ le complémentaire de $J$ dans $\{0, \cdots, n-1\}$.

Avec ces notations, on a :

$$\begin{aligned}
\left|R\left(f, \dot{\sigma}\right) - \int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left((a_{i+1} - a_i) f(x_i) - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx\right)\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(x_i) - f(x))\,dx\right| \\
&\leq \sum_{i\in J}\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x_i) - f(x)|\,dx + \sum_{i\in K}\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x_i) - f(x)|\,dx \\
&\leq 2M\sum_{i\in J}(a_{i+1} - a_i) + \sum_{i\in K}\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x_i) - f(x)|\,dx \\
&\leq 4Mr\delta(\sigma) + \sum_{i\in K}\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x_i) - f(x)|\,dx
\end{aligned}$$

Pour $i \in K$, le segment $[a_i, a_{i+1}]$ ne contenant aucun des $\alpha_k$ est contenu dans un intervalle $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ où les fonctions $\varphi$ et $\theta$ sont constantes égalent à $\varphi(x_i)$ et $\theta(x_i)$ respectivement, donc pour tout $x \in [a_i, a_{i+1}]$, on a :

$$|f(x_i) - f(x)| \leq |f(x_i) - \varphi(x_i)| + |\varphi(x) - f(x)| \leq \theta(x_i) + \theta(x) = 2\theta(x)$$

et :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x_i) - f(x)|\,dx \leq 2\int_{a_i}^{a_{i+1}} \theta(x)\,dx$$

On a donc :

$$\sum_{i\in K}\int_{a_i}^{a_{i+1}}|f(x_i)-f(x)|\,dx\leq 2\sum_{i\in K}\int_{a_i}^{a_{i+1}}\theta(x)\,dx\leq 2\int_a^b\theta(x)\,dx\leq 2\varepsilon$$

En définitive, pour toute subdivision pointée $\dot{\sigma}\in\dot{\Sigma}_{a,b}$, on a :

$$\left|R\left(f,\dot{\sigma}\right)-\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq 4Mr\delta(\sigma)+2\varepsilon$$

et pour $\delta(\sigma)<\eta=\dfrac{\varepsilon}{4Mr}$, on a $\left|R\left(f,\dot{\sigma}\right)-\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq 3\varepsilon.$

Réciproquement, supposons qu'il existe un réel $I(f)$ tel que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que :

$$\left(\dot{\sigma}\in\dot{\Sigma}_{a,b}\text{ et }\delta(\sigma)<\eta\right)\Rightarrow\left(\left|I(f)-R\left(f,\dot{\sigma}\right)\right|<\varepsilon\right)$$

Pour toute subdivision $\sigma=(a_i)_{0\leq i\leq n}\in\Sigma_{a,b}$ telle que $\delta(\sigma)<\eta$, en notant $m_i=\inf\limits_{x\in[a_i,a_{i+1}]}f(x)$ et $M_i=\sup\limits_{x\in[a_i,a_{i+1}]}f(x)$, on peut trouver dans chaque intervalle $[a_i,a_{i+1}]$ des points $x_i,y_i$ tels que :

$$m_i\leq f(x_i)<m_i+\frac{\varepsilon}{b-a}\text{ et }M_i-\frac{\varepsilon}{b-a}<f(y_i)\leq M_i$$

ce qui nous donne, en désignant par $\varphi$ et $\psi$ les fonctions en escaliers définie respectivement par $\varphi(x)=m_i$ et $\psi(x)=M_i$ pour tout $x\in\,]a_i,a_{i+1}[\,$, où $i$ est compris entre 0 et $n-1$ :

$$\int_a^b\varphi(x)\,dx\leq\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(x_i)=R\left(f,\dot{\sigma}\right)<\int_a^b\varphi(x)\,dx+\varepsilon$$

$$\int_a^b\psi(x)\,dx-\varepsilon<\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(y_i)=R\left(f,\dot{\sigma}'\right)\leq\int_a^b\psi(x)\,dx$$

donc :

$$I(f)-\int_a^b\varphi(x)\,dx<I(f)-R\left(f,\dot{\sigma}\right)+\varepsilon<2\varepsilon$$

$$\int_a^b\psi(x)\,dx-I(f)<R\left(f,\dot{\sigma}'\right)-I(f)+\varepsilon<2\varepsilon$$

avec $\varphi\leq f\leq\psi$.

En additionnant ces deux inégalités, on obtient :

$$\int_a^b(\psi(x)-\varphi(x))\,dx<4\varepsilon$$

donc $f$ est intégrable.

Enfin avec :

$$-2\varepsilon<\int_a^b\varphi(x)\,dx-I(f)\leq\int_a^b f(x)\,dx-I(f)\leq\int_a^b\psi(x)\,dx-I(f)<2\varepsilon$$

le réel $\varepsilon>0$ étant quelconque, on déduit que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=I(f)$. ■

Pratiquement, si $\left(\dot{\sigma_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de subdivisions pointées de $[a,b]$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta(\sigma_n)=0$, on a alors, pour toute fonction $f$ Riemann-intégrable sur $[a,b]$ :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}R\left(f,\dot{\sigma_n}\right)$$

Prenant en particulier la subdivision de pas constant $\dfrac{b-a}{n}$, on a en désignant pour $n\geq 1$, par $(x_{i,n})_{0\leq i\leq n-1}$ une suite de points telle que $x_{i,n}\in[a_i,a_{i+1}]$, où $a_i=a+i\dfrac{b-a}{n}$, pour $0\leq i\leq n-1$, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i,n})$$

Pour $x_{i,n}=a_i$, on a la méthode des rectangles à gauche pour calculer une intégrale :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$$

Pour $x_{i,n}=\dfrac{a_i+a_{i+1}}{2}=a_i+\dfrac{b-a}{2n}=a+(2i+1)\dfrac{b-a}{2n}$ (le milieu de $[a_i,a_{i+1}]$), on a la méthode des points milieux pour calculer une intégrale :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(a+(2i+1)\frac{b-a}{2n}\right)$$

En utilisant le théorème des accroissements finis et les sommes de Riemann, on a le résultat suivant qui généralise le théorème 1.5.

**Théorème 1.23** *Si $f$ est une fonction dérivable sur $[a,b]$ avec $f'$ Riemann-intégrable sur $[a,b]$, on a alors :*

$$\int_a^b f'(x)\,dx=f(b)-f(a)$$

**Démonstration.** Pour tout entier naturel non nul $n$, on désigne par $\sigma_n=(a_i)_{0\leq i\leq n}$ la subdivision de pas constant $\dfrac{b-a}{n}$ où $a_i=a+i\dfrac{b-a}{n}$, pour $0\leq i\leq n-1$.

En utilisant le théorème des accroissements finis, on peut écrire pour tout $n\geq 1$ :

$$\begin{aligned}f(b)-f(a)&=\sum_{i=0}^{n-1}(f(a_{i+1})-f(a_i))=\sum_{i=0}^{n-1}f'(c_i)(a_{i+1}-a_i)\\&=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'(c_i)\end{aligned}$$

où $c_i\in\,]a_i,a_{i+1}[$ et on reconnaît là une somme de Riemann pour la fonction $f'$ qui tend vers $\int_a^b f'(x)\,dx$ quand $n$ tend vers l'infini. ■

Le théorème précédent est parfois appelé théorème fondamental du calcul intégral.

Il permet de généraliser le théorème **??** d'intégrations parties comme suit.

**Théorème 1.24 (intégration par parties)** *Si $u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ avec $u', v'$ intégrables sur $[a,b]$, on a alors :*

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$$

**Démonstration.** Pour $u, v$ dérivables sur $[a,b]$ avec $u', v'$ intégrables sur $[a,b]$, on a pour tout $x \in [a,b]$ :

$$\int_a^x u(t)\,v'(t)\,dt = u(x)\,v(x) - u(a)\,v(a) - \int_a^x u'(t)\,v(t)\,dt$$

ce qui peut s'écrire en terme de primitives :

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$$

■

## 1.7 Suites de fonctions Riemann-intégrables

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ qui converge simplement vers une fonction $f$, cette limite $f$ n'est pas nécessairement intégrable et dans le cas où elle l'est, l'égalité $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ n'est pas assurée.

**Exemple 1.8** *En notant $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres rationnels dans l'intervalle $[0,1]$ (l'ensemble $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ étant dénombrable, on peut définir une telle suite), on définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \{r_0, r_1, \cdots, r_n\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

*Chaque fonction $f_n$ est intégrable d'intégrale nulle et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction caractéristique de $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ qui n'est pas intégrable (exercice 1.6).*

**Exemple 1.9** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = n^2 x^n (1-x)$ sur $[0,1]$. Cette suite de fonctions converge simplement vers la fonction nulle et :*

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 1 \neq \int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

La convergence uniforme nous donne le résultat intéressant qui suit.

**Théorème 1.25** *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite de fonctions Riemann-intégrables qui converge uniformément vers $f$ sur $I = [a,b]$, alors la fonction $f$ est Riemann intégrable sur $I$ et on a :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

**Démonstration.** Voir le chapitre 1 du volume 3. ■

**Définition 1.13** *On dit qu'une fonction $f$ définie sur $[a,b]$ et à valeurs réelles est réglée, si elle est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers.*

Du théorème précédent, on déduit le résultat suivant.

**Théorème 1.26** *Une fonction réglée sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable.*

Une fonction continue sur un segment étant réglée (Voir le chapitre 1 du volume 3), on retrouve le fait qu'une fonction continue sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable.

**Théorème 1.27** *Une fonction est réglée sur le segment $[a,b]$ si, et seulement si, elle admet une limite à droite en tout point de $[a,b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a,b]$.*

**Démonstration.** Voir Arnaudies, tome 2, page 424. ■

Une fonction monotone est réglée, donc intégrable sur $[a,b]$.

**Remarque 1.11** *Il existe des fonctions Riemann-intégrables qui ne sont pas réglées. La fonction de l'exemple 1.6 est intégrable sur $[0,1]$ et non réglée sur cet intervalle puisqu'elle n'a pas de limite à droite en 0.*

## 1.8 Fonctions à variation bornée

Pour ce paragraphe, $f$ est une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ qui est bornée.

À toute subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$, on associe la variation totale de $f$ sur $\sigma$ définie par :

$$V(\sigma, f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|$$

Pour tout réel $\lambda$ et toute subdivision $\sigma \in \Sigma_{a,b}$, on a :

$$V(\sigma, \lambda f) = \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda \cdot f(a_{i+1}) - \lambda \cdot f(a_i)| = |\lambda| V(\sigma, f)$$

et en particulier, $V(\sigma, -f) = V(\sigma, f)$.

**Définition 1.14** *On dit que $f$ est à variation bornée sur $[a,b]$ si la famille de réels $(V(\sigma, f))_{\sigma\in\Sigma_{a,b}}$ est bornée.*

**Définition 1.15** *Soit $f$ une fonction à variation bornée sur $[a,b]$. Le réel :*

$$V_a^b(f) = \sup_{\sigma\in\Sigma_{a,b}} V(\sigma, f)$$

*est la variation de $f$ sur $[a,b]$.*

Si $f$ est à variation bornée sur $[a,b]$, on convient de poser :

$$V_b^a(f) = -V_a^b(f)$$

et :

$$V_a^a(f) = 0$$

Si $f$ est à variation bornée sur $[a,b]$, on a alors, pour tout réel $\lambda$ et toute subdivision $\sigma \in \Sigma_{a,b}$ :

$$V_a^b(\lambda f) = \sup_{\sigma\in\Sigma_{a,b}} V(\sigma, \lambda f) = |\lambda| V_a^b(f)$$

et en particulier, $V_a^b(-f) = V_a^b(f)$.

**Lemme 1.2** *Une fonction monotone sur $[a,b]$ est à variation bornée avec :*

$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$$

**Démonstration.** Avec $V(\sigma, -f) = V(\sigma, f)$ pour tout $\sigma \in \Sigma_{a,b}$, il suffit de considérer le cas où $f$ est croissante.

Pour $f$ croissante, on a pour tout $\sigma \in \Sigma_{a,b}$ :

$$V(\sigma, f) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(a_{i+1}) - f(a_i)) = f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|$$

Pour $f$ décroissante, $-f$ est croissante et :

$$V_a^b(f) = V_a^b(-f) = -f(b) + f(a) = |f(b) - f(a)|$$

■

**Exercice 1.15** *Montrer qu'une fonction lipschitzienne sur $[a,b]$ est à variation bornée.*

**Solution 1.14** *Dire que $f$ est lipschitzienne sur $[a,b]$ signifie qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que :*

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \ |f(y) - f(x)| \leq \lambda |y - x|$$

*Une telle fonction est bornée sur $[a,b]$ et pour tout $\sigma \in \Sigma_{a,b}$, on a :*

$$V(\sigma, f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq \lambda \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = \lambda(b - a)$$

*Cette fonction est donc à variation bornée sur $[a,b]$ avec :*

$$V_a^b(f) \leq \lambda(b - a)$$

**Théorème 1.28** *Si $f$ est une fonction dérivable sur $[a,b]$ avec $f'$ Riemann-intégrable sur $[a,b]$, elle est alors à variation bornée avec :*

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)| \, dx$$

**Démonstration.** Une fonction dérivable sur $[a,b]$ avec $f'$ bornée est lipschitzienne (conséquence de l'inégalité des accroissements finis) donc à variation bornée.

En utilisant le théorème 1.5 et le théorème de Chasles, on a pour toute subdivision $\sigma \in \Sigma_{a,b}$ :

$$\begin{aligned} V(\sigma, f) &= \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t) \, dt \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f'(t)| \, dt = \int_a^b |f'(t)| \, dt \end{aligned}$$

donc $V_a^b(f) \leq \displaystyle\int_a^b |f'(x)| \, dx$.

Par définition de l'intégrale de Riemann, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escaliers $\varphi$ telle que $\varphi \leq |f'|$ et :

$$\int_a^b |f'(t)|\,dt - \varepsilon \leq \int_a^b \varphi(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\,\lambda_i$$

en désignant par $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à $\varphi$ telle que, pour tout $i$ compris entre 0 et $n-1$, $\varphi$ soit constante égale à $\lambda_i$ sur $]a_i, a_{i+1}[$.

En utilisant le théorème des accroissements, on a :

$$\begin{aligned} V(\sigma, f) &= \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\,|f'(c_i)| \\ &\geq \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\,\lambda_i = \int_a^b \varphi(t)\,dt \geq \int_a^b |f'(t)|\,dt - \varepsilon \end{aligned}$$

(on a $c_i \in\, ]a_i, a_{i+1}[$ et $|f'(c_i)| \geq \varphi(c_i) = \lambda_i$) et en conséquence :

$$\int_a^b |f'(t)|\,dt - \varepsilon \leq V(\sigma, f) \leq V_a^b(f)$$

Le réel $\varepsilon > 0$ étant quelconque, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b |f'(t)|\,dt \leq V_a^b(f)$ et l'égalité. ■

**Corollaire 1.6** *Si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, elle est alors à variation bornée avec :*

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|\,dx$$

**Démonstration.** La dérivée $f'$ étant continue sur $[a,b]$, elle est intégrable. ■

**Remarque 1.12** *Une fonction dérivable n'est pas nécessairement à variation bornée comme le montre l'exercice qui suit.*

**Exercice 1.16** *On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. *Vérifier que cette fonction est dérivable sur $[-1,1]$ de dérivée non bornée.*
2. *Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 |f'(x)|\,dx$ est divergente (voir le chapitre* **??** *pour la notion d'intégrale convergente).*
3. *Montrer que $f$ n'est pas à variation bornée sur $[-1,1]$.*

**Solution 1.15**

1. *Avec la remarque 1.9, on a vu que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :*

$$\begin{cases} f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{2}{x}\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

*et cette dérivée n'est pas bornée.*

2. *Avec* $\left|x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq |x|$ *pour* $x \neq 0$, *on déduit que l'intégrale* $\int_0^1 x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$ *est absolument convergente.*
*En notant* $u_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}}$ *pour* $n \geq 0$, *le changement variable* $x = \frac{1}{t^2}$, $dx = -\frac{2dt}{t^3} = -2x\sqrt{x}dt$ *donne :*

$$\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t}\left|\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\right|dt = \int_{\frac{\pi}{2}+n\pi}^{\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi} \frac{|\cos(x)|}{2x}dx$$

*puis* $x = (n+1)\pi + u$ *donne :*

$$\begin{aligned}\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t}\left|\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\right|dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos(u)|}{2(u+(n+1)\pi)}du \\ &\geq \frac{1}{(n+2)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos(u)|\,dx\end{aligned}$$

*Donc la série* $\sum\int_{u_{n+1}}^{u_n}\frac{1}{t}\left|\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\right|dt$ *est divergente et il en est de même de* $\int_0^{u_1}\frac{1}{t}\left|\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\right|dt$.
*Il en résulte que* $\int_0^1 |f'(x)|\,dx$ *diverge.*

3. *Comme* $f$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[\varepsilon, 1]$ *pour tout* $\varepsilon \in ]0,1[$, *elle est à variation bornée sur cet intervalle avec :*

$$V_\varepsilon^1(f) = \int_\varepsilon^1 |f'(x)|\,dx$$

*Si* $f$ *est à variation bornée sur* $[-1,1]$, *pour tout subdivision* $\sigma \in \Sigma_{\varepsilon,1}$, $\sigma' = (0,\varepsilon)\vee\sigma \in \Sigma_{0,1}$ *et :*

$$V_0^1(f) \geq V(\sigma', f) = |f(\varepsilon) - f(0)| + V(\sigma, f) \geq V(\sigma, f)$$

*donc :*

$$V_0^1(f) \geq V_\varepsilon^1(f) = \int_\varepsilon^1 |f'(x)|\,dx \underset{\varepsilon\to 0}{\to} +\infty$$

*ce qui est impossible.*

**Théorème 1.29** *Si* $f$ *et* $g$ *sont à variation bornée sur* $[a,b]$, *il en alors de même de* $f+g$ *et :*

$$V_a^b(f+g) \leqslant V_a^b(f) + V_a^b(g)$$

**Démonstration.** Pour toute subdivision $\sigma \in \Sigma_{a,b}$, on a :

$$\begin{aligned}V(\sigma, f+g) &= \sum_{i=0}^{n-1}|f(a_{i+1}) - f(a_i) + g(a_{i+1}) - g(a_i)| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1}|f(a_{i+1}) - f(a_i)| + \sum_{i=0}^{n-1}|g(a_{i+1}) - g(a_i)| = V(\sigma, f) + V(\sigma, g) \\ &\leq V_a^b(f) + V_a^b(g)\end{aligned}$$

donc $V(\sigma, f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$ et $V_a^b(f+g) \leqslant V_a^b(f) + V_a^b(g)$. ■

**Théorème 1.30** *Soit $c \in ]a,b[$.*
*La fonction $f$ est à variation bornée sur $[a,b]$ si, et seulement si, elle est à variation bornée sur $[a,c]$ et $[c,b]$. Dans ce cas, on a :*

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

*(relation de Chasles).*

**Démonstration.** Soit $c \in ]a,b[$.

Supposons que $f$ soit à variation bornée sur $[a,b]$. La fonction $f$ est donc bornée sur $[a,c]$ et $[c,b]$.

Pour toute subdivision $\sigma$ de $[a,c]$, $\sigma' = \sigma \vee (c,b)$ est une subdivision de $[a,b]$ et :

$$V_a^b(f) \geq V(\sigma', f) = V(\sigma, f) + |f(b) - f(c)| \geq V(\sigma, f)$$

Il en résulte que $f$ à variation bornée sur $[a,c]$ avec $V_a^c(f) \leq V_a^b(f)$.

De manière analogue, on voit que $f$ à variation bornée sur $[c,b]$ avec $V_c^b(f) \leq V_a^b(f)$.

Réciproquement supposons que $f$ soit à variation bornée sur $[a,c]$ et $[c,b]$. Elle est alors bornée sur $[a,c]$ et $[c,b]$, donc sur $[a,b]$.

Pour toute subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n} \in \Sigma_{a,b}$, il existe un unique entier $p$ compris entre 0 et $n-1$ tel que $c \in ]a_p, a_{p+1}]$ et en désignant par $\sigma_{[a;c]}, \sigma_{[c,b]}$ les subdivisions de $[a,c]$ et $[c,b]$ respectivement définies par :

$$\sigma_1 = (a_0, \cdots, a_p, c) \text{ et } \sigma_2 = (c, a_{p+1}, \cdots, a_n)$$

(si $c = a_{p+1}$, on pose alors $\sigma_{[c,b]} = (a_{p+1}, \cdots, a_n)$), on a alors :

$$\begin{aligned}
V(\sigma, f) &= \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + \sum_{i=p}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \\
&\leq \sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(c) - f(a_p)| + |f(a_{p+1}) - f(c)| + \sum_{i=p+1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|
\end{aligned}$$

(la dernière somme étant nulle si $p = n-1$), ce qui nous donne :

$$V(\sigma, f) \leq V\left(\sigma_{[a;c]}, f\right) + V\left(\sigma_{[c,b]}, f\right) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

Donc $f$ est à variation bornée sur $[a,b]$ et $V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

Dans ce cas, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\sigma_{[a;c]} \in \Sigma_{a,c}$ et $\sigma_{[c,b]} \in \Sigma_{c,b}$ telles que :

$$V_a^c(f) - \varepsilon < V\left(\sigma_{[a;c]}, f\right) \text{ et } V_c^b(f) - \varepsilon < V\left(\sigma_{[c,b]}, f\right)$$

En notant $\sigma = \sigma_{[a;c]} \vee \sigma_{[c,b]}$, on a :

$$V(\sigma, f) = V\left(\sigma_{[a;c]}, f\right) + V\left(\sigma_{[c,b]}, f\right) > V_a^c(f) + V_c^b(f) - 2\varepsilon$$

donc $V_a^b(f) > V_a^c(f) + V_c^b(f) - 2\varepsilon$ et $V_a^b(f) \geq V_a^c(f) + V_c^b(f)$ puisque $\varepsilon > 0$ est quelconque.

On a donc $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$. ■

**Théorème 1.31** *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est à variation bornée si, et seulement si, elle s'écrit comme la différence de deux fonctions croissantes.*

**Démonstration.** Si $f = g - h$ avec $g, h$ monotones sur $[a, b]$, les fonctions $g, h$ sont à variation bornée et il en est de même pour $f$ puisqu'elle est somme de deux fonctions à variations bornées (théorème 1.29).

On suppose que $f$ est à variation bornée sur $[a, b]$ et on définit les fonctions $g, h$ sur $[a, b]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(V_a^x(f) + f(x)\right) \text{ et } h(x) = \frac{1}{2}\left(V_a^x(f) - f(x)\right)$$

Pour $x < y$ dans $[a, b]$, on a :

$$\begin{aligned} 2(g(y) - g(x)) &= V_a^y(f) - V_a^x(f) + f(y) - f(x) \\ &= V_x^y(f) + f(y) - f(x) \\ &\geq |f(y) - f(x)| + f(y) - f(x) \geq 0 \end{aligned}$$

La fonction $g$ est donc croissante sur $[a, b]$.

En écrivant que :

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(V_a^x(-f) + (-f)(x)\right)$$

on déduit que $h$ est aussi croissante sur $[a, b]$ et $f$ est différence de deux fonctions croissantes.

# Bibliographie


[1] J. M. Arnaudies, J. Lelong-Ferrand. *Cours de Mathématiques. Tomes 1 à 4.* Dunod (1974).

[2] G. Auliac, J. Y. Caby. *Analyse pour le Capes et l'Agrégation interne.* Ellipses (2002).

[3] C. Deschamps, A. Warusfel. *Mathématiques tout en un. Série E. Ramis. Volumes 1 et 2.* Dunod. (1999).

[4] P. Doukhan, J. C. Sifre — *Cours d'analyse. Analyse réelle et intégration.* Dunod. (2001).

[5] A. Dufetel. *Analyse. Capes externe, agrégation interne de Mathématiques.* Vuibert (2011).

[6] B. Gostiaux. *Cours de Mathématiques Spéciales. Volumes 1 à 4.* P. U. F. (1995).

[7] G. H. Hardy. *A course of pure Mathematics.* Cambridge University Press (1952).

[8] E. Landau. *Differential and integral calculus.* Chelsea (1960).

[9] F. Liret, D. Martinais. *Cours de mathématiques. Analyse 1-ère et 2-ème année.*

[10] J. P. Ramis, A. Warusfel. *Mathématiques tout en un pour la licence. Niveau L2.* Dunod. (2007).

[11] W. Rudin. *Principes d'analyse mathématique.* Edisciences (1995).